LINEÁRNA A NELINEÁRNA

OPTIMALIZÁCIA

MARTIN KNOR

Recenzenti: Doc. RNDr. Ľudovít Niepel, CSc.
RNDr. Miroslav Hužvár, PhD.

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave dňa 20. 3. 2008 pre študijný program
2. ročník, MPM.

ISBN 978-80-227-3102-7

Doc. RNDr. Martin Knor, Dr.

LINEÁRNA A NELINEÁRNA OPTIMALIZÁCIA

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2009.

Edícia skrípt

Rozsah 99 strán, 8 obrázkov, 12 tabuliek, 5,778 AH, 5,942 VH, 1. vydanie,
edičné číslo 5430, vydané v elektornickej forme:
umiestnenie na http://www.svf.stuba.sk

85 – 229 – 2009

ISBN 978-80-227-3102-7

Predhovor

Tento učebný text je určený študentom druhého ročníka stavebnej fakulty Slovenskej technickej univerzity, študujúcim na smere aplikovaná matematika. Predstavuje spísané a v niektorých častiach mierne rozšírené prednášky z predmetu lineárna a nelineárna optimalizácia.

Štruktúra tohoto textu je upravená tak, že každá kapitola tvorí jednu prednášku. Čitateľovi predkladáme 11 kapitol, čo je podľa našich skúseností maximálny možný počet prednášok, ktorý sa dá stihnúť počas 13-týždňového semestra. Keďže v „zlých rokoch“ sa často nestihne ani 11 prednášok, tak za pomoci tejto učebnice si študent môže doplniť svoje vedomosti samoštúdiom.

Po obsahovej stránke je učebnica mimoriadne homogénna, možno ju však rozdeliť na tri celky. V kapitolách 1 až 5 sa zaoberáme lineárnym programovaním. Opíšeme úlohu lineárneho programovania a simplexový algoritmus, ktorým túto úlohu vyriešime. V tretej kapitole opisujeme rozličné aplikácie lineárneho programovania, ďalej sa venujeme dualite a analýze senzitivity. V kapitole 6 sa zaoberáme celočíselným programovaním. Opíšeme jednu metódu rezov a všeobecnejšiu metódu vetvenia. Nasledujú kapitoly 7 až 11, ktoré sa zaoberajú nelineárnym programovaním. Opíšeme Lagrangeove multiplikátory, Kuhn-Tuckerove podmienky, Wolfeho metódu, metódu prípustných smerov a Uzawovu metódu.

Z uvedeného vyplýva, že učebnica obsahuje viaceré zaujímavé algoritmy. Tieto algoritmy dôkladne opisujeme a skúmame, avšak nedokazujeme ich. Čitateľa, ktorý sa o danú problematiku zaujíma hlbšie, odkazujeme na literatúru uvedenú v závere učebnice.

Predpokladáme, že študenti si v pamäti uchovali isté vedomosti z prvého ročníka. Využívame najmä lineárnu algebru (pri lineárnom programovaní) a calculus funkcie viacerých premenných (pri nelineárnom programovaní). Napriek tomu, nevyhnutné fakty o funkcii viacerých premenných prezentujeme v úvode kapitoly 7.

Učebnica by mala slúžiť nielen ako doplnok rovnomennej prednášky, ale aj ako sprievodný text k cvičeniam. Preto sme na koniec každej kapitoly zaradili množstvo neriešených príkladov.

Záverom tohoto úvodu chcem poďakovať recenzentom RNDr. Miroslavovi Hužvárovi, PhD a doc. RNDr. Ľudovítovi Nieplovi, CSc, za cenné pripomienky. Tiež chcem poďakovať Mgr. Gabriele Kubičkovej za jazykovú úpravu.

Autor

1 LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

Definície

Úloha lineárneho programovania je optimalizačný problém, ktorý má nasledujúce vlastnosti:

(1) Optimalizuje (a to buď maximalizuje, alebo minimalizuje) **lineárnu účelovú funkciu** viacerých premenných.
(2) Premenné, ktoré sa vyskytujú v účelovej funkcii, musia spĺňať dané **lineárne ohraničenia**. Každé z týchto ohraničení je buď rovnicou, alebo neostrou nerovnicou, čiže v ohraničeniach nemôžu byť ostré nerovnice.
(3) Premenné môžu nadobúdať reálne hodnoty, avšak na niektoré z nich môže byť kladená podmienka, že musia byť nezáporné.

Podľa predchádzajúceho, úloha lineárneho programovania má tvar

$$\text{opt}\, z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{array}{rl} \text{ak platí} & a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \ \square_1\, b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \ \square_2\, b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \ \square_m\, b_m \end{array}$$

$$\text{pričom } x_i \geq 0 \text{ pre } i \in I, \text{ kde } I \subseteq \{1, \ldots, n\}$$

Tu „opt“ je „max“, alebo „min“; každý symbol „$\square_i$“ je buď „=“, alebo „$\leq$“, alebo „$\geq$“; $x_1, \ldots, x_n$ sú premenné; $c_1, \ldots c_n$, $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n}$ a $b_1, \ldots, b_m$ sú reálne čísla.

Prípustné riešenie úlohy lineárneho programovania je taká n-tica premenných, ktorá spĺňa všetky ohraničenia. Pre maximalizačný (minimalizačný) problém je **optimálne riešenie** také, ktoré je prípustné, a naviac spomedzi všetkých prípustných riešení práve v tomto nadobúda účelová funkcia najväčšiu (najmenšiu) hodnotu.

Úvodné príklady

Uvedieme tri príklady úlohy lineárneho programovania. Tieto príklady uvádzame vo všeobecnej forme, pretože v konkrétnom tvare ich budeme rozoberať v kapitole 3.

Príklad 1.1. Predpokladajme, že podnik vyrába tovary $T_1, T_2, \ldots T_n$ zo surovín $S_1, S_2, \ldots, S_m$, pričom každý týždeň je k dispozícii b_i jednotiek suroviny S_i. Pri výrobe jednej jednotky tovaru T_j sa spotrebuje $a_{i,j}$ jednotiek suroviny S_i, pričom $1 \leq i \leq m$ a $1 \leq j \leq n$. Zostrojte matematický model, ktorý maximalizuje zisk podniku, ak zisk z výroby jednej jednotky tovaru T_j je c_j.

Riešenie. Ak označíme symbolom x_j počet jednotiek tovaru T_j, ktoré má podnik týždenne vyrábať, tak matematickým modelom je

$$\begin{array}{rl} & \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{ak} & a_{1,1}x_1 + \ a_{1,2}x_2 + \ldots + \ a_{1,n}x_n \leq \ b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + \ a_{2,2}x_2 + \ldots + \ a_{2,n}x_n \leq \ b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \leq b_m \\ & \text{kde} \qquad x_1, x_2 \ldots x_n \geq 0 \end{array} \qquad \square$$

Príklad 1.2. Poľnohospodársky podnik potrebuje zostaviť kŕmnu zmes pre kravy. Vie sa, že krava má denne skonzumovať látky $L_1, L_2, \ldots, L_m$, pričom minimálna denná spotreba i-tej látky na kravu je b_i-jednotiek. K dispozícii sú krmivá $K_1, K_2, \ldots, K_n$, pričom v jednom kilograme krmiva K_j je $a_{i,j}$ jednotiek látky L_i ($1 \leq i \leq m$ a $1 \leq j \leq n$). Zostrojte matematický model, ktorý minimalizuje náklady podniku, ak cena jedného kilogramu krmiva K_j je c_j.

Riešenie. Ak označíme symbolom x_j počet kilogramov krmiva K_j, ktoré má podnik nakupovať pre jednu kravu na jeden deň, tak matematickým modelom je

$$\begin{array}{rl} & \min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{ak} & a_{1,1}x_1 + \ a_{1,2}x_2 + \ldots + \ a_{1,n}x_n \geq \ b_1 \\ & a_{2,1}x_1 + \ a_{2,2}x_2 + \ldots + \ a_{2,n}x_n \geq \ b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \geq b_m \\ & \text{kde} \qquad x_i, x_2 \ldots x_n \geq 0 \end{array} \qquad \square$$

Príklad 1.3 (Dopravná úloha). Pre istý tovar máme k dispozícii m dodávateľských miest $D_1, D_2, \ldots, D_m$ a n odberateľských staníc $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Dodávatelia majú daný tovar v množstvách $d_1, d_2, \ldots, d_m$ a spotrebitelia ho žiadajú v množstvách $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Vieme, že cena za prepravu jednej jednotky tovaru od dodávateľa D_i k spotrebiteľovi S_j je $c_{i,j}$. Zostavte matematický model minimalizujúci náklady a zabezpečujúci požiadavky všetkých odberateľov.

Riešenie. Označme symbolom $x_{i,j}$ počet jednotiek tovaru prepraveného od dodávateľa D_i k spotrebiteľovi S_j. Potom matematickým modelom je

$$\min z = (c_{1,1}x_{1,1} + \cdots + c_{1,n}x_{1,n}) + (c_{2,1}x_{2,1} + \cdots + c_{2,n}x_{2,n}) + \\ + \ldots + (c_{m,1}x_{m,1} + \cdots + c_{m,n}x_{m,n})$$

$$\begin{array}{ll} \text{ak} & x_{1,1} + x_{1,2} + \ldots + x_{1,n} \le d_1 \\ & \vdots \\ & x_{m,1} + x_{m,2} + \ldots + x_{m,n} \le d_m \\ & x_{1,1} + x_{2,1} + \ldots + x_{m,1} = s_1 \\ & \vdots \\ & x_{1,n} + x_{2,n} + \ldots + x_{m,n} = s_n \\ \text{kde pre všetky } x_{i,j} \text{ platí} & x_{i,j} \ge 0 \end{array} \qquad \square$$

Grafické riešenie

Ak máme v úlohe lineárneho programovania len dve premenné, povedzme x_1 a x_2, potom možno túto úlohu riešiť graficky v rovine s osami x_1 a x_2.

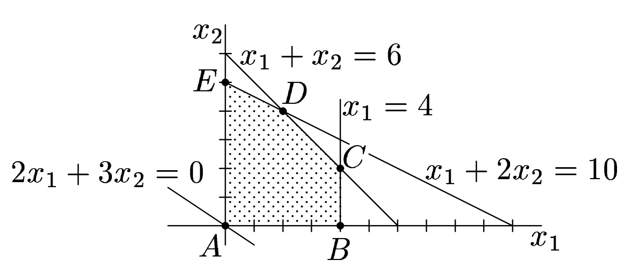
Postup vysvetlíme na nasledujúcom príklade.

Príklad 1.4. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{ll} \text{ak} & x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

Riešenie. Keďže sú všetky ohraničenia lineárne, je jednoduché nájsť množinu prípustných riešení, pozri vyšrafovanú časť na Obrázku 1.



Obrázok 1

Účelová funkcia je $z = 2x_1 + 3x_2$. Našu úlohu vyriešime, keď zostrojíme priamku rovnobežnú s $2x_1 + 3x_2 = 0$, ktorá sa „zhora“ dotýka vyšrafovanej oblasti. Bod dotyku je potom optimálnym riešením.

Všimnime si, že takto zostrojená rovnobežka musí prechádzať aspoň jedným vrcholom vyšrafovanej oblasti (bodom, v ktorom sa pretínajú dve „hraničné“ priamky). Teda riešenie môžeme nájsť aj tak, že určíme súradnice všetkých vrcholov vyšrafovanej oblasti a následne zistíme, v ktorom z nich je hodnota účelovej funkcie najväčšia.

V našom príklade má vyšrafovaná oblasť len päť vrcholov, ktorými sú $A = (0, 0)$, $B = (4, 0)$, $C = (4, 2)$, $D = (2, 4)$ a $E = (0, 5)$. Keďže

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 &= 0\\
2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 &= 8\\
2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 &= 14\\
2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 &= 16\\
2 \cdot 0 + 3 \cdot 5 &= 15
\end{aligned}
$$

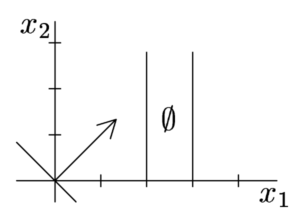
tak optimálne riešenie sa nadobúda pre $x_1 = 2$ a $x_2 = 4$, pričom optimálna hodnota účelovej funkcie je $z = 16$. $\square$

Typy riešení úlohy lineárneho programovania

Úloha lineárneho programovania môže mať štyri zásadne rôzne typy riešení. V nasledujúcom uvádzame príklad pre každý z týchto typov. Keďže tieto príklady majú len dve premenné, tak pre každý príklad zobrazíme množinu prípustných riešení (šrafovaná oblasť) a optimálne riešenia (tučné body).

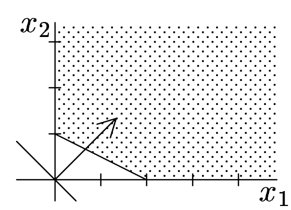
(1) **Úloha nemá prípustné riešenie**.

$$
\begin{aligned}
&\max z = x_1 + x_2\\
&\text{ak} \quad x_1 \geq 3\\
&\qquad\ \ x_1 \leq 2\\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



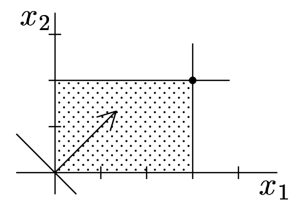
(2) **Úloha má prípustné riešenie, avšak nemá optimálne riešenie**.

$$
\begin{aligned}
&\max z = x_1 + x_2\\
&\text{ak} \quad x_1 + 2x_2 \geq 2\\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



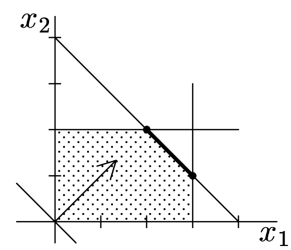
(3) **Úloha má jediné optimálne riešenie.**

$$
\begin{aligned}
\max z &= x_1 + x_2 \\
\text{ak} \quad x_1 \quad &\leq 3 \\
x_2 &\leq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



(4) **Úloha má nekonečne veľa optimálnych riešení.**

$$
\begin{aligned}
\max z &= x_1 + x_2 \\
\text{ak} \quad x_1 \quad &\leq 3 \\
x_2 &\leq 2 \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



Všimnime si, že hoci sú koeficienty úlohy lineárneho programovania zväčša celočíselné, riešenia môžu obsahovať racionálne čísla. To znamená, že lineárne programovanie sa používa vtedy, keď očakávame veľké hodnoty premenných, alebo keď očakávame (a vieme interpretovať) racionálne riešenie. Ak riešením musia byť celé čísla, tak používame metódy celočíselného programovania (pozri kapitolu 6), no aj tieto metódy využívajú (racionálne) riešenie zodpovedajúcej úlohy lineárneho programovania.

Transformácia úlohy lineárneho programovania

V nasledujúcej kapitole opíšeme algoritmus riešiaci úlohu lineárneho programovania. Tento algoritmus rieši úlohu, ktorá je v kanonickom tvare. Preto potrebujeme tento tvar zaviesť. **Kanonický tvar** úlohy lineárneho programovania je maximalizačný problém nasledujúceho tvaru, v ktorom $b_1, b_2, \ldots, b_m \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{ak} \quad a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \\
x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Každá úloha lineárneho programovania sa dá transformovať na s ňou ekvivalentnú úlohu v kanonickom tvare, pričom stačí použiť štyri pravidlá:

(1) **Zmena problému na maximalizačný**.

Ak má účelová funkcia tvar $\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, tak ekvivalentná formulácia je

$$\max(-z) = (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \cdots + (-c_n)x_n.$$

(2) **Zmena nerovníc na rovnice**.

Do každej nerovnice pridáme jednu novú (pre každú nerovnicu inú) premennú. Nerovnicu

$$\begin{aligned} &a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \geq b_i && \text{nahradíme rovnicou} \\ &a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n - v = b_i, && v \geq 0, \end{aligned}$$

zatiaľ čo nerovnicu

$$\begin{aligned} &a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n \leq b_i && \text{nahradíme rovnicou} \\ &a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n + v = b_i, && v \geq 0. \end{aligned}$$

(3) **Zmena koeficientov na pravej strane na nezáporné**.

Ak je niektorý z týchto koeficientov záporný, tak prenásobíme príslušnú rovnicu konštantou -1.

(4) **Zmena premenných na nezáporné**.

Ak premenná x_i môže nadobúdať aj záporné hodnoty, tak každý jej výskyt v úlohe nahradíme výrazom $(x_i^+ - x_i^-)$ a pridáme ohraničenia $x_i^+ \geq 0$ a $x_i^- \geq 0$.

Keď prevedieme všetky uvedené transformácie, dostaneme novú úlohu lineárneho programovania, pričom táto úloha je ekvivalentná s pôvodnou. To znamená, že z optimálneho riešenia ľubovoľnej z týchto úloh vieme (v podstate okamžite) zostrojiť optimálne riešenie druhej.

PRÍKLAD 1.5. Transformujte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania na úlohu v kanonickom tvare.

$$\min z = 2x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{rrrrrr} \text{ak} & x_1 + & x_2 - & 2x_3 & \geq & 4 \\ & x_1 + & x_2 & & = & -2 \\ & x_1 - & 2x_2 + & x_3 & \leq & 6 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Riešenie. Aplikáciou pravidiel (1), (2), (3) a (4) dostávame úlohu lineárneho programovania:

$$\begin{aligned} \max(-z) &= -2x_1 + 3x_2 - x_3^+ + x_3^- \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 - 2x_3^+ + 2x_3^- - v_1 &= 4 \\ -x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3^+ - x_3^- + v_2 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, v_1, v_2 &\geq 0 \end{aligned} \qquad \square$$

Cvičenia

Cvičenie 1.1. Graficky vyriešte úlohy lineárneho programovania

a)
$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 - x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{ak} \quad 5x_1 + x_2 &\leq 9 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \max z &= -x_1 + 2x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{ak} \quad 3x_1 + 2x_2 &\leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 9 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \min z &= -x_1 + 3x_2 \\ \text{ak} \quad -x_1 + 2x_2 &\leq 1 \\ x_1 - 3x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{ak} \quad 3x_1 + 4x_2 &\geq 39 \\ 3x_1 + 5x_2 &\geq 45 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 - 8x_2 \\ \text{ak} \quad -4x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1 - 4x_2 &\leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} \min z &= x_1 - x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\leq 6 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ -x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

CVIČENIE 1.2. Graficky vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{array}{llll} \text{ak} & x_1 + \ x_2 \geq \ 6 & \qquad & 2x_1 + \ x_2 \geq 9 \\ & 3x_1 + \ x_2 \geq 11 & & x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ & x_1 + 3x_2 \geq \ 9 & & x_1 \ , \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

CVIČENIE 1.3. Nadnárodná korporácia vyrába limuzíny a terénne autá. Je známe, že jej typickí zákazníci sú muži a ženy s vysokým príjmom. Vedenie spoločnosti sa rozhodlo, že spustí masívnu reklamnú kampaň v televízii, aby zvýšilo predaj svojich vozidiel. Ich reklamné 1-minútové spoty sa budú púšťať v komédiách a v športových prenosoch. Každú reklamu v komédii bude vidieť 70-tisíc žien s vysokým príjmom a 20-tisíc mužov s vysokým príjmom. Každú reklamu počas športového prenosu bude vidieť 20-tisíc žien s vysokým príjmom a 120-tisíc mužov s vysokým príjmom. Minútový spot počas komédie stojí 10 000 dolárov a minútový spot počas športového prenosu stojí 20 000 dolárov. Spoločnosť chce mať istotu, že jej reklamné spoty bude vidieť aspoň 280 tisíc žien s vysokým príjmom a aspoň 240-tisíc mužov s vysokým príjmom (keď potenciálny zákazník vidí dva spoty, počíta sa za dvoch). Sformulujte úlohu lineárneho programovania, ktorá rieši nároky firmy a na výstupe dá rozpis reklám minimalizujúci ich cenu. Následne graficky vyriešte túto úlohu.

CVIČENIE 1.4. Transformujte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania na úlohu v kanonickom tvare

$$\min z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5$$

$$\begin{array}{rrrrrrrl} \text{ak} & x_1 + & x_2 + & x_3 + & x_4 + & x_5 & \geq & 5 \\ & 2x_1 - & 3x_2 & & + 6x_4 & & = & -8 \\ & 3x_1 + & 3x_2 + & 2x_3 - & 2x_4 + & 6x_5 & \leq & 60 \\ & 6x_1 + & 7x_2 & & - \ x_4 & & \leq & 45 \\ & 2x_1 & & & + \ x_4 + & 5x_5 & \geq & 7 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_4 \geq 0 \qquad x_3, x_5 \in \mathbb{R}$$

2 SIMPLEXOVÝ ALGORITMUS

Simplexový algoritmus je postup, ktorým sa dá vyriešiť ľubovoľná úloha lineárneho programovania. Schématicky ho možno zapísať nasledujúco:

Krok 0 (inicializácia): Úlohu lineárneho programovania prevedieme na úlohu v kanonickom tvare. Všetky koeficienty a premenné zapíšeme do tabuľky.

Krok 1: Ak je súčasné riešenie optimálne, skončíme. V opačnom prípade nájdeme v tabuľke jeden koeficient, ktorý nazývame pivot, a elimináciou zodpovedajúceho stĺpca zostrojíme novú tabuľku. Potom sa opäť vrátime na krok 1.

Podrobnejšie vysvetlíme tento algoritmus na príklade.

PRÍKLAD 2.1. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 &\le 4 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

RIEŠENIE. Najprv transformujeme problém na úlohu lineárneho programovania v kanonickom tvare, čiže pridáme nové premenné $v_1, v_2, v_3 \ge 0$.

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + 2x_2 + v_1 &= 10 \\ x_1 + x_2 + v_2 &= 6 \\ x_1 + v_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, v_1, v_2, v_3 \ge 0$$

Teraz zapíšeme **úvodnú simplexovú tabuľku**. V prvom riadku tejto tabuľky budú zoradené všetky premenné. Do riadkov v strednej časti tabuľky zapíšeme koeficienty rovníc, a to tak, že každý koeficient bude v stĺpci tej premennej, pri ktorej stojí. Na pravej strane za čiarou budú pravé strany príslušných rovníc. Na ľavú stranu zapíšeme premenné, ktoré sú eliminované, čiže v im zodpovedajúcom stĺpci je len jeden koeficient nenulový a tento má hodnotu 1 (premenná sa vyskytuje v tom riadku, v ktorom je hodnota 1). Premenné na ľavej strane nazývame **bázické**, pretože tvoria **bázu** súčasného riešenia. Do spodného riadku pod čiaru zapíšeme koeficienty účelovej funkcie v tvare

$$z - 2x_1 - 3x_2 = 0$$

Túto tabuľku interpretujeme tak, že všetky premenné s výnimkou bázických majú hodnotu nula. Hodnota bázických premenných je na pravej strane. To znamená, že v našej úvodnej tabuľke máme $v_1 = 10$, $v_2 = 6$, $v_3 = 4$, $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$. Podobne čítame aj posledný riadok, čiže $z = 0$.

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
v_1	1	2	1	0	0	10
v_2	1	1	0	1	0	6
v_3	1	0	0	0	1	4
z	-2	-3	0	0	0	0

Test optimálnosti. Ak sú všetky koeficienty v strednej časti posledného riadku simplexovej tabuľky nezáporné, tak je súčasné riešenie optimálne. V takom prípade je na pravej strane posledného riadku optimálna hodnota účelovej funkcie.

Ak súčasné riešenie nie je optimálne, tak si zvolíme jeden zo stĺpcov, v ktorom sa v poslednom riadku vyskytuje záporné číslo. V našom príklade si vyberieme druhý stĺpec (stĺpec premennej x_2). Teraz nájdeme minimum zo zlomkov $\frac{b_i}{a_{i,2}}$, čiže $\min\{\frac{10}{2}, \frac{6}{1}\}$ (koeficienty $a_{i,2} \leq 0$ neuvažujeme). Keďže minimom je $\frac{10}{2} = 5$, koeficient 2 v prvom riadku zakrúžkujeme. Tento koeficient sa nazýva **pivot** a vyššie opísaná voľba zaručuje, že koeficienty na pravej strane zostanú nezáporné.

Teraz budeme eliminovať čísla v druhom stĺpci ekvivalentnými riadkovými operáciami (Gaussovou eliminačnou metódou) tak, aby sa pivot zmenil na 1. Všimnime si, že ak je pivotom $a_{i,j}$, na pravej strane i-teho riadku je b_i a prvok posledného riadku v j-tom stĺpci je $-c_j$, tak hodnota účelovej funkcie sa zvýši o

$$c_j \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}},$$

čiže v našom prípade o $3 \cdot \frac{10}{2} = 15$. Dostávame novú simplexovú tabuľku, v ktorej sú hodnoty bázických premenných $x_2 = 5$, $v_2 = 1$ a $v_3 = 4$.

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	5
v_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	1
v_3	1	0	0	0	1	4
z	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	15

V tejto tabuľke je už len jeden stĺpec so zápornou hodnotou v poslednom riadku. Keďže $\min\{\frac{5}{1/2}, \frac{1}{1/2}, \frac{4}{1}\} = \frac{1}{1/2}$, tak pivot leží v druhom riadku. Po eliminovaní prvého stĺpca dostávame

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	0	1	1	-1	0	4
x_1	1	0	-1	2	0	2
v_3	0	0	1	-2	1	2
z	0	0	1	1	0	16

Keďže koeficienty v poslednom riadku sú nezáporné, podľa testu optimálnosti je súčasné riešenie optimálne. Simplexov algoritmus skončil. Optimálnym riešením našej úlohy je $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ ($v_3 = 2$) a $z = 16$. □

Tabuľku optimálneho riešenia nazývame **optimálna tabuľka**. Poznamenajme, že Príklad 2.1 je totožný s Príkladom 1.4. Tento sme v minulej kapitole vyriešili graficky. Všimnime si, že úvodná simplexová tabuľka zodpovedá bodu A z Obrázku 1, druhá tabuľka bodu E a optimálna tabuľka bodu D. V skutočnosti toto je princíp práce simplexovej metódy. Prechádzaním od jedného bázického riešenia k druhému, čiže od jednej simplexovej tabuľky k ďalšej, traverzujeme hrany akéhosi konvexného telesa v priestore (v našom prípade bol tento priestor dvojrozmerný), a jednotlivé stavy algoritmu (tabuľky) zodpovedajú vrcholom tohoto telesa.

V nasledujúcom príklade si ukážeme, ako sa dá rozpoznať, že daná úloha má nekonečne veľa riešení.

Príklad 2.2. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 \qquad &\le 3 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Riešenie. Pridaním nových premenných $v_1, v_2, v_3 \ge 0$ prevedieme úlohu na kanonický tvar a postupom, ktorý sme opísali v Príklade 2.1, zostrojíme úvodnú simplexovú tabuľku

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
v_1	1	1	1	0	0	4
v_2	1	0	0	1	0	3
v_3	0	1	0	0	1	2
z	-1	-1	0	0	0	0

V poslednom riadku máme dve záporné čísla, takže máme dve možnosti na výber stĺpca. Vyberme si prvý. Keďže $\min\{\frac{4}{1}, \frac{3}{1}\} = \frac{3}{1}$, pivot je v druhom riadku. Eliminovaním ostatných prvkov v prvom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
v_1	0	1	1	−1	0	1
x_1	1	0	0	1	0	3
v_3	0	1	0	0	1	2
z	0	−1	0	1	0	3

Teraz máme v poslednom riadku jediné záporné číslo, takže si zvolíme druhý stĺpec. Keďže $\min\{\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\} = \frac{1}{1}$, pivot je v prvom riadku. Eliminovaním ostatných prvkov v druhom stĺpci dostaneme

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	0	1	1	−1	0	1
x_1	1	0	0	1	0	3
v_3	0	0	−1	1	1	1
z	0	0	1	0	0	4

Táto tabuľka je optimálna, avšak v poslednom riadku máme 0 aj v stĺpci nebázickej premennej v_2. Toto nám indikuje, že úloha má nekonečne veľa riešení. To preto, lebo môžeme zaviesť v_2 medzi bázické premenné a hodnota účelovej funkcie sa zvýši o $c_j \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}} = 0 \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}} = 0$. Keďže $\min\{\frac{3}{1}, \frac{1}{1}\} = \frac{1}{1}$, náš pivot je v treťom riadku. Eliminovaním prvkov vo štvrtom stĺpci dostávame ďalšie optimálne riešenie

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	0	1	0	0	1	2
x_1	1	0	1	0	−1	2
v_2	0	0	−1	1	1	1
z	0	0	1	0	0	4

V prvom optimálnom riešení sme mali $x_1 = 3$ a $x_2 = 1$, zatiaľ čo druhým optimálnym riešením je $x_1 = 2$ a $x_2 = 2$. Porovnajte riešenia, ktoré sme získali simplexovým algoritmom, s grafickým riešením Príkladu 2.2 (pozri stranu 9). □

Poznamenajme, že ak sú $A_1, A_2, \dots, A_k$ všetky optimálne bázické riešenia úlohy lineárneho programovania, čiže ak sú $A_1, A_2, \dots, A_k$ všetky možmé konečné stavy tabuľky získané simplexovým algoritmom, tak prípustné riešenie A je optimálnym práve vtedy, keď je **konvexnou kombináciou** riešení $A_1, A_2, \dots, A_k$. To znamená, že A je optimálnym riešením práve vtedy, keď existujú čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ také, že

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot A_i = A \qquad \text{a} \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

a $0 \leq \lambda_i \leq 1$ pre každé $i = 1, 2, \dots, k$.

Teraz opíšeme, ako sa dá pomocou simplexového algoritmu nahliadnuť, že daná úloha má prípustné, avšak nemá optimálne riešenie.

Príklad 2.3. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 - x_2 &\le 2 \\ -x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Riešenie. Pridaním nových premenných $v_1, v_2 \ge 0$ prevedieme úlohu na kanonický tvar a zostrojíme úvodnú simplexovú tabuľku

	x_1	x_2	v_1	v_2	
v_1	1	-1	1	0	2
v_2	-1	1	0	1	3
z	-1	-1	0	0	0

V poslednom riadku máme dve záporné čísla, takže máme dve možnosti na výber stĺpca. Vyberieme si prvý. Keďže v tomto stĺpci je jediné kladné číslo, toto číslo je pivotom. Eliminovaním ostatných prvkov v prvom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	v_1	v_2	
x_1	1	-1	1	0	2
v_2	0	0	1	1	5
z	0	-2	1	0	2

Táto tabuľka nie je optimálna, lebo v poslednom riadku je v druhom stĺpci záporné číslo. Avšak v tomto stĺpci nevieme vybrať pivota, pretože nemáme k dispozícii kladný koeficient. To nám indikuje, že hoci má daná úloha prípustné riešenie, nemá optimálne riešenie. □

Úlohy lineárneho programovania, ktoré sme prezentovali v Príkladoch 2.1, 2.2 a 2.3, sú veľmi špeciálne. Vo všetkých troch prípadoch sme zavedením nových premenných v_1, v_2 a v_3 ihneď získali bázické prípustné riešenie (čiže bázu), v ktorom bola hodnota všetkých pôvodných premenných 0.

Ak zavedením nových premenných nezískame bázu, tak do úlohy zavedieme **umelé premenné**. Pridanie týchto premenných môže prekrútiť význam pôvodných rovníc, a preto spočiatku musíme minimalizovať novú účelovú funkciu, ktorá je súčtom umelých premenných. Keď na tento súčet aplikujeme simplexový algoritmus a minimum novej účelovej funkcie bude 0, získame prípustné riešenie. Môžeme vynechať novú účelovú funkciu s umelými premennými a pokračovať klasickým simplexovým algoritmom. Ak je však minimum novej účelovej funkcie (ktorá je súčtom umelých premenných) väčšie ako 0, tak úloha nemá prípustné riešenie. Keďže pri tomto postupe riešime dve úlohy lineárneho programovania, nazývame ho **dvojfázový simplexový algoritmus**.

Uvedený postup opäť vysvetlíme na príklade.

Príklad 2.4. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 \\
\text{ak} \quad 2x_1 + 4x_2 + x_3 &\leq 100 \\
x_1 + 5x_3 + x_4 &\leq 200 \\
x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 200 \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 150 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Riešenie. Najprv transformujeme problém na kanonický tvar pridaním nových premenných. Získame ohraničenia

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + x_3 + v_1 &= 100 \\
x_1 + 5x_3 + x_4 + v_2 &= 200 \\
x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 200 \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 150 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, v_1, v_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

V prvých dvoch riadkoch máme premenné v_1 a v_2, ktoré sú vhodné na úvodnú bázu. Aby sme ju skompletizovali, pridáme umelé premenné p_1 a p_2 do zvyšných dvoch riadkov

$$\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 + x_3 + v_1 &= 100 \\
x_1 + 5x_3 + x_4 + v_2 &= 200 \\
x_2 + 4x_3 + 2x_4 + p_1 &= 200 \\
x_1 + x_2 + x_4 + p_2 &= 150 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, v_1, v_2, p_1, p_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Získali sme bázu, avšak jej zodpovedajúcu simplexovú tabuľku interpretujeme $v_1 = 100$, $v_2 = 200$, $p_1 = 200$ a $p_2 = 150$, čo nie je prípustné riešenie danej úlohy lineárneho programovania. Preto budeme v prvej fáze minimalizovať $q = p_1 + p_2$, čo je ekvivalentné maximalizácii výrazu $-q = -p_1 - p_2$. Keďže premenné majú byť na jednej strane rovnice (pozri začiatok riešenia Príkladu 2.1), potrebujeme tento výraz zapísať v tvare $-q + p_1 + p_2 = 0$. Problém je, že p_1 aj p_2 musia byť eliminované aj z posledného riadku. Preto určíme hodnoty p_1 a p_2 z posledných dvoch rovníc a získané výrazy dosadíme za p_1 a p_2 do rovnice $-q + p_1 + p_2 = 0$. Keďže

$$\begin{aligned}
p_1 &= \quad - x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 200 && \text{a} \\
p_2 &= -x_1 - x_2 \quad - x_4 + 150, && \text{tak platí} \\
p_1 + p_2 &= -x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 + 350 && \text{a po dosadení} \\
-q - x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= -350
\end{aligned}$$

Dostávame úvodnú simplexovú tabuľku

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	p_1	p_2	
v_1	2	4	1	0	1	0	0	0	100
v_2	1	0	5	1	0	1	0	0	200
p_1	0	1	4	2	0	0	1	0	200
p_2	1	1	0	1	0	0	0	1	150
z	-2	2	-5	-1	0	0	0	0	0
$-q$	-1	-2	-4	-3	0	0	0	0	-350

Teraz budeme pokračovať simplexovým algoritmom, pričom určujúcim je posledný riadok. V tomto riadku sú štyri záporné čísla. Podľa simplexového algoritmu si môžeme vybrať ľubovoľný z týchto štyroch stĺpcov so záporným koeficientom v poslednom riadku. Vyberieme si štvrtý (pripomeňme, že hodnota účelovej funkcie vzrastie o $c_j \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}}$). Keďže $\min\{\frac{200}{1}, \frac{200}{2}, \frac{150}{1}\} = \frac{200}{2}$, pivot je v treťom riadku. Eliminovaním ostatných prvkov vo štvrtom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	p_1	p_2	
v_1	2	4	1	0	1	0	0	0	100
v_2	1	$-\frac{1}{2}$	3	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	100
x_4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
p_2	1	$\frac{1}{2}$	-2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	50
z	-2	$\frac{5}{2}$	-3	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
$-q$	-1	$-\frac{1}{2}$	2	0	0	0	$\frac{3}{2}$	0	-50

Teraz nájdeme pivota v prvom stĺpci, lebo v tomto stĺpci je v poslednom riadku záporné číslo. Keďže $\min\{\frac{100}{2}, \frac{100}{1}, \frac{50}{1}\} = \frac{100}{2} = \frac{50}{1}$, pivota môžeme zvoliť v prvom, alebo vo štvrtom riadku. Lepšou voľbou je štvrtý riadok, lebo pri jeho výbere dostaneme z bázy preč poslednú umelú premennú p_2. Napriek tomu vyberieme horšiu možnosť, aby sme demonštrovali možné komplikácie simplexového algoritmu. Eliminovaním ostatných prvkov v prvom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	p_1	p_2	
x_1	1	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	50
v_2	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	50
x_4	0	$\frac{1}{2}$	2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	100
p_2	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
z	0	$\frac{13}{2}$	-2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	200
$-q$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0

Teraz $-q$ dosiahlo teoretické maximum 0, čiže obidve umelé premenné p_1 a p_2 majú hodnotu 0. To znamená, že riešenie $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ a $x_4 = 100$ je prípustné. Problém je, že p_2 zostalo v báze. Preto nemôžeme z tabuľky vynechať posledný riadok a stĺpce zodpovedajúce umelým premenným p_1 a p_2. V ďalšom kroku sme nútení vyhodiť p_2 z bázy, hoci tým narušíme štandardný postup simplexového algoritmu.

Pripomeňme, že hodnota účelovej funkcie vzrastie o $c_j \cdot \frac{b_i}{a_{i,j}}$. Z toho dôvodu zvolíme pivota vo štvrtom riadku, v ktorom máme $b_4 = 0$. Táto voľba pri následnej eliminácii nezmení žiadne číslo z pravej strany, takže čísla na pravej strane zostanú nezáporné. Eliminovaním tretieho stĺpca dostávame

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	p_1	p_2	
x_1	1	$\frac{17}{10}$	0	0	$\frac{4}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	50
v_2	0	-4	0	0	-1	1	-1	1	50
x_4	0	$-\frac{7}{10}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{5}$	100
x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
z	0	$\frac{77}{10}$	0	0	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{9}{10}$	$-\frac{4}{5}$	200
$-q$	0	0	0	0	0	0	1	1	0

Teraz sú obidve umelé premenné p_1 a p_2 mimo bázy (čo značí, že ich hodnoty sú 0), takže im zodpovedajúce stĺpce môžeme z tabuľky vynechať a vynecháme aj posledný riadok. Dostávame tabuľku

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_1	v_2	
x_1	1	$\frac{17}{10}$	0	0	$\frac{4}{10}$	0	50
v_2	0	-4	0	0	-1	1	50
x_4	0	$-\frac{7}{10}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	100
x_3	0	$\frac{3}{5}$	1	0	$\frac{1}{5}$	0	0
z	0	$\frac{77}{10}$	0	0	$\frac{7}{5}$	0	200

V poslednom riadku sú už len nezáporné čísla, čo znamená, že riešenie $x_1 = 50$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 100$ a $z = 200$ je nielen prípustné, ale aj optimálne. $\square$

Ak je na pravej strane simplexovej tabuľky v nejakom (avšak nie v poslednom) riadku 0, tak simplexový algoritmus **degeneruje**. Toto pôsobí veľké problémy, a práve táto degenerácia má za následok, že je simplexový algoritmus v niektorých prípadoch veľmi pomalý. (Presnejšie, simplexový algoritmus je v najhoršom prípade exponenciálny.) Avšak toto je jediná nevýhoda simplexového algoritmu.

Cvičenia

Cvičenie 2.1. Vyriešte nasledujúcu úlohu lineárneho programovania graficky aj simplexovým algoritmom.

$$\begin{aligned}
\max z &= x_1 + x_2 \\
\text{ak} \quad x_2 &\le 6 \\
2x_1 + x_2 &\le 8 \\
3x_1 + 4x_2 &\le 25 \\
x_1 &\le 7 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

Cvičenie 2.2. Vyriešte nasledujúce úlohy lineárneho programovania simplexovým algoritmom.

a)
$$\begin{aligned}
\max z &= 5x_1 + x_2 + 3x_3 \\
\text{ak} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 6 \\
5x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\le 15 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\max z &= 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\
\text{ak} \quad 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &\le 12{,}000 \\
x_1 + x_2 + 4x_3 &\le 8000 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
\min z &= -3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\
\text{ak} \quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7 \\
x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
\max z &= 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\
\text{ak} \quad x_1 + 3x_3 &\le 5 \\
x_1 + 2x_2 &\ge 2 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

Cvičenie 2.3. Vyriešte nasledujúce úlohy lineárneho programovania simplexovým algoritmom

a)
$$\begin{aligned}
\min z &= x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{ak} \quad 2x_1 + x_3 &\le 10 \\
x_1 + 4x_3 &\le 9 \\
x_1 - 3x_2 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\min z &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\
\text{ak} \quad x_1 - 4x_2 + x_3 &\le 2 \\
x_1 + 3x_2 &\le 3 \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &\ge 3 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}$$

c) $\max z = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad 2x_1 + x_2 \qquad &\le 5 \\ x_1 \qquad + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &\ge 7 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

d) $\max z = x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + x_2 - 3x_3 &\ge 2 \\ x_1 + x_2 \qquad &\le 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &\le 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

CVIČENIE 2.4. Spoločnosť vyrába štyri druhy výrobkov a výroba každého z nich vyžaduje tri typy činností. Počty hodín týchto činností potrebných na výrobu jednotlivých výrobkov, ako aj celkové množstvo hodín k dispozícii a cena výrobkov, sú zobrazené v nasledujúcej tabuľke.

	výrobok 1	výrobok 2	výrobok 3	výrobok 4	celkovo
činnosť 1	4	6	3	6	3000
činnosť 2	2	1	1	3	1100
činnosť 3	2	1	2	1	900
cena	18	21	13	25	

Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorej riešením bude plán produkcie maximalizujúci zisk, a vyriešte túto úlohu simplexovým algoritmom.

CVIČENIE 2.5. Pokúste sa vyriešiť nasledujúcu úlohu pomocou simplexového algoritmu

$$\min z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 5 \\ 2x_1 + 3x_2 \qquad + 6x_4 \qquad &= 12 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &\le 60 \\ 6x_1 + 7x_2 \qquad - x_4 \qquad &\ge 45 \\ 2x_1 \qquad + x_4 + 5x_5 &\ge 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \quad \text{a} \quad x_5 &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

3 APLIKÁCIE LINEÁRNEHO PROGRAMOVANIA

Pri riešení problémov z praxe je najdôležitejšia a obyčajne najťažšia úlohoa nájdenie vhodného matematického modelu. V tejto kapitole opíšeme niekoľko matematických modelov na riešenie praktických problémov, ktoré sú všetky úlohy lineárneho programovania. Príklady v tejto kapitole sú komplexnejšie, a preto ich neodporúčame riešiť simplexovým algoritmom „ručne“. Možno ich riešiť počítačom, napríklad v systéme Mathematica jednoduchými príkazmi Maximize, respektíve Minimize (v starších verziách príkazmi ConstrainedMax, respektíve Constrained-Min).

V niektorých úlohách je vhodné, aby boli premenné celočíselné. Keďže celočíselným lineárnym programovaním sa zaoberáme až v kapitole 6, problematiku celočíselnosti spomenieme iba okrajovo. Vo väčšine úloh necháme na čitateľa, aby sa zamyslel, či je možné uspokojivo interpretovať racionálne riešenie.

Plánovanie výroby

Najtypickejšia úloha lineárneho programovania je problém nájdenia plánu výroby, ktorý pri daných obmedzeniach na zdroje maximalizuje zisk. Túto úlohu sme vo všeobecnej forme uviedli v kapitole 1, v Príklade 1.1.

Príklad 3.1. Malá firma vyrába dva typy opaskov, jeden klasický a druhý luxusný. Na výrobu každého z týchto opaskov sa spotrebuje 0,05 metra štvorcového kože. Na výrobu klasického modelu je potrebných 15 minút práce, zatiaľ čo luxusný model si vyžaduje hodinu práce. Každý týždeň je k dispozícii 10 štvorcových metrov kože a 80 hodín práce. Klasický model sa predáva po 3 a luxusný po 4 eurá za kus. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorú môže firma použiť na maximalizáciu zisku. (Predpokladáme, že prácu aj materiál má firma dopredu zazmluvnené, čiže tieto predstavujú fixné náklady. Z toho dôvodu stačí maximalizovať výnos.)

RIEŠENIE. Ako sme už uviedli v kapitole 1, zodpovedajúcou úlohou lineárneho programovania je

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 4x_2 \\ \text{ak} \quad 0{,}05x_1 + 0{,}05x_2 &\le 10 \\ 0{,}25x_1 + \phantom{0{,}05}x_2 &\le 80 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Premenná x_1 reprezentuje počet klasických a x_2 počet luxusných opaskov, ktoré má firma týždenne vyrábať. Prvá nerovnica je ohraničenie na množstvo kože, zatiaľ čo druhá je ohraničenie na pracovné hodiny. □

Všimnime si, že úloha z Príkladu 3.1 je skôr problémom celočíselného lineárneho programovania ako lineárneho programovania. Ak má totiž firma v optimálnom riešení vyrobiť napríklad 132,5 klasických opaskov týždenne, tak toto nemusí znamenať 132 celých opaskov a jeden spolovice dokončený (s tým, že opasok sa dokončí v ďalšom týždni a za 2 týždne sa vyrobí 265 opaskov), kvôli ohraničeniam na materiál. Nie je zrejmé, či je na začiatku výroby opasku nutné mať všetku kožu potrebnú na jeho výrobu.

Problém diéty

Problém plánovania výroby viedol k maximalizačnej úlohe lineárneho programovania, v ktorej boli všetky koeficienty nezáporné a všetky ohraničenia mali tvar nerovností „$\le$“. Podobný problém je problém diéty, ktorý je typickým minimalizačným problémom a v ktorom majú všetky ohraničenia tvar „$\ge$“. Tento problém sme vo všeobecnej forme uviedli v kapitole 1 v Príklade 1.2.

PRÍKLAD 3.2. Predpokladajme, že študent má „sladkú“ diétu. Podľa tejto diéty môže jesť iba čokoládové koláčiky, čokoládovú zmrzlinu, kolu a krémeše. V nasledujúcej tabuľke je uvedená cena v centoch) a nutričný obsah (na kus) v týchto produktoch.

	cena	kalórie	kakao	cukor	tuk
koláčik	100	400	3	2	2
zmrzlina	40	200	2	2	4
kola	60	150	0	4	1
krémeš	160	500	0	4	5

Každý deň musí študent skonzumovať aspoň 6 jednotiek kakaa, 10 jednotiek cukru a 9 jednotiek tuku, pričom jeho poživeň musí mať aspoň 500 kalórií. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorá vytvorí z vyššie uvedených produktov najlacnejší plán diéty, pokrývajúci všetky študentove nároky.

RIEŠENIE. Ak označíme

$x_1 =$ počet denne konzumovaných čokoládových koláčikov
$x_2 =$ počet denne konzumovaných čokoládových zmrzlín
$x_3 =$ počet denne konzumovaných fliaš koly
$x_4 =$ počet denne konzumovaných krémešov

tak zodpovedajúcou úlohou lineárneho programovania je nasledujúci minimalizačný problém

$$\min z = 100x_1 + 40x_2 + 60x_3 + 160x_4$$

$$\begin{array}{lrrrrcr} \text{ak} & 400x_1+ & 200x_2+ & 150x_3+ & 500x_4 & \geq & 500 \\ & 3x_1+ & 2x_2 & & & \geq & 6 \\ & 2x_1+ & 2x_2+ & 4x_3+ & 4x_4 & \geq & 10 \\ & 2x_1+ & 4x_2+ & x_3+ & 5x_4 & \geq & 9 \end{array}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Prvá nerovnica je ohraničenie na kalórie, druhá na kakao, tretia na cukor a posledná na tuk. □

Poznamenajme, že problém diéty je duálny k problému plánovania výroby, pozri kapitolu 4.

Problém plánovania práce

PRÍKLAD 3.3. Poštový úrad potrebuje v rôzne dni rôzne počty zamestnancov pri priehradkách: v pondelok 16 zamestnancov, v utorok 13, v stredu 14, vo štvrtok 15, v piatok 16, v sobotu 16 a v nedeľu 10. Títo zamestnanci musia byť zamestnaní na plný úväzok a odborové pravidlá vyžadujú, aby každý zamestnanec pracoval päť po sebe nasledujúcich dní, po ktorých bude mať dva dni voľna. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorú môže poštový úrad využiť na optimalizáciu počtu zamestnancov.

RIEŠENIE. Kľúčovú úlohu v tomto probléme zohráva správna voľba premenných. Ak označíme x_i počet zamestnancov začínajúcich prácu v i-tom dni (začínajúc pondelkom), dostávame nasledujúci model.

$$
\begin{array}{lllllllll}
\min z = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{ak} & x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 16 \\
& x_1 & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 13 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & & & +x_6 & +x_7 & \geq 14 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & +x_7 & \geq 15 \\
& x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & \geq 16 \\
& & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & \geq 16 \\
& & & x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +x_7 & \geq 10
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 \qquad \square$$

Poznamenajme, že Príklad 3.3 je úlohou celočíselného lineárneho programovania, pretože racionálne riešenie nevieme interpretovať. Pri neceločíselnom riešení nemôžeme jednoducho zaokrúhliť zlomky, lebo takto získané riešenie vonkoncom nemusí byť optimálne (nemusí byť ani len prípustné, pozri Príklad 6.1).

Problém zmesi

Problémy, v ktorých sa tovary získajú zmiešaním rozličných vstupov (surovín) v rozličných pomeroch, nazývame **problémy zmesí**.

Príklad 3.4. Spoločnosť vyrába tri typy benzínov (benzín 1, benzín 2 a benzín 3). Každý z týchto typov sa získa zmiešaním troch typov surovín (surovina 1, surovina 2 a surovina 3). Nákupné ceny surovín (v dolároch za barel), ich oktánové čísla a obsah síry sú zaznačené v nasledujúcej tabuľke.

	nákupná cena	oktánové číslo	obsah síry
surovina 1	45	12	0.5 %
surovina 2	35	6	2.0 %
surovina 3	25	8	3.0 %

Spoločnosť môže nakúpiť nanajvýš 5000 barelov každej suroviny denne.

Vyrábané typy benzínov sa získajú zmiešaním troch surovín. Predajné ceny (v dolároch za barel), minimálne oktánové čísla a maximálny obsah síry sú uvedené v tabuľke.

	predajná cena	oktánové číslo	obsah síry
benzín 1	70	10	1 %
benzín 2	60	8	2 %
benzín 3	50	6	1 %

Výroba jedného barelu benzínu z jedného barelu suroviny stojí spoločnosť 4 doláre a jej rafinéria môže vyrobiť nanajvýš 14 000 barelov benzínu denne. Zákazníci vyžadujú 2500 barelov benzínu 1 denne, 2000 barelov benzínu 2 a 1000 barelov benzínu 3. Spoločnosť musí zabezpečiť tieto požiadavky, avšak môže stimulovať ďalší dopyt reklamou. Odhaduje sa, že každý dolár minutý na reklamu ľubovoľného z vyrábaných typov benzínu zvýši dopyt po tomto benzíne o desať barelov. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorej riešenie zabezpečí firme maximálny denný zisk.

Riešenie. Spoločnosť musí spraviť dva typy rozhodnutí. Potrebuje sa rozhodnúť, koľko treba investovať do reklamy jednotlivých druhov benzínu a ako zmiešať suroviny pri výrobe benzínov. Preto zavedieme dva typy premenných

$$\begin{aligned} a_i &= \text{ suma (v dolároch) minutá denne na reklamu benzínu } i,\ 1 \le i \le 3 \\ x_{ij} &= \text{ množstvo barelov suroviny } i \text{ použité pri výrobe benzínu } j,\ 1 \le i, j \le 3 \end{aligned}$$

Potom denný príjem z predaja benzínov bude

$$70(x_{11} + x_{21} + x_{31}) + 60(x_{12} + x_{22} + x_{32}) + 50(x_{13} + x_{23} + x_{33}).$$

Ak označíme C_1 denné náklady na nákup suroviny, C_2 denné náklady na reklamu a C_3 denné náklady na výrobu, tak

$$\begin{aligned} &C_1 = 45(x_{11} + x_{12} + x_{13}) + 35(x_{21} + x_{22} + x_{23}) + 25(x_{31} + x_{32} + x_{33}), \\ &C_2 = a_1 + a_2 + a_3, \\ &C_3 = 4(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33}). \end{aligned}$$

Keďže profit je rozdielom príjmov a nákladov, máme maximalizovať funkciu

$$21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} + 41x_{31} + 31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3.$$

Ohraničenia sú troch typov. Prvé tri rovnice zabezpečia, že sa predá všetko čo sa vyrobí, pričom dopyt je navýšený o extra dopyt zabezpečený reklamou. Nasledujú tri ohraničenia na zdroje surovín. Siedma nerovnica reprezentuje kapacitu rafinérie a len päť posledných ohraničení reprezentuje zmiešavanie. Napríklad, keďže oktánové číslo benzínu 1 musí byť aspoň 10, čo znamená

$$\frac{12x_{11} + 6x_{21} + 8x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \ge 10,$$

tak

$$2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{31} \ge 0.$$

Podobne možno získať aj ďalšie ohraničenia reprezentujúce zmiešavanie. Keďže všetky suroviny majú oktánové číslo aspoň 6, požiadavka na oktánové číslo je pre benzín 3 splnená vždy a príslušné ohraničenie nemusíme uvažovať. Teda zodpovedajúcou úlohou lineárneho programovania je

$$
\begin{aligned}
\max z = 21x_{11} + 11x_{12} + x_{13} + 31x_{21} + 21x_{22} + 11x_{23} + \\
+ 41x_{31} + 31x_{32} + 21x_{33} - a_1 - a_2 - a_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{ak} \qquad x_{11} + x_{21} + x_{31} - 10a_1 &= 2\,500\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} - 10a_2 &= 2\,000\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} - 10a_3 &= 1\,000\\
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\le 5\,000\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\le 5\,000\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\le 5\,000\\
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} &\le 14\,000\\
2x_{11} - 4x_{21} - 2x_{31} &\ge 0\\
4x_{12} - 2x_{22} &\ge 0\\
-0{,}005x_{11} + 0{,}01x_{21} + 0{,}02x_{31} &\le 0\\
-0{,}015x_{12} + 0{,}01x_{32} &\le 0\\
-0{,}005x_{13} + 0{,}01x_{23} + 0{,}02x_{33} &\le 0\\
x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, a_1, a_2, a_3 &\ge 0 \qquad \square
\end{aligned}
$$

Problém výrobného postupu

PRÍKLAD 3.5. Spoločnosť vyrába dva druhy parfémov, parfém 1 a parfém 2. Surovina potrebná na výrobu týchto parfémov sa nakupuje za 3 doláre za libru. Spracovanie jednej libry suroviny si vyžaduje jednu hodinu laboratórneho času a poskytne 3 unce parfému 1 a 4 unce parfému 2. Parfém 1 sa predáva po 7 dolárov za uncu, zatiaľ čo parfém 2 sa predáva po 6 dolárov za uncu. Spoločnosť nemusí parfémy 1 a 2 okamžite predať, môže ich ďalej spracovať na luxusný parfém 1*, ktorý sa predáva po 17 dolárov za uncu, a luxusný parfém 2*, ktorý sa predáva po 14 dolárov za uncu. Každá unca parfému 1 sa dá spracovať na jednu uncu parfému 1*, pričom toto spracovanie si vyžaduje 3 hodiny laboratórneho času a 4 doláre. Podobne, každá unca parfému 2 sa dá spracovať na jednu uncu parfému 2*, pričom toto spracovanie si vyžaduje 2 hodiny laboratórneho času a 4 doláre. Každý rok má spoločnosť k dispozícii 6000 hodín laboratórneho času a môže nakúpiť nanajvýš 4000 libier suroviny. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorú môže spoločnosť použiť na maximalizáciu zisku. (Predpokladáme, že náklady, ktoré sme tu nespomenuli, sú fixné.)

Riešenie. Zavedieme päť premenných

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{množstvo parfému 1 (v unciach) vyrobené za rok} \\ x_2 &= \text{množstvo parfému 1* (v unciach) vyrobené za rok} \\ x_3 &= \text{množstvo parfému 2 (v unciach) vyrobené za rok} \\ x_4 &= \text{množstvo parfému 2* (v unciach) vyrobené za rok} \\ x_5 &= \text{množstvo suroviny (v librách) nakúpené za rok} \end{aligned}$$

Profit získame ak od príjmov z predaja parfémov odpočítame náklady na spracovanie a nákup suroviny.

$$7x_1 + 17x_2 + 6x_3 + 14x_4 - (4x_2 + 4x_4) - 3x_5 = 7x_1 + 13x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5$$

Teda zodpovedajúcou úlohou lineárneho programovania je

$$\begin{aligned} \max z = 7x_1 + 13x_2 + 6x_3 + 10x_4 - 3x_5 & \\ \text{ak} \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 &\le 4000 \\ 3x_2 \quad + 2x_4 + \ x_5 &\le 6000 \\ x_1 + \ x_2 \qquad\qquad - 3x_5 &= \quad 0 \\ x_3 + \ x_4 - 4x_5 &= \quad 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

Prvá nerovnica je ohraničením zdrojov suroviny a druhá je ohraničením laboratórneho času. Keďže každá libra suroviny sa spracuje na 3 unce parfému 1 a 4 unce parfému 2 (ktoré môžu byť ďalej spracované na parfém 1^* a parfém 2^*), tak platí

$$x_1 + x_2 = 3x_5 \qquad \text{a} \qquad x_3 + x_4 = 4x_5,$$

čo vysvetľuje zostávajúce dve rovnice. □

Dynamické problémy v lineárnom programovaní

Najzložitejšími problémami sú tie, ktoré zahŕňajú viacero časových intervalov. Takéto problémy nazývame **dynamické**. Vyznačujú sa tým, že rozhodovanie prebieha vo viacerých časových obdobiach, pričom rozhodnutie prijaté skôr ovplyvňuje rozhodnutia prijaté neskôr.

Príklad 3.6. Spoločnosť vyrábajúca člny musí prijať rozhodnutie, koľko člnov má vyrobiť v nasledujúcich štyroch kvartáloch. Má zákazky na 40 člnov v prvom štvrťroku, 60 člnov v druhom štvrťroku, 70 člnov v treťom štvrťroku a 30 člnov vo štvrtom štvrťroku. Požadované člny musí vyrobiť načas. Na začiatku roka je na sklade 10 člnov. V úvode každého kvartálu sa spoločnosť musí rozhodnúť, koľko člnov vyrobí v tomto štvrťroku, pričom predpokladáme, že vyrobené člny sa môžu použiť na pokrytie dopytu za tento štvrťrok a môžu sa okamžite vyexpedovať. Spoločnosť dokáže každý štvrťrok vyrobiť 40 člnov po 400 €, pričom tieto člny sú vyrobené počas riadneho pracovného času. Člny však môžu byť vyrobené aj počas nadčasov, lenže v tom prípade ich výroba stojí 450 € za kus. Ak má spoločnosť na sklade nejaké člny ešte aj na konci štvrťroku, tak ich preskladovanie stojí 25 € za každý jeden čln. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorá bude minimalizovať náklady spoločnosti za obdobie nasledujúcich štyroch štvrťrokov.

Riešenie. Zavedieme tri typy premenných

$$\begin{aligned} x_i &= \text{počet člnov vyrobených v riadnom pracovnom čase v } i\text{-tom štvrťroku} \\ y_i &= \text{počet člnov vyrobených v nadčasoch počas } i\text{-teho štvrťroku} \\ z_i &= \text{počet člnov na sklade na konci } i\text{-teho štvrťroku} \end{aligned}$$

pričom $i = 1, 2, 3, 4$. Účelová funkcia je súčtom nákladov na výrobu člnov v riadnom pracovnom čase, na výrobu člnov v nadčasoch a nákladov za skladovanie. Teda zodpovedajúcou úlohou lineárneho programovania je

$$\begin{aligned} \min z = 400x_1 + 400x_2 + 400x_3 + 400x_4 + 450y_1 + 450y_2 + \\ + 450y_3 + 450y_4 + 25z_1 + 25z_2 + 25z_3 + 25z_4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcccc} \text{ak} & x_1 \le 40, & x_2 \le 40, & x_3 \le 40, & x_4 \le 40 \\ & \multicolumn{2}{c}{z_1 = 10 + x_1 + y_1 - 40,} & \multicolumn{2}{c}{z_2 = z_1 + x_2 + y_2 - 60} \\ & \multicolumn{2}{c}{z_3 = z_2 + x_3 + y_3 - 70,} & \multicolumn{2}{c}{z_4 = z_3 + x_4 + y_4 - 30} \\ & \multicolumn{4}{c}{x_i, y_i, z_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)} \end{array}$$

Prvé štyri nerovnice ohraničujú počet člnov vyrobených v riadnom pracovnom čase, zatiaľ čo nasledujúce rovnice určujú počty člnov na sklade na konci jednotlivých kvartálov. □

Dynamické finančné modely

Príklad 3.7. Americká firma potrebuje určiť investičnú stratégiu na obdobie nasledujúcich troch rokov. V súčasnosti (v čase 0) má k dispozícii 100 000 dolárov a môže sa rozhodnúť pre investície 1, 2, 3, 4 a 5. Vstupy a výstupy jednotlivých investícií (prepočítané na jeden investovaný dolár) sú dané v tabuľke:

	čas 0	čas 1	čas 2	čas 3
investícia 1	−1	+0,5	+1	0
investícia 2	0	−1	+0,5	+1
investícia 3	−1	+1,2	0	0
investícia 4	−1	0	0	+1,8
investícia 5	0	0	−1	+1,2

V tejto tabuľke pod vstupom rozumieme vklad (má záporné znamienko) a pod výstupom rozumieme výnos (ten má kladné znamienko). Aby bola zabezpečená diverzifikácia portfólia spoločnosti, tak do každej investície je možné vložiť nanajvýš 75 000 dolárov. Každý rok možno uložiť istú sumu peňazí do banky, pričom ročný úrok je 8%. Akonáhle spoločnosť získa nejaké peniaze ako výstup z investícií 1 až 5 alebo z banky, môže ich ihneď opätovne investovať. Zostavte úlohu lineárneho programovania maximalizujúcu množstvo peňazí v čase 3.

Riešenie. Zavedieme dva typy premenných

$$\begin{aligned} x_i &= \text{množstvo dolárov vložených do investície } i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ y_i &= \text{množstvo dolárov vložených do banky v čase } i,\ i = 0, 1, 2 \end{aligned}$$

Príslušnou úlohou lineárneho programovania je

$$\begin{aligned} \max z = x_2 + 1{,}8x_4 + 1{,}2x_5 + 1{,}08y_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_3 + x_4 + y_0 = 100\,000 \\ 0{,}5x_1 + 1{,}2x_3 + 1{,}08y_0 = x_2 + y_1 \\ x_1 + 0{,}5x_2 + 1{,}08y_1 = x_5 + y_2 \\ x_1 \le 75\,000 \\ x_2 \le 75\,000 \\ x_3 \le 75\,000 \\ x_4 \le 75\,000 \\ x_5 \le 75\,000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_0, y_1, y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Účelová funkcia vyjadruje zisk z investícií v čase 3. Prvá rovnica opisuje investície v čase 0, druhá investície (včítane investovania ziskov) v čase 1 a tretia opisuje investície v čase 2. Zostávajúce nerovnice obmedzujú vklady do jednotlivých investícií sumou 75 000 dolárov. □

Dynamický problém plánovania práce

Príklad 3.8. Firma prevádzkuje sieť poradenských miest, zaoberajúcu sa inštaláciou počítačových systémov. V priebehu nasledujúcich piatich mesiacov bude potrebovať technikov, ktorí odpracujú 6000 hodín v prvom mesiaci, 7000 hodín v druhom mesiaci, 8000 hodín v treťom mesiaci, 9500 hodín vo štvrtom mesiaci a 11 500 hodín v piatom mesiaci.

Na začiatku prvého mesiaca pracuje vo firme 50 technikov, pričom každý technik môže pracovať nanajvýš 160 hodín za mesiac. Aby firma pokryla rastúci dopyt, potrebuje vyškoliť nových technikov. Vyškolenie nového technika trvá jeden mesiac a na jeho vzdelávanie je potrebných 50 hodín pracovného času už vyškoleného technika. Každý vyškolený technik dostáva plat 1000 € za mesiac, a to aj vtedy, keď pracuje menej ako 160 hodín. Školený pracovník dostáva plat 500 € za mesiac.

Na konci každého mesiaca odíde z firmy 5 % technikov do softvérovej spoločnosti. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorej riešenie bude firme minimalizovať mzdové náklady a zabezpečí pokrytie dopytu na nasledujúcich päť mesiacov.

Riešenie. Zavedieme dva typy premenných

$$\begin{aligned} x_i &= \text{počet vyškolených technikov na začiatku } i\text{-teho mesiaca} \\ y_i &= \text{počet technikov školených počas } i\text{-teho mesiaca} \end{aligned}$$

pričom $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Potom zodpovedajúcou úlohou lineárneho programovania je

$$\begin{aligned} \min z = {} & 1000x_1 + 1000x_2 + 1000x_3 + 1000x_4 + 1000x_5 + \\ & + 500y_1 + 500y_2 + 500y_3 + 500y_4 + 500y_5 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lrr} \text{ak} & 160x_1 - 50y_1 \geq 6\,000 & x_1 = 50 \\ & 160x_2 - 50y_2 \geq 7\,000 & 0{,}95x_1 + y_1 = x_2 \\ & 160x_3 - 50y_3 \geq 8\,000 & 0{,}95x_2 + y_2 = x_3 \\ & 160x_4 - 50y_4 \geq 9\,500 & 0{,}95x_3 + y_3 = x_4 \\ & 160x_5 - 50y_5 \geq 11\,500 & 0{,}95x_4 + y_4 = x_5 \end{array}$$

$$x_i, y_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5)$$

Nerovnice na ľavej strane zabezpečujú dopyt firmy, zatiaľ čo rovnice na pravej strane definujú počty vyškolených technikov. □

Poznamenajme, že manažér firmy by v predchádzajúcom príklade očakával celočíselné riešenie. To však nie je možné už kvôli formulácii úlohy, pretože znižovanie vyškolených technikov „presne“ o 5 % spôsobí, že sa počty technikov rýchlo stanú desatinnými číslami. Takže v tomto prípade nie je problém v lineárnom programovaní, ale vo formulácii úlohy. Ďalším problémom je, že v optimálnom riešení bude $y_5 = 0$ z dôvodu nulových požiadaviek na ďalší rok. Interpretáciu tohoto problému ponechávme na čitateľa.

Cvičenia

Cvičenie 3.1. V údolí pri rieke sú tri továrne (továreň 1, továreň 2 a továreň 3) a každá továreň vypúšťa do rieky dva typy znečistenia (znečistenie 1 a znečistenie 2). Spracovaním odpadu z jednotlivých tovární možno znížiť znečistenie rieky. Cena za spracovanie jednej tony odpadu z továrne 1 je 20 € a každá spracovaná tona odpadu zníži znečistenie 1 o 0,2 tony a znečistenie 2 o 0,45 tony. Cena za spracovanie jednej tony odpadu z továrne 2 je 15 € a každá spracovaná tona odpadu zníži znečistenie 1 o 0,3 tony a znečistenie 2 o 0,25 tony. Cena za spracovanie jednej tony odpadu z továrne 3 je 30 € a každá spracovaná tona odpadu zníži znečistenie 1 o 0,4 tony a znečistenie 2 o 0,3 tony. Vláda má ambíciu znížiť obsah znečistenia 1 v rieke minimálne o 30 ton a obsah znečistenia 2 aspoň o 40 ton. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorá minimalizuje náklady na zníženie znečistenia rieky o požadované množstvá.

Cvičenie 3.2. Spoločnosť vyrábajúca automobily má k dispozícii 120 000 € na reklamnú kampaň. Rozhodla sa inzerovať v novinách aj v televízii. Avšak čím viac využije určité médium, tým menej efektívna bude každá ďalšia reklama. V nižšie uvedenej tabuľke máme odhadovaný počet nových zákazníkov oslovených reklamou. Každá reklama v novinách stojí 1000 € a každá reklama v televízii stojí 10 000 €. Spoločnosť dokáže efektívne umiestniť nanajvýš 30 reklám v novinách a nanajvýš 15 reklám v televízii. Zostavte úlohu lineárneho programovania maximalizujúcu počet nových zákazníkov oslovených reklamou.

noviny		televízia	
reklamy	zákazníci	reklamy	zákazníci
1–10	900	1–5	10 000
11–20	600	6–10	5 000
21–30	300	11–15	2 000

Cvičenie 3.3. Polícia v malom mestečku potrebuje nasledujúce počty policajtov počas dňa: 8 v čase $0^{00} - 4^{00}$, 6 v čase $4^{00} - 8^{00}$, 9 v čase $8^{00} - 12^{00}$, 10 v čase $12^{00} - 16^{00}$, 12 v čase $16^{00} - 20^{00}$ a 10 v čase $20^{00} - 24^{00}$. Každý policajt pracuje dve po sebe nasledujúce štvorhodinové etapy. Zostavte úlohu lineárneho programovania minimalizujúcu počet policajtov v mestečku.

Cvičenie 3.4. Banka sa snaží určiť, ako má investovať tohoročné aktíva. V súčasnosti má k dispozícii 500 000 dolárov, ktoré môže investovať do obligácií, poistenia nemovitostí, havarijného poistenia a do životných poistiek. Je známe, že ročná návratnosť každej z týchto investícií je: 11 % v prípade obligácií, 16 % pre poistenie nemovitostí, 13 % pre havarijné poistenie a 19 % pre životné poistky. Z dôvodu, aby portfólio banky nebolo príliš riskantné, sa vedenie rozhodlo pre nasledujúce obmedzenia:

(1) Suma investovaná do životných poistiek nemôže prevýšiť sumu investovanú do obligácií.
(2) Suma investovaná do poistenia nemovitostí nemôže prevýšiť sumu investovanú do havarijného poistenia.
(3) Nanajvýš 25 % z celkovej sumy možno investovať do životných poistiek.

Zostavte úlohu lineárneho programovania maximalizujúcu ročnú návratnosť.

Cvičenie 3.5. Nábytkársky podnik vyrába stoly a stoličky. Na stôl sú potrebné 4 a na stoličku 2 štvorcové metre dreva. Drevo sa dá nakúpiť po 5 € za meter štvorcový, pričom podnik môže zakúpiť 1000 metrov štvorcových. Na výrobu čiastočne dokončeného stola sú potrebné 3 hodiny práce, pričom na jeho úplné dokončenie treba ďalšie 4 hodiny práce. Na výrobu čiastočne dokončenej stoličky sú potrebné 3 hodiny práce, pričom na jej úplné dokončenie treba ďalšie 3 hodiny práce. K dispozícii je 8000 hodín práce, ktorá už bola zaplatená. Predajná cena za nedokončený stôl je 35 €, za dokončený stôl 65 €, za nedokončenú stoličku 25 € a za dokončenú stoličku 45 €. Zostavte úlohu lineárneho programovania, ktorá maximalizuje zisk z výroby stolov a stoličiek.

CVIČENIE 3.6. Počas nasledujúcich štyroch mesiacov požaduje odberateľ 50, 45, 100 a 70 jednotiek tovaru. Výrobné náklady počas týchto mesiacov sú 5 €, 8 €, 4€ a 7 € za jednotku tovaru. Preskladovanie z jedného mesiaca na druhý stojí 2 € za jednotku. Odhaduje sa, že všetok nadbytočný tovar sa na konci štvrtého mesiaca dokáže predať po 5 €. Zostavte úlohu lineárneho programovania minimalizujúcu náklady na obdobie najbližších štyroch mesiacov.

CVIČENIE 3.7. Ambiciózny študent druhého ročníka má k dispozícii 10 000 €. Na obdobie nasledujúcich troch rokov má možnosť investovať do troch investícií.

Inv. 1 Každé dnes investované € prinesie 0,10 o rok a 1,30 o tri roky.
Inv. 2 Každé dnes investované € prinesie 0,20 o rok a 1,10 o dva roky.
Inv. 3 Každé € investované o rok prinesie 1,50 o tri roky.

Počas každého roka možno neinvestované peniaze uložiť do banky, ktorá ponúka ročný úrok 7 %. Nanajvýš 5000 € možno vložiť do každej z investícií 1, 2 a 3. Zostavte úlohu lineárneho programovania maximalizijúcu študentov majetok o tri roky.

CVIČENIE 3.8. Poisťovňa odhaduje, že počas prvého polroka bude potrebovať nasledujúce počty osobných počítačov: v januári 9, vo februári 5, v marci 7, v apríli 9, v máji 10 a v júni 6. Počítače možno prenajať na obdobie jedného mesiaca za 50 € za kus, na obdobie dvoch mesiacov za 80 € za kus a na obdobie troch mesiacov za 100 € za kus. Zostavte úlohu lineárneho programovania minimalizujúcu náklady za nájom počítačov. Môžete predpokladať, že ak sa počítač prenajme na obdobie prekračujúce koniec júna, tak sa náklady proporcionálne prepočítajú. Napríklad ak sa počítač prenajme na tri mesiace na začiatku mája, tak jeho nájomné bude $\frac{2}{3} \cdot 100 = \frac{200}{3}$ €.

4 DUALITA 1

Definície

Predpokladajme, že máme úlohu lineárneho programovania

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & & \\
\text{ak} & a_{1,1}x_1 + \quad a_{1,2}x_2 + \ldots + \quad a_{1,n}x_n & \leq & b_1 \\
 & \vdots & & \\
 & a_{s,1}x_1 + \quad a_{s,2}x_2 + \ldots + \quad a_{s,n}x_n & \leq & b_s \\
 & a_{s+1,1}x_1 + a_{s+1,2}x_2 + \ldots + a_{s+1,n}x_n & = & b_{s+1} \\
 & \vdots & & \\
 & a_{m,1}x_1 + \quad a_{m,2}x_2 + \ldots + \quad a_{m,n}x_n & = & b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_r \geq 0 & &
\end{array}
\tag{1}
$$

Každú úlohu lineárneho programovania možno previesť na tvar (1). Aby sme dosiahli, že pre nejaké r platí $x_1, \ldots, x_r \geq 0$ a $x_{r+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, stačí poprehadzovať stĺpce a premenovať príslušné premenné. Poprehadzovaním riadkov vieme vynútiť, že existuje s také, že prvých s ohraničení sú nerovnice. Vynásobením číslom -1 vieme zabezpečiť, že všetky nerovnice budú mať tvar „$\leq$“ (všimnime si, že nepožadujeme nezápornosť pravej strany). Na záver, vynásobením účelovej funkcie číslom -1 vieme previesť minimalizačný problém na maximalizačný.

Úloha lineárneho programovania

$$
\begin{array}{lrcl}
 & \min z^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m & & \\
\text{ak} & a_{1,1}y_1 + \quad a_{2,1}y_2 + \ldots + \quad a_{m,1}y_m & \geq & c_1 \\
 & \vdots & & \\
 & a_{1,r}y_1 + \quad a_{2,r}y_2 + \ldots + \quad a_{m,r}y_m & \geq & c_r \\
 & a_{1,r+1}y_1 + a_{2,r+1}y_2 + \ldots + a_{m,r+1}y_m & = & c_{r+1} \\
 & \vdots & & \\
 & a_{1,n}y_1 + \quad a_{2,n}y_2 + \ldots + \quad a_{m,n}y_m & = & c_n \\
 & y_1, y_2, \ldots, y_s \geq 0 & &
\end{array}
\tag{2}
$$

je **duálna** k **primárnej** úlohe (1).

Duálnou úlohou k (2) je (1). To preto, lebo keď prenásobíme účelovú funkciu a všetky ohraničenia číslom -1, tak úloha (2) bude mať tvar (1). Teraz môžeme zostrojiť úlohu duálnu k (2). Keď však účelovú funkciu aj všetky ohraničenia práve zostrojenej úlohy prenásobíme -1, dostávame pôvodnú úlohu (1).

Nájdenie optimálneho riešenia pomocou duálnej úlohy

Platí nasledujúce tvrdenie:

VETA 4.1 (**veta o dualite**). *Pre každé prípustné riešenie úlohy (1) s hodnotou účelovej funkcie z a pre každé prípustné riešenie (2) s hodnotou účelovej funkcie z^* platí $z \leq z^*$. Ak má jedna z úloh (1) a (2) optimálne riešenie, tak má optimálne riešenie aj druhá úloha. Naviac, ak je z_{opt} hodnota optimálneho riešenia (1) a z^*_{opt} je hodnotou optimálneho riešenia (2), tak $z_{\text{opt}} = z^*_{\text{opt}}$.*

Z vety o dualite možno odvodiť, že ak existuje prípustné riešenie (1), avšak neexistuje optimálne riešenie tejto úlohy, tak duálna úloha (2) nemá prípustné riešenie. Samozrejme, toto tvrdenie platí aj naopak.

Vyriešme úlohu (1) simplexovým algoritmom. Ak v (1) platí $b_i \geq 0$ pre nejaké i, tak optimálne riešenie (2) sa nachádza v poslednom riadku výslednej simplexovej tabuľky. Presnejšie, ak je u bázická premenná v j-tom riadku úvodnej simplexovej tabuľky pre (1), tak optimálna hodnota premennej y_j bude v stĺpci premennej u (a v poslednom riadku) v optimálnej simplexovej tabuľke pre (1). Ak máme v úvodnej simplexovej tabuľke umelé premenné a chceme nájsť aj riešenie duálnej úlohy, tak umelé premenné v tabuľke ponecháme počas celého výpočtu.

Duálne úlohy možno použiť pri riešení minimalizačných problémov. V týchto problémoch sa zväčša vyskytujú nerovnice typu „$\geq$“, ktoré spôsobujú, že do simplexovej tabuľky musíme okrem premenných, ktorými zmeníme nerovnice na rovnice, zavádzať aj umelé premenné. Avšak v duálnej úlohe pôvodným nezáporným premenným zodpovedajú nerovnice typu „$\leq$“, pri ktorých zmena nerovníc na rovnice má za následok zostrojenie bázického prípustného riešenia.

Výhody tohoto postupu demonštrujeme na nasledujúcom príklade.

PRÍKLAD 4.1. Vyriešením duálnej úlohy nájdite riešenie problému

$$\begin{aligned}
\min z &= x_1 + 2x_2 \\
\text{ak} \quad x_1 + x_2 &\geq 4 \\
2x_1 + 4x_2 &\geq 10 \\
x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Riešenie. Ako sme vysvetlili vyššie, duálnou úlohou je

$$\begin{aligned} \max z^* &= 4y_1 + 10y_2 + 6y_3 \\ \text{ak} \quad & y_1 + 2y_2 + y_3 \le 1 \\ & y_1 + 4y_2 + 3y_3 \le 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

Pridaním nových premenných prevedieme úlohu na kanonický tvar

$$\begin{aligned} \max z^* &= 4y_1 + 10y_2 + 6y_3 \\ \text{ak} \quad & y_1 + 2y_2 + y_3 + v_1 = 1 \\ & y_1 + 4y_2 + 3y_3 + v_2 = 2 \\ & y_1, y_2, y_3, v_1, v_2 \ge 0 \end{aligned}$$

a zostrojíme úvodnú simplexovú tabuľku

	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	
v_1	1	2	1	1	0	1
v_2	1	4	3	0	1	2
z^*	-4	-10	-6	0	0	0

V tejto tabuľke sú tri záporné hodnoty v poslednom riadku, takže môžeme vybrať prvý, druhý alebo tretí stĺpec. Zvolíme si druhý, v ktorom je hodnota v poslednom riadku najnižšia. Keďže $\min\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}\} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, pivot môže byť v prvom aj v druhom riadku. Keď zvolíme pivota v prvom riadku, tak elimináciou dostávame novú tabuľku

	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	
y_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
v_2	-1	0	1	-2	1	0
z^*	1	0	-1	5	0	5

Teraz máme už len jednu zápornú hodnotu v poslednom riadku, a preto budeme hľadať pivota v treťom stĺpci. Keďže $\min\{\frac{1/2}{1/2}, \frac{0}{1}\} = \frac{0}{1}$, pivotom je 1 v druhom riadku. Elimináciou dostávame

	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	
y_2	1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_3	-1	0	1	-2	1	0
z^*	0	0	0	3	1	5

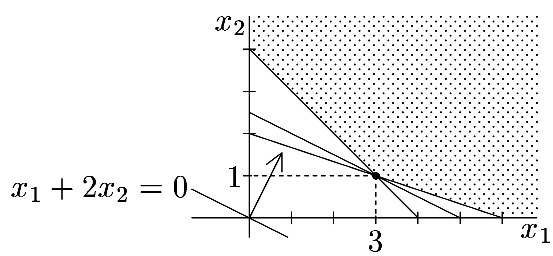
Táto tabuľka je optimálna, a keďže bázickými premennými úvodnej simplexovej tabuľky boli v_1 a v_2, tak riešením pôvodnej úlohy je $x_1 = 3$ a $x_2 = 1$ s hodnotou účelovej funkcie $z = 5$. □

Poznamenajme, že optimálna tabuľka v predchádzajúcom príklade indikuje, že duálna úloha má nekonečne veľa riešení. Zavedením y_1 do bázy dostávame nové optimálne riešenie duálnej úlohy $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 0$, $y_3 = \frac{1}{2}$ a $z^* = 5$

	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	
y_1	1	1	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
y_3	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
z^*	0	0	0	3	1	5

Pri prechode k tomuto riešeniu sme nezmenili posledný riadok, a teda ani riešenie primárnej úlohy.

Grafické riešenie Príkladu 4.1 je znázornené na Obrázku 2.



Obrázok 2

Duálny simplexový algoritmus

Duálny simplexový algoritmus je modifikáciou klasického simplexového algoritmu (pozri stranu 13). Aj tento algoritmus rieši maximalizačný problém, avšak nepostupuje cez prípustné riešenia primárnej, ale cez prípustné riešenia duálnej úlohy. Aby sme mohli postupovať cez prípustné riešenia duálnej úlohy potrebujeme, aby bol posledný riadok úvodnej simplexovej tabuľky nezáporný.

Test optimálnosti. Ak sú všetky čísla na pravej strane nezáporné, tak v tabuľke sú prípustné riešenia pre primárnu aj pre duálnu úlohu. Podľa vety o dualite sú tieto riešenia optimálne.

Ak súčasné riešenie nie je optimálne, zvolíme si riadok so zápornou pravou stranou. Povedzme, vyberieme si i-ty riadok. Teraz nájdeme minimum z čísel $\frac{c_j}{-a_{i,j}}$, pričom budeme uvažovať len záporné čísla $a_{i,j}$. Koeficient $a_{i,j}$, pre ktoré sa toto minimum dosahuje je **pivot** a elimináciu opäť prevádzame ekvivalentnými riadkovými operáciami. Poznamenajme, že vyššie opísaná voľba pivota zaručuje, že koeficienty v spodnom riadku zostanú nezáporné.

Duálnym simplexovým algoritmom možno riešiť minimalizačné problémy, ktoré majú v účelovej funkcii len nezáporné koeficienty, pretože pri zmene problému na maximalizačný sa v poslednom riadku objavia len nezáporné čísla. Avšak my budeme duálny simplexový algoritmus využívať najmä v celočíselnom lineárnom programovaní, pozri kapitolu 6.

PRÍKLAD 4.2. Vyriešte úlohu lineárneho programovania

$$\min z = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{array}{rl} \text{ak} & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

RIEŠENIE. Náš minimalizačný problém je ekvivalentný s maximalizačným

$$\max(-z) = -x_1 - 2x_2$$

$$\begin{array}{rl} \text{ak} & -x_1 + 2x_2 - x_3 + v_1 = -4 \\ & -2x_1 - x_2 + x_3 + v_2 = -6 \\ & x_1, x_2, x_3, v_1, v_2 \geq 0 \end{array}$$

V tejto úlohe sú v účelovej funkcii nekladné čísla, takže úlohu možno riešiť duálnym simplexovým algoritmom. Úvodnou tabuľkou je

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	
v_1	-1	2	-1	1	0	-4
v_2	-2	-1	1	0	1	-6
$-z$	1	2	0	0	0	0

Zvolíme si riadok so zápornou pravou stranou, povedzme druhý. Keďže platí $\min\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\} = \frac{1}{2}$, pivot je v prvom stĺpci. Ekvivalentnými riadkovými operáciami dostávame

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	
v_1	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	-1
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
$-z$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-3

Teraz si zvolíme prvý riadok. Keďže $\min\{\frac{1/2}{3/2}, \frac{1/2}{1/2}\} = \frac{1/2}{3/2}$, pivot je v treťom stĺpci. Eliminovaním ostatných čísel v treťom stĺpci dostávame

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	
x_3	0	$-\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
$-z$	0	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$

Získali sme prípustné riešenie primárnej úlohy, ktoré je hneď optimálne. V tomto riešení $x_1 = \frac{10}{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{2}{3}$ a $z = \frac{10}{3}$. □

Všimnime si, že riešenie pomocou duálneho simplexového algoritmu bolo v predchádzajúcom príklade vhodnejšie, ako riešenie pomocou duálnej úlohy (ktoré sme použili v Príklade 4.1). To preto, lebo duálna úloha má tri ohraničenia, a teda v simplexovej tabuľke by sme mali trojprvkovú bázu.

Tieňové ceny

Tieňová cena i-teho ohraničenia je hodnotou, o ktorú sa vylepší optimálna hodnota účelovej funkcie, ak zvýšime pravú stranu b_i o jednu jednotku. V modeli plánovania výroby tieňová cena vyjadruje, koľko je firma ochotná zaplatiť za každú jednotku i-teho tovaru, ktorú dostane naviac. (Problémom, koľko jednotiek i-teho tovaru je firma ochotná zakúpiť, sa zaoberáme v kapitole 5.)

Tieňová cena i-teho ohraničenia sa rovná hodnote y_i v optimálnom riešení duálneho problému. To znamená, že tieňové ceny nájdeme v optimálnej simplexovej tabuľke.

Príklad 4.3. Nájdite tieňové ceny úlohy lineárneho programovania

$$\begin{aligned}
&\max z = 2x_1 + 3x_2 \\
&\text{ak} \quad x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 6 \\
&\qquad x_1 \le 4 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

Riešenie. Táto úloha je totožná s úlohou z Príkladov 1.4 a 2.1. Keďže úvodnou simplexovou tabuľkou je

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
v_1	1	2	1	0	0	10
v_2	1	1	0	1	0	6
v_3	1	0	0	0	1	4
z	-2	-3	0	0	0	0

tieňové ceny sú v posledných troch stĺpcoch optimálnej simplexovej tabuľky

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_2	0	1	1	-1	0	4
x_1	1	0	-1	2	0	2
v_3	0	0	1	-2	1	2
z	0	0	1	1	0	16

Teda tieňová cena prvého ohraničenia je 1, tieňová cena druhého ohraničenia je opäť 1 a tieňová cena tretieho ohraničenia je 0. □

Keďže tieňová cena tretieho ohraničenia v Príklade 4.3 je 0, toto ohraničenie je splnené ostrou nerovnicou pre optimálne riešenie, pozri bod D v Obrázku 1.

Cvičenia

CVIČENIE 4.1. K nasledujúcej úlohe lineárneho programovania zostrojte duálnu.

$$\begin{aligned} \max z &= -2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_1 \qquad - 2x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_3 &\ge 2 \\ x_1, x_3 \ge 0 \quad &\text{a} \quad x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

CVIČENIE 4.2. Vyriešením duálnej úlohy nájdite optimálne riešenia úloh lineárneho programovania

a)
$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\ge 4 \\ x_2 - x_3 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\ge 4 \\ x_2 - x_3 &\le 2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

CVIČENIE 4.3. Vyriešením duálnej úlohy nájdite optimálne riešenie problému z Príkladu 3.2.

CVIČENIE 4.4. Simplexovou metódou vyriešte problém z Príkladu 3.1 a nájdite tieňové ceny.

CVIČENIE 4.5. Simplexovým algoritmom nájdite riešenie nižšie uvedenej úlohy lineárneho programovania. Potom zostrojte duálnu úlohu a opäť nájdite jej riešenie simplexovým algoritmom. Porovnajte výsledné simplexové tabuľky.

$$\begin{aligned} \max z = x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 - 3x_3 &\geq 2 \\ x_1 + x_2 \qquad &\leq 5 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cvičenie 4.6. Duálnym simplexovým algoritmom nájdite riešenia nasledujúcich úloh lineárneho programovania. V týchto problémoch netreba zavádzať žiadne nové premenné. Prípad a) už obsahuje bázu, zatiaľ čo prípad b) ju bude obsahovať ak použijete vhodné ekvivalentné riadkové operácie.

a)
$$\begin{aligned} \min z = x_1 + 3x_2 + 5x_4 \\ \text{ak} \quad x_1 - 3x_2 \qquad - x_4 &= -4 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min z = x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 \\ \text{ak} \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cvičenie 4.7. Duálnym simplexovým algoritmom vyriešte nasledujúce úlohy lineárneho programovania

a)
$$\begin{aligned} \max z = -2x_1 - x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 - 2x_2 &\geq 8 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min z = x_1 + 2x_3 \\ \text{ak} \quad -x_1 + x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cvičenie 4.8. Malá firma vyrába dva výrobky. Výrobok 1 sa predáva po 30 € za kus a výrobok 2 sa predáva po 50 € za kus. Na výrobu každého z týchto výrobkov je potrebná surovina, kvalifikovaná a nekvalifikovaná práca:

	výrobok 1	výrobok 2
surovina	1 jednotka	2 jednotky
kvalifikovaná práca	3 hodiny	4 hodiny
nekvalifikovaná práca	2 hodiny	3 hodiny

Firma má k dispozícii 30 jednotiek suroviny, 100 hodín kvalifikovanej práce a 70 hodín nekvalifikovanej práce. Zostavte úlohu lineárneho programovania maximalizujúcu výnos. Vyriešte túto úlohu a nájdite tieňové ceny.

5 ANALÝZA SENZITIVITY

Označenia

V tejto kapitole budeme používať nasledujúci príklad

Príklad 5.1. Nábytkárska firma vyrába stoly, lavice a stoličky. Na výrobu každého druhu nábytku je potrebná surovina (drevené dosky) a dva druhy práce (tesárska a finalizačná). Množstvá týchto zdrojov potrebné na výrobu jedného kusu nábytka sú zaznačené v nasledujúcej tabuľke

	stôl	lavica	stolička
drevené dosky	8 m^2	6 m^2	1 m^2
tesárska práca	4 hodiny	2 hodiny	1,5 hodiny
finalizačná práca	2 hodiny	1,5 hodiny	0,5 hodiny

V súčasnosti má firma k dispozícii 50m^2 dosiek, 20 hodín tesárskej práce a 8 hodín finalizačnej práce. Stoly sa predávajú po 60 €, lavice po 30 € a stoličky po 20 € za kus. Zostavte plán produkcie maximalizujúci výnos.

Riešenie. Problém zapíšeme ako maximalizačnú úlohu lineárneho programovania

$$
\begin{aligned}
\max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\
\text{ak}\quad 8x_1 + 6x_2 + x_3 &\le 50 \\
4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 &\le 20 \\
2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 &\le 8 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

kde x_1, x_2 a x_3 sú množstvá stolov, lavíc a stoličiek.

Úvodnou simplexovou tabuľkou je

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	
v_1	8	6	1	1	0	0	50
v_2	4	2	1,5	0	1	0	20
v_3	2	1,5	0,5	0	0	1	8
z	-60	-30	-20	0	0	0	0

a optimálnou simplexovou tabuľkou je

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	
v_1	0	-2	0	1	2	-8	26
x_3	0	-2	1	0	2	-4	8
x_1	1	1,25	0	0	$-0{,}5$	1,5	2
z	0	5	0	0	10	10	280

takže riešením je $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$ a $z = 280$. $\square$

Budeme používať tieto označenia

$\boldsymbol{x}_b$: stĺpec bázických premenných z optimálnej simplexovej tabuľky;
$\boldsymbol{x}_n$: stĺpec nebázických premenných z optimálnej simplexovej tabuľky;
$\boldsymbol{a}_j$: j-ty stĺpec koeficientov úvodnej simplexovej tabuľky;
$\boldsymbol{b}$: stĺpec pravej strany úvodnej simplexovej tabuľky;
$\mathbb{A}_b$: štvorcová matica stĺpcov $\boldsymbol{a}_j$ úvodnej simplexovej tabuľky, ktoré zodpovedajú premenným $\boldsymbol{x}_b$;
$\mathbb{A}_n$: matica stĺpcov $\boldsymbol{a}_j$ úvodnej simplexovej tabuľky, ktoré zodpovedajú premenným $\boldsymbol{x}_n$;
$\boldsymbol{c}_b$: riadok koeficientov účelovej funkcie zodpovedajúci premenným $\boldsymbol{x}_b$;
$\boldsymbol{c}_n$: riadok koeficientov účelovej funkcie zodpovedajúci premenným $\boldsymbol{x}_n$.

V našom príklade

$$\boldsymbol{x}_b = \begin{pmatrix} v_1 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x}_n = \begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{a}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A}_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1{,}5 & 4 \\ 0 & 0{,}5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbb{A}_n = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}_b = (0, 20, 60) \qquad \boldsymbol{c}_n = (30, 0, 0)$$

Základné vzorce

Všimnime si, že úvodná simplexová tabuľka má tvar

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_b \cdot \boldsymbol{x}_b + \mathbb{A}_n \cdot \boldsymbol{x}_n &= \boldsymbol{b} \\ z - \boldsymbol{c}_b \cdot \boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{c}_n \cdot \boldsymbol{x}_n &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

V každom kroku simplexového algoritmu je matica, ktorá zodpovedá bázickým premenným, jednotková. Jedna jednotková matica je v úvodnej a jedna v optimálnej simplexovej tabuľke, pričom tá druhá zodpovedá premenným $\boldsymbol{x}_b$. Keďže simplexový algoritmus využíva iba ekvivalentné riadkové operácie, analogicky ako Gauss-Jordanova metóda výpočtu inverznej matice, tak na pozícii jednotkovej matice úvodnej simplexovej tabuľky bude $\mathbb{A}_b^{-1}$ v optimálnej tabuľke. V našom príklade

$$\mathbb{A}_b^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}$$

Keďže v stĺpcoch zodpovedajúcich $\boldsymbol{x}_b$ sme zostrojili jednotkovú maticu, tak podľa (1) má optimálna simplexová tabuľka tvar

$$\mathbb{A}_b^{-1} \cdot \mathbb{A}_b \cdot \boldsymbol{x}_b + \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \mathbb{A}_n \cdot \boldsymbol{x}_n = \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$$

čiže

$$\boldsymbol{x}_b + \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \mathbb{A}_n \cdot \boldsymbol{x}_n = \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Keďže posledný riadok sa získa pridaním násobkov riadkov strednej časti tabuľky k poslednému riadku (tak, že v stĺpcoch zodpovedajúcich $\boldsymbol{x}_b$ sú nuly), tak posledný riadok optimálnej tabuľky získame pridaním $\boldsymbol{c}_b$ násobku (2) k (1). Teda

$$z + (\boldsymbol{c}_b \cdot \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \mathbb{A}_n - \boldsymbol{c}_n) \cdot \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{c}_b \cdot \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \boldsymbol{b}. \tag{3}$$

V ďalšom rozoberieme problém, v akých intervaloch sa majú pohybovať koeficienty úlohy lineárneho programovania, aby optimálnou bázou zostalo $\boldsymbol{x}_b$. Poznamenajme, že každý koeficient uvažujeme osobitne, a teda výsledky nemožno kombinovať.

Všimnime si, že báza záverečnej simplexovej tabuľky zostane optimálnou práve vtedy, keď zostanú nezápornými pravá strana a posledný riadok tabuľky.

Zmena koeficientu účelovej funkcie

Tieto koeficienty sa vyskytujú len vo výraze (3), takže jedinou podmienkou, ktorá sa môže narušiť, je nezápornosť posledného riadku.

Ak budeme v našom príklade uvažovať koeficient nebázickej premennej c_2, tak

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c}_b \cdot \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \mathbb{A}_n - \boldsymbol{c}_n = \\ &= (0, 20, 60) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (c_2, 0, 0) = \\ &= (0, 20, 60) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1{,}25 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} - (c_2, 0, 0) = \\ &= (35, 10, 10) - (c_2, 0, 0) = (35 - c_2, 10, 10). \end{aligned}$$

Výsledný vektor bude nezáporný práve vtedy, keď $35 - c_2 \geq 0$. Teda $\boldsymbol{x}_b$ zostane optimálnou bázou ak $c_2 \leq 35$.

Teraz uvažujme koeficient bázickej premennej c_1. Potom

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{c}_b \cdot \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \mathbb{A}_n - \boldsymbol{c}_n = \\
&= (0, 20, c_1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (30, 0, 0) = \\
&= (0, 20, c_1) \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -8 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1{,}25 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} - (30, 0, 0) = \\
&= (1{,}25c_1 - 40,\ 40 - 0{,}5c_1,\ 1{,}5c_1 - 80) - (30, 0, 0) = \\
&= (1{,}25c_1 - 70;\ 40 - 0{,}5c_1;\ 1{,}5c_1 - 80).
\end{aligned}
$$

Výsledný vektor bude nezáporný práve vtedy, keď $1{,}25c_1 \geq 70$, $0{,}5c_1 \leq 40$ a $1{,}5c_1 \geq 80$, čiže keď $c_1 \geq 56$, $c_1 \leq 80$ a $c_1 \geq \frac{160}{3}$. Teda $\boldsymbol{x}_b$ zostane optimálnou bázou ak $56 \leq c_1 \leq 80$.

Zmena koeficientu pravej strany

Zmena koeficientu pravej strany neovplyvňuje posledný riadok, a teda takáto zmena môže ovplyvniť iba nezápornosť pravej strany. Preto jedinou podmienkou, ktorú musíme preveriť, je $\mathbb{A}_b^{-1} \cdot \boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$, pozri (2).

Ak budeme v našom príklade uvažovať koeficient b_2, tak dostávame

$$
\mathbb{A}_b^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ b_2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_2 - 14 \\ 2b_2 - 32 \\ 12 - 0{,}5b_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

čiže $b_2 \geq 7$, $b_2 \geq 16$ a $b_2 \leq 24$. Teda $\boldsymbol{x}_b$ zostane optimálnou bázou práve vtedy, keď $16 \leq b_2 \leq 24$.

Zmena koeficientu v stĺpci nebázickej premennej

Predpokladajme, že j-ty stĺpec zodpovedá nebázickej premennej a uvažujme zmenu koeficientu v tomto stĺpci. Z (2) a (3) vidno, že takáto zmena ovplyvní iba posledný riadok optimálnej simplexovej tabuľky, a teda jedinou podmienkou, ktorú musíme overiť, je $\boldsymbol{c}_b \cdot \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \boldsymbol{a}_j - c_j \geq 0$.

Ak budeme v našom príklade uvažovať koeficient $a_{2,2}$ (množstvo stolárskej práce potrebnej na výrobu lavice), tak dostávame

$$\boldsymbol{c}_b \cdot \mathbb{A}_b^{-1} \cdot \boldsymbol{a}_2 - c_2 = (0, 20, 60) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ a_{2,2} \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - 30 =$$

$$= (0, 10, 10) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ a_{2,2} \\ 1{,}5 \end{pmatrix} - 30 = 10a_{2,2} - 15 \geq 0.$$

To znamená, že $\boldsymbol{x}_b$ zostane optimálnou bázou ak $a_{2,2} \geq 1{,}5$.

Je možné uvažovať aj zmenu koeficientu v stĺpci bázickej premennej. Táto zmena je trošičku komplikovanejšia, pretože zahŕňa zmenu inverznej matice $\mathbb{A}_b^{-1}$, a preto sa ňou v tomto texte nezaoberáme.

Ďalšou možnosťou je pridanie nového výrobku. Tento výrobok sa nevyskytuje v optimálnej báze $\boldsymbol{x}_b$, a teda túto zmenu možno riešiť analogicky ako zmenu koeficientu v stĺpci nebázickej premennej.

Cvičenia

Cvičenie 5.1. V Príklade 5.1 zistite pre aké hodnoty koeficientu $a_{1,2}$, ktorý predstavuje množstvo drevených dosiek potrebné na výrobu lavice, zostane optimálnou bázou $(v_1, x_3, x_1)^T$. Výsledok vysvetlite pomocou tieňových cien. Podobnú analýzu preveďte aj pre ostatné koeficienty z druhého stĺpca.

Cvičenie 5.2. Uvažujte nasledujúcu maximalizačnú úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6 \\ 6x_1 \qquad + x_3 &\leq 8 \\ x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

a jej optimálnu simplexovú tabuľku

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	
v_1	0	$\frac{1}{6}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	3
x_1	1	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
z	0	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	9

Pre každý koeficient účelovej funkcie nájdite intervaly, pre ktoré zostane optimálnou bázou $(v_1, x_1, x_3)^T$.

Cvičenie 5.3. Uvažujte nasledujúcu maximalizačnú úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 + x_2 - x_3 & \\ \text{ak} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 &\leq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

a jej optimálnu simplexovú tabuľku

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	
x_2	0	1	3	2	-1	6
x_1	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
z	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	9

Pre každý koeficient z pravej strany nájdite intervaly, pre ktoré zostane $(x_2, x_1)^T$ optimálnou bázou.

Cvičenie 5.4. Malá firma dokáže vyrábať tri typy čokoládových tyčiniek. Každá z tyčiniek pozostáva z cukru a čokolády. Obsah týchto surovín a zisk (v centoch) sú uvedené v tabuľke

	cukor	čokoláda	zisk
tyčinka 1	30g	60	8
tyčinka 2	30g	90	13
tyčinka 3	30g	30	6

V súčasnosti je k dispozícii 1,5kg cukru a 3kg čokolády. Simplexovým algoritmom nájdite taký plán výroby, ktorý maximalizuje zisk. Potom pre každý koeficient (s výnimkou bázických koeficientov $a_{i,j}$) nájdite interval, pre ktorý sa báza optimálneho riešenia nezmení.

Cvičenie 5.5. Vyriešte úlohy lineárneho programovania pomocou simplexového algoritmu, pričom na začiatku výpočtu zavediete umelé premenné. Potom pre každý koeficient účelovej funkcie a pravej strany nájdite rozsah, pri ktorom sa nezmení báza optimálneho riešenia.

a)

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 & \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 50 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\geq 15 \\ x_1 + x_2 \quad\quad &= 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max z = -4x_1 - x_2 & \\ \text{ak} \quad 4x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 3 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Cvičenie 5.6. Vyriešte príklad z Cvičenia 1.3 duálnym simplexovým algoritmom. Potom pre každý koeficient účelovej funkcie a pravej strany nájdite rozsah, pri ktorom sa nezmení báza optimálneho riešenia.

Cvičenie 5.7. Spoločnosť vyrába tri typy lôpt, a to klasické lopty, veľké lopty a tvrdé lopty. Pre každú loptu je potrebné najprv nastrihať materiál, potom ho zošiť a nakoniec treba loptu zabaliť. Časy (v minútach) pre každý typ lopty a cena sú uvedené v tabuľke

	strihanie	šitie	balenie	cena
klasická lopta	10	15	3	3 €
veľká lopta	15	15	4	5 €
tvrdá lopta	8	6	2	2 €

Z obchodných dôvodov je potrebné vyrobiť aspoň 1000 klasických lôpt. V súčasnosti je k dispozícii 300 hodín na strihanie, 300 hodín na šitie a 150 hodín na balenie. Simplexovým algoritmom nájdite plán výroby maximalizujúci výnos. Potom pre každý koeficient účelovej funkcie a pravej strany nájdite rozsah, pri ktorom sa nezmení báza optimálneho riešenia.

6 CELOČÍSELNÉ LINEÁRNE PROGRAMOVANIE

Definície

V niektorých problémoch vyžadujeme, aby bolo riešenie celočíselné. Napríklad, zrejme nie je možné zamestnať v dielni 2,35 robotníkov, respektíve postaviť 1,5 požiarnych staníc.

Problém lineárneho programovania, v ktorom musia byť všetky premenné celočíselné, nazývame **úloha celočíselného lineárneho programovania**.

V tejto kapitole opíšeme dva algoritmy riešiace úlohu celočíselného lineárneho programovania, pričom obidva sú založené na duálnom simplexovom algoritme.

Orezávací algoritmus

Postup vysvetlíme na príklade.

Príklad 6.1. Vyriešte úlohu celočíselného lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 8x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\le 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\le 45 \\ x_1, x_2 \ge 0; &\quad x_1, x_2 \text{ celočíselné} \end{aligned}$$

Riešenie. Najprv vyriešime tento príklad ako úlohu lineárneho programovania. Po pridaní pomocných premenných v_1 a v_2 simplexovým algoritmom dostávame

	x_1	x_2	v_1	v_2	
x_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{165}{4}$

Získali sme riešenie zodpovedajúcej úlohy lineárneho programovania. Keby bolo celočíselné, mohli by sme skončiť. Keďže však toto riešenie nie je celočíselné, musíme k obmedzeniam zodpovedajúcej úlohy lineárneho programovania pridať ďalšie obmedzenie, a síce požiadavku celočíselnosti premenných. Je zrejmé, že pridaním ďalšej podmienky nemôžeme získať riešenie s vyššou hodnotou účelovej funkcie ako $\frac{165}{4} = 41{,}25$. To znamená, že získané riešenie úlohy lineárneho programovania nám stanovilo hornú medzu na z. V nasledujúcom opisujeme prácu orezávacieho algoritmu.

Zvolíme si riadok simplexovej tabuľky, v ktorom hodnota premennej nie je celočíselná. Povedzme, zvolíme si druhý riadok

$$x_2 - \tfrac{5}{4}v_1 + \tfrac{1}{4}v_2 = \tfrac{15}{4}$$

a prepíšeme ho tak, že každý koeficient nahradíme súčtom dvoch čísel, z ktorých jedno bude celé a druhé bude zlomkom z intervalu $\langle 0, 1)$ (zdôrazňujeme, že tento zlomok musí byť nezáporný).

$$x_2 - 2v_1 + \tfrac{3}{4}v_1 + 0v_2 + \tfrac{1}{4}v_2 = 3 + \tfrac{3}{4}.$$

Všetky členy s celočíselnými koeficientami dáme na ľavú a členy, ktorých koeficienty sú zlomky, dáme na pravú stranu rovnice

$$x_2 - 2v_1 + 0v_2 - 3 = -\tfrac{3}{4}v_1 - \tfrac{1}{4}v_2 + \tfrac{3}{4}.$$

Teraz pridáme nové ohraničenie, ktoré bude tvrdiť, že pravá strana nie je kladná

$$-\tfrac{3}{4}v_1 - \tfrac{1}{4}v_2 + \tfrac{3}{4} \leq 0.$$

Pridaním novej nezápornej premennej v_3 zmeníme nerovnicu na rovnicu a pridáme ju do simplexovej tabuľky. Táto tabuľka bude mať posledný riadok nezáporný, avšak bude mať zápornú hodnotu na pravej strane

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{15}{4}$
v_3	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{165}{4}$

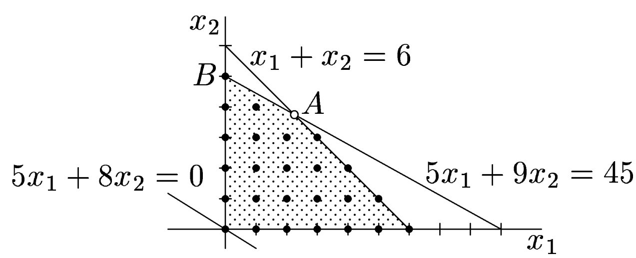
Tabuľka je duálne prípustná (má nezáporný posledný riadok), a preto budeme pokračovať duálnym simplexovým algoritmom. Jediným riadkom so zápornou pravou stranou je tretí riadok, a keďže $\min\{\frac{5/4}{3/4}, \frac{3/4}{1/4}\} = \frac{5/4}{3/4}$, číslo $-\frac{3}{4}$ je pivotom. Ekvivalentnými riadkovými operáciami budeme eliminovať koeficienty v treťom stĺpci a získame

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_1	1	0	0	-1	3	0
x_2	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	5
v_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1
z	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	40

Dostali sme riešenie, ktoré je celočíselné, čím sme vyriešili našu úlohu lineárneho programovania. Teda optimálnym riešením je $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ a $z = 40$. $\square$

Všimnime si, že hoci bola v Príklade 6.1 maximálna hodnota účelovej funkcie zodpovedajúcej úlohy lineárneho programovania $z = 41{,}25$, neexistovalo celočíselné riešenie s hodnotou $z = 41$. Tiež si všimnime, že pri zaokrúhlení optimálneho riešenia zodpovedajúcej úlohy lineárneho programovania $x_1 = \frac{9}{4}$ a $x_2 = \frac{15}{4}$ získame $x_1 = 2$ a $x_2 = 4$, čo nespĺňa druhé ohraničenie, teda toto riešenie nie je prípustné. Na druhej strane ak zaokrúhlime riešenie $x_1 = \frac{9}{4}$ a $x_2 = \frac{15}{4}$ nadol, získame prípustné riešenie $x_1 = 2$ a $x_2 = 3$ s hodnotou účelovej funkcie $z = 34$, ktoré sa výrazne líši od optimálneho $z = 40$.

Keďže sme mali v Príklade 6.1 len dve premenné, môžeme celú situáciu znázorniť v rovine, pozri Obrázok 3. Šrafovane sme vyznačili nekonečnú množinu prípustných riešení zodpovedajúcej úlohy lineárneho programovania, zatiaľ čo množina prípustných riešení úlohy celočíselného lineárneho programovania pozostáva z 25 tučných bodov. Bod A je optimálnym riešením úlohy lineárneho programovania a B je optimálnym riešením úlohy celočíselného lineárneho programovania.



Obrázok 3

V niektorých príkladoch je potrebné zostrojiť viac rezov.

Príklad 6.2. Vyriešte úlohu celočíselného lineárneho programovania

$$\max z = x_1 + x_2$$
$$\begin{aligned} \text{ak} \quad 20x_1 - 4x_2 &\le 45 \\ -4x_1 + 20x_2 &\le 45 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ celočíselné}$$

Riešenie. Opäť najprv vyriešime zodpovedajúcu úlohu lineárneho programovania. Po pridaní premenných v_1 a v_2 simplexovým algoritmom dostávame

	x_1	x_2	v_1	v_2	
x_1	1	0	$\frac{5}{96}$	$\frac{1}{96}$	$2 + \frac{13}{16}$
x_2	0	1	$\frac{1}{96}$	$\frac{5}{96}$	$2 + \frac{13}{16}$
z	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{45}{8}$

Keďže x_1 nie je celé číslo, zostrojíme rez v prvom riadku. Máme

$$x_1 + \tfrac{5}{96}v_1 + \tfrac{1}{96}v_2 = 2 + \tfrac{13}{16},$$

a po úprave a pridaní ohraničenia získame

$$x_1 - 2 = -\tfrac{5}{96}v_1 - \tfrac{1}{96}v_2 + \tfrac{13}{16} \leq 0.$$

Dostávame novú simplexovú tabuľku s pivotom $-\frac{5}{96}$

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_1	1	0	$\frac{5}{96}$	$\frac{1}{96}$	0	$2+\frac{13}{16}$
x_2	0	1	$\frac{1}{96}$	$\frac{5}{96}$	0	$2+\frac{13}{16}$
v_3	0	0	$-\frac{5}{96}$	$-\frac{1}{96}$	1	$-\frac{13}{16}$
z	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{45}{8}$

Elimináciou tretieho stĺpca získame

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_1	1	0	0	0	1	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{53}{20}$
v_1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{96}{5}$	$\frac{78}{5}$
z	0	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{93}{20}$

Teraz zostrojíme rez v druhom riadku. Máme

$$x_2 + \tfrac{1}{20}v_2 + \tfrac{1}{5}v_3 = 2 + \tfrac{13}{20},$$

a po úprave a pridaní ohraničenia získame

$$x_2 - 2 = -\tfrac{1}{20}v_2 - \tfrac{1}{5}v_3 + \tfrac{13}{20} \leq 0.$$

Dostávame ďalšiu simplexovú tabuľku s pivotom $-\frac{1}{20}$

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	
x_1	1	0	0	0	1	0	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{53}{20}$
v_1	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{96}{5}$	0	$\frac{78}{5}$
v_4	0	0	0	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{13}{20}$
z	0	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{93}{20}$

Elimináciou štvrtého stĺpca získame

	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	
x_1	1	0	0	0	1	0	2
x_2	0	1	0	0	0	1	2
v_1	0	0	1	0	-20	4	13
v_4	0	0	0	1	4	-20	13
z	0	0	0	0	1	1	4

čiže optimálnym riešením je $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ a $z = 4$. □

Metóda vetvenia

Táto metóda je prácnejšia, ako orezávací algoritmus, je však všeobecnejšia. Aj túto metódu vysvetlíme na príklade (porovnaj s Príkladom 6.1).

Príklad 6.3. Vyriešte úlohu celočíselného lineárneho programovania

$$\max z = 5x_1 + 8x_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + \ \ x_2 &\le 6 \\ 5x_1 + 9x_2 &\le 45 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ celočíselné}$$

Riešenie. Analogicky ako v predchádzajúcich príkladoch, najprv vyriešime zodpovedajúcu úlohu lineárneho programovania. Po pridaní pomocných premenných v_1 a v_2 simplexovým algoritmom dostávame tabuľku A

A	x_1	x_2	v_1	v_2	
x_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{165}{4}$

Získali sme riešenie $x_1 = \frac{9}{4}$ a $x_2 = \frac{15}{4}$, ktoré nie je celočíselné. Uvažujme x_2. Pre celočíselné riešenie platí buď $x_2 \le 3$ alebo $x_2 \ge 4$. Dostávame dva prípady. V prípade B pridáme k tabuľke A nerovnicu $x_2 \le 3$, zatiaľ čo v prípade C k tabuľke A pridáme $x_2 \ge 4$. Postupne vyriešime obidva tieto prípady.

Prípad B: Po pridaní pomocnej premennej v_3 dostávame $x_2 + v_3 = 3$. Keďže x_2 je bázickou premennou, ktorá sa rovná $\frac{5}{4}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + \frac{15}{4}$, dosadíme tento výraz za x_2 do našej rovnice. Získame rovnicu

$$\frac{5}{4}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + v_3 = -\frac{3}{4},$$

ktorú pridáme ako predposledný riadok k simplexovej tabuľke A

B	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{15}{4}$
v_3	0	0	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{165}{4}$

Získali sme tabuľku, ktorá je duálne prípustná, a preto ju budeme riešiť duálnym simplexovým algoritmom. Keďže $-\frac{1}{4}$ je jediný záporný koeficient v treťom riadku, číslo $-\frac{1}{4}$ je pivotom. Elimináciou štvrtého stĺpca dostávame optimálnu tabuľku prípadu B

B	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_1	1	0	1	0	-1	3
x_2	0	1	0	0	1	3
v_2	0	0	-5	1	-4	3
z	0	0	5	0	3	39

Premenné x_1 a x_2 sú celočíselné, teda $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ a $z = 39$ je možné optimálne riešenie. Môže sa však stať, že riešenie prípadu C bude mať väčšiu hodnotu účelovej funkcie, a preto musíme preskúmať aj túto možnosť.

Prípad C: Po pridaní pomocnej premennej v_3 do nerovnice $x_2 \geq 4$ dostávame $x_2 - v_3 = 4$. Keďže x_2 je bázická premenná, ktorá sa rovná $x_2 = \frac{5}{4}v_1 - \frac{1}{4}v_2 + \frac{15}{4}$, dosadíme tento výraz do našej rovnice. Získame rovnicu

$$-\frac{5}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 + v_3 = -\frac{1}{4},$$

ktorú pridáme ako predposledný riadok k simplexovej tabuľke A

C	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_1	1	0	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{15}{4}$
v_3	0	0	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$
z	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{165}{4}$

Duálnym simplexovým algoritmom nájdeme pivota $-\frac{5}{4}$ a elimináciou tretieho stĺpca získame optimálnu simplexovú tabuľku prípadu C

C	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	0	-1	4
v_1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
z	0	0	0	1	1	41

V tejto tabuľke $z = 41$, avšak x_1 nemá celočíselnú hodnotu. Preto musíme uvažovať ďalšie podprípady. Podobne ako vyššie, buď $x_1 \leq 1$ (túto možnosť si označíme ako prípad D) alebo $x_1 \geq 2$ (prípad E). Prípady D aj E sú podprípadmi prípadu C.

Prípad D: Po pridaní pomocnej premennej v_4 do nerovnice $x_1 \leq 1$ dostávame $x_1 + v_4 = 1$. Keďže $x_1 = -\frac{1}{5}v_2 - \frac{9}{5}v_3 + \frac{9}{5}$, získavame rovnicu

$$-\tfrac{1}{5}v_2 - \tfrac{9}{5}v_3 + v_4 = -\tfrac{4}{5},$$

ktorú pridáme ako predposledný riadok k simplexovej tabuľke C

D	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	0	-1	0	4
v_1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
v_4	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{9}{5}$	1	$-\frac{4}{5}$
z	0	0	0	1	1	0	41

Opäť použijeme duálny simplexový algoritmus. V treťom riadku tabuľky máme dve záporné čísla. Keďže $\min\{\frac{1}{1/5}, \frac{1}{9/5}\} = \frac{1}{9/5}$, pivotom je $-\frac{9}{5}$. Elimináciou piateho stĺpca dostávame optimálnu simplexovú tabuľku prípadu D

D	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	
x_1	1	0	0	0	0	1	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	$\frac{40}{9}$
v_1	0	0	1	$-\frac{1}{9}$	0	$-\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$
v_3	0	0	0	$\frac{1}{9}$	1	$-\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$
z	0	0	0	$\frac{8}{9}$	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{365}{9}$

Získali sme tabuľku s hodnotou účelovej funkcie $z = \frac{365}{9} > 40$, v ktorej je premenná x_1 celočíselná, no x_2 je zlomkom. Preto musíme uvažovať ďalšie podprípady (a popri tom nesmieme zabudnúť, že potrebujeme ešte vyriešiť prípad E). Máme buď $x_2 \leq 4$ (prípad F), alebo $x_2 \geq 5$ (prípad G). Prípady F aj G sú podprípadmi prípadu D.

Prípad F: Po pridaní pomocnej premennej v_5 do nerovnice $x_2 \leq 4$ dostávame $x_2 + v_5 = 4$. Keďže $x_2 = -\frac{1}{9}v_2 + \frac{5}{9}v_4 + \frac{40}{9}$, získavame rovnicu

$$-\tfrac{1}{9}v_2 + \tfrac{5}{9}v_4 + v_5 = -\tfrac{4}{9},$$

ktorú pridáme ako predposledný riadok k simplexovej tabuľke D

F	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
x_1	1	0	0	0	0	1	0	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{40}{9}$
v_1	0	0	1	$-\frac{1}{9}$	0	$-\frac{4}{9}$	0	$\frac{5}{9}$
v_3	0	0	0	$\frac{1}{9}$	1	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
v_5	0	0	0	$-\frac{1}{9}$	0	$\frac{5}{9}$	1	$-\frac{4}{9}$
z	0	0	0	$\frac{8}{9}$	0	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{365}{9}$

Aj táto tabuľka je duálne prípustná, čiže opäť použijeme duálny simplexový algoritmus. Vo štvrtom riadku máme pivota $-\frac{1}{9}$ a elimináciou štvrtého stĺpca dostávame optimálnu simplexovú tabuľku prípadu F

F	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
x_1	1	0	0	0	0	1	0	1
x_2	0	1	0	0	0	0	1	4
v_1	0	0	1	0	0	-1	-1	1
v_3	0	0	0	0	1	0	1	0
v_2	0	0	0	1	0	-5	-9	4
z	0	0	0	0	0	5	8	37

Získali sme celočíselné riešenie pôvodnej úlohy $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ a $z = 37$. Keďže riešenie prípadu B je lepšie ($z = 39$), tak riešenie prípadu F je pre nás bezcenné.

Prípad G: Po pridaní pomocnej premennej v_5 do $x_2 \geq 5$ dostávame $x_2 - v_5 = 5$. Keďže $x_2 = -\frac{1}{9}v_2 + \frac{5}{9}v_4 + \frac{40}{9}$, získavame rovnicu

$$\frac{1}{9}v_2 - \frac{5}{9}v_4 + v_5 = -\frac{5}{9},$$

ktorú pridáme ako predposledný riadok k simplexovej tabuľke D

G	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
x_1	1	0	0	0	0	1	0	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{40}{9}$
v_1	0	0	1	$-\frac{1}{9}$	0	$-\frac{4}{9}$	0	$\frac{5}{9}$
v_3	0	0	0	$\frac{1}{9}$	1	$-\frac{5}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
v_5	0	0	0	$\frac{1}{9}$	0	$-\frac{5}{9}$	1	$-\frac{5}{9}$
z	0	0	0	$\frac{8}{9}$	0	$\frac{5}{9}$	0	$\frac{365}{9}$

Pivotom je $-\frac{5}{9}$ a elimináciou šiesteho stĺpca dostávame optimálnu simplexovú tabuľku prípadu G

G	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$	0
x_2	0	1	0	0	0	0	-1	5
v_1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	1
v_3	0	0	0	0	1	0	1	1
v_4	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	0	1	$-\frac{9}{5}$	1
z	0	0	0	1	0	0	1	40

Dostali sme celočíselné riešenie pôvodnej úlohy $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ a $z = 40$. Toto riešenie je lepšie ako riešenie prípadov B a F, čiže momentálne je toto riešenie naším kandidátom na optimálne riešenie pôvodnej úlohy celočíselného lineárneho programovania.

Prípad E: Na záver vyriešime zostávajúci prípad, ktorý je podprípadom prípadu C. Po pridaní pomocnej premennej v_4 do nerovnice $x_1 \geq 2$ dostávame $x_1 - v_4 = 2$. Keďže $x_1 = -\frac{1}{5}v_2 - \frac{9}{5}v_3 + \frac{9}{5}$, získavame rovnicu

$$\tfrac{1}{5}v_2 + \tfrac{9}{5}v_3 + v_4 = -\tfrac{1}{5},$$

ktorú pridáme ako predposledný riadok k simplexovej tabuľke C

E	x_1	x_2	v_1	v_2	v_3	v_4	
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	0	1	0	0	-1	0	4
v_1	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
v_4	0	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$
z	0	0	0	1	1	0	41

Táto tabuľka nie je optimálna, avšak nemáme v nej možnosť na výber pivota. To znamená, že tento prípad nemá prípustné riešenie. Teda optimálmym riešením je $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ a $z = 40$. $\square$

Hoci sa metóda vetvenia môže zdať prácnejšia, ako orezávací algoritmus, je všeobecnejšia. Touto metódou môžeme riešiť aj úlohy, v ktorých sa požaduje celočíselnosť len niektorých premenných.

Keď úlohu riešime orezávacím algoritmom, nestrácame žiadne prípustné riešenie, zatiaľ čo metóda vetvenia nám zakaždým rozdelí celú množinu prípustných riešení na menšie množiny. Nájdite optimálne riešenia prípadov A až G z Príkladu 6.3 na Obrázku 3.

Cvičenia

Cvičenie 6.1. V neveľkej oblasti leží 6 miest (sídlisk) a lokálny parlament sa musí rozhodnúť, kde má postaviť požiarne stanice. Chcú ich postaviť minimálny počet pri splnení podmienky, že každé mesto bude dosiahnuteľné od nejakej požiarnej stanice do 15-tich minút. Časy medzi mestami (v minútach) sú zapísané v tabuľke

	mesto 1	mesto 2	mesto 3	mesto 4	mesto 5	mesto 6
mesto 1	0	10	20	30	30	20
mesto 2	10	0	25	35	20	10
mesto 3	20	25	0	15	30	20
mesto 4	30	35	15	0	15	25
mesto 5	30	20	30	15	0	14
mesto 6	20	10	20	25	14	0

Zostavte úlohu celočíselného lineárneho programovania, ktorú môžu predstavitelia oblasti použiť na nájdenie minimálneho počtu požiarnych staníc.

Cvičenie 6.2. Nábytkárska firma vyrába stoly, lavice a stoličky. Na výrobu každého druhu nábytku je potrebná surovina (drevené dosky) a dva druhy práce (tesárska a finalizačná). Množstvá týchto zdrojov potrebné na výrobu jedného kusa nábytku sú zaznačené v tabuľke

	stôl	lavica	stolička
drevené dosky	8 m^2	6 m^2	1 m^2
tesárska práca	4 hodiny	2 hodiny	1,5 hodiny
finalizačná práca	2 hodiny	1,5 hodiny	0,5 hodiny

V súčasnosti má firma k dispozícii 48 m^2 dreva, 20 hodín tesárskej práce a 9 hodín finalizačnej práce. Stoly sa predávajú po 60 €, lavice po 30 € a stoličky po 20 € za kus. Pomocou celočíselného lineárneho programovania nájdite plán produkcie maximalizujúci výnos.

Cvičenie 6.3. Použitím orezávacieho algoritmu vyriešte úlohy celočíselného lineárneho programovania.

a)
$$\max z = 14x_1 + 18x_2$$
$$\begin{aligned} \text{ak} \quad -x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 7x_1 + x_2 &\leq 35 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \geq 0; \quad x_1, x_2 \text{ celočíselné}$$

b)
$$\min z = 6x_1 + 8x_2$$
$$\begin{aligned} \text{ak} \quad 3x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 4 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \geq 0; \quad x_1, x_2 \text{ celočíselné}$$

c)
$$\min z = 2x_1 - 4x_2$$
$$\text{ak} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ -4x_1 + 4x_2 &\le 5 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ celočíselné}$$

d)
$$\max z = 4x_1 + 5x_2$$
$$\text{ak} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 12 \\ 8x_1 + 5x_2 &\le 40 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ celočíselné}$$

Cvičenie 6.4. Metódou vetvenia vyriešte nasledujúce úlohy celočíselného lineárneho programovania.

a)
$$\max z = 7x_1 + 3x_2$$
$$\text{ak} \quad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 13 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ celočíselné}$$

b)
$$\min z = 4x_1 + 5x_2$$
$$\text{ak} \quad \begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\ge 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &\ge 7 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1, x_2 \text{ celočíselné}$$

c)
$$\min z = 3x_1 + x_2$$
$$\text{ak} \quad \begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\ge 8 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 4 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2 \ge 0; \quad x_1 \text{ celočíselné}$$

d)
$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\text{ak} \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 7 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 11 \end{aligned}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0; \quad x_2, x_3 \text{ celočíselné}$$

Cvičenie 6.5. Súkromná bezpečnostná služba používa kamery na ochranu objektu. Zamestnanci pozorujú monitory, ktoré sú umiestnené v uzamknutej miestnosti a menia sa v 8-hodinových intervaloch. Počas výmeny zmien sa v miestnosti stretnú zamestnanci z končiacej aj zo začínajúcej zmeny. Zamestnanci z týchto zmien sa v miestnosti zamknú a preberú službu. Vzápätí zamestnanci z končiacej zmeny odídu a zostanú tam už len zamestnanci z novej zmeny. Z bezpečnostných dôvodov sa požaduje, aby boli počas prvej výmeny prítomní aspoň 3 zamestnanci, počas druhej výmeny aspoň 4 a počas poslednej výmeny aspoň 2 zamestnanci. Zostavte úlohu celočíselného lineárneho programovania minimalizujúcu počet zamestnancov potrebných na strážénie objektu a vyriešte ju.

7 EXTRÉMY FUNKCIE VIACERÝCH PREMENNÝCH

Derivácie

Nech je $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkcia n premenných. Potom **parciálna derivácia** $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ funkcie f v bode $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ podľa x_i, $1 \le i \le n$, je zvyčajná derivácia funkcie jednej premennej $f(x_i)$ v bode a_i ak položíme $x_j = a_j$ pre $j \neq i$. Presnejšie,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_k) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{x_i - a_i}$$

Symbolom $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (prípadne $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $f'_{x_i}(x_1, x_2, \dots x_n)$ alebo f'_{x_i}) označujeme funkciu, ktorej hodnotou v bode $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je práve parciálna derivácia $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Všimnime si, že keď počítame f'_{x_i}, tak všetky premenné rôzne od x_i chápeme ako konštanty.

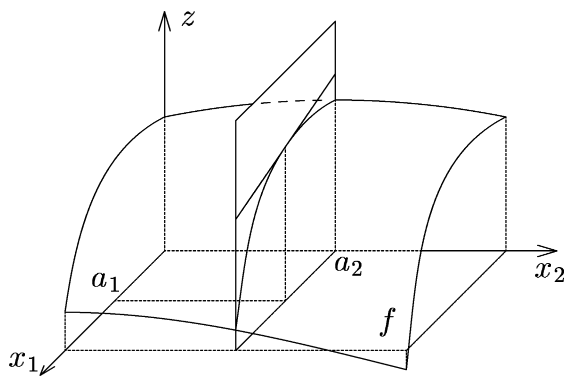
PRÍKLAD 7.1. Vypočítajte f'_{x_1} a f'_{x_2} ak $f(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2 + e^{x_1} - \ln x_2$.

RIEŠENIE. Keď budeme považovať x_2 za konštantu, povedzme $x_2 = c_2$, tak máme $f = x_1^2 \cdot c_2 + e^{x_1} - \ln c_2$. Zderivovaním podľa x_1 dostávame $2x_1 c_2 + e^{x_1}$, takže platí $f'_{x_1} = 2x_1 x_2 + e^{x_1}$.
Podobne vypočítame $f'_{x_2} = x_1^2 - \frac{1}{x_2}$. □

Poznamenajme, že v prípade dvoch premenných je $\frac{\partial}{\partial x_i} f(a_1, a_2)$ spád dotyčnice ku grafu funkcie f (čiže k ploche určenej rovnicou $z = f(x_1, x_2)$) v smere osi x_i. Na Obrázku 4 máme $\frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1, a_2)$.

Nech je $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funkcia n premenných. Potom **k-ta parciálna derivácia** sa označuje $f^{(k)}_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}}$ (prípadne $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}$). Získame ju z funkcie f, ak túto najprv derivujeme podľa x_{i_1}, potom podľa x_{i_2}, … až nakoniec podľa x_{i_k}.

Ak sú druhé parciálne derivácie funkcie n premenných $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$ spojité v bode $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, tak majú v tomto bode rovnakú hodnotu.



Obrázok 4

Maximá a minimá

Nech je $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funkcia n premenných a $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je bod z jej definičného oboru. Pre každé i, $1 \leq i \leq n$, položíme

$$D_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(A)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial f(A)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial x_1 \partial x_i} \\ \frac{\partial f(A)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f(A)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial x_2 \partial x_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(A)}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial f(A)}{\partial x_i \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(A)}{\partial x_i \partial x_i} \end{vmatrix}$$

Matica zodpovedajúca determinantu D_n sa volá **Hessián** funkcie f a determinanty D_1, D_2, … D_n sú **hlavné minory** tejto matice.

Bod A z definičného oboru funkcie f sa nazýva **kritický**, ak má funkcia v tomto bode všetky parciálne derivácie rovné 0 (prípadne ak tieto derivácie neexistujú). Je zrejmé, že ak má funkcia f v bode A prvé parciálne derivácie podľa všetkých premenných a f má v A relatívne minimum alebo relatívne maximum, tak sa všetky tieto parciálne derivácie rovnajú 0. Čiže ak má f v A lokálny extrém, tak A je kritický bod. Nasledujúca veta opisuje opačnú implikáciu.

VETA 7.1. *Predpokladajme, že funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ má v kritickom bode $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ všetky druhé parciálne derivácie. Potom platí:*

(i) *ak $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, … , $D_n > 0$, tak f má v A relatívne minimum;*
(ii) *ak $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, $D_4 > 0$, … , čiže ak $(-1)^i \cdot D_i > 0$ pre všetky i, $1 \leq i \leq n$, tak f má v A relatívne maximum;*
(iii) *ak neplatí $D_i \geq 0$ pre všetky i, $1 \leq i \leq n$, ani $(-1)^i \cdot D_i \geq 0$ pre všetky i, $1 \leq i \leq n$, tak f nemá v A ani relatívne minimum ani relatívne maximum.*

Poznamenajme, že v predchádzajúcej vete je „medzera“. Ak $D_i = 0$ pre niektoré i, tak funkcia f v A niekedy lokálny extrém má a niekedy ho nemá.

Množina bodov S je **konvexná**, ak s každými dvoma bodmi obsahuje celú úsečku, ktorá tieto body spája. Pre jednoduché funkcie, akými sú napríklad kvadratické, môžeme použiť nasledujúce tvrdenie.

VETA 7.2. *Predpokladajme že definičný obor $D(f)$ funkcie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je konvexná množina a $\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}$ sú spojité pre všetky i a j, $1 \le i, j \le n$. Potom platí:*

(i) *ak $D_i \ge 0$ pre každé $A \in D(f)$ a $1 \le i \le n$, tak ľubovoľné lokálne minimum funkcie f je globálnym minimom na $D(f)$;*
(ii) *ak $(-1)^i \cdot D_i \ge 0$ pre každé $A \in D(f)$ a $1 \le i \le n$, tak ľubovoľné lokálne maximum funkcie f je globálne maximum na $D(f)$.*

PRÍKLAD 7.2. Nájdite relatívne minimá a relatívne maximá funkcie dvoch premenných $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (6 - x_1 - x_2)$.

RIEŠENIE. Máme

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = x_2(6 - x_1 - x_2) - x_1 x_2 = x_2(6 - 2x_1 - x_2) \quad \text{a}$$
$$f'_{x_2}(x_1, x_2) = x_1(6 - x_1 - x_2) - x_1 x_2 = x_1(6 - x_1 - 2x_2).$$

Rovnice $f'_{x_1}(A) = 0$ a $f'_{x_2}(A) = 0$ sú splnené len v bodoch $A = (0,0)$, $A = (0,6)$, $A = (6,0)$ a $A = (2,2)$. Keďže

$$f''_{x_1 x_1} = -2x_2, \qquad f''_{x_1 x_2} = 6 - 2x_1 - 2x_2,$$
$$f''_{x_2 x_1} = 6 - 2x_1 - 2x_2, \qquad f''_{x_2 x_2} = -2x_1,$$

tak

$$\begin{vmatrix} -2x_2 & 6 - 2x_1 - 2x_2 \\ 6 - 2x_1 - 2x_2 & -2x_1 \end{vmatrix} = 4x_1 x_2 - (6 - 2x_1 - 2x_2)^2.$$

V bode $A = (0,0)$ máme $D_2 = -36$, v $A = (0,6)$ je $D_2 = -36$, v $A = (6,0)$ je $D_2 = -36$ a v $A = (2,2)$ platí $D_2 = 12$. Teda v bodoch $(0,0)$, $(0,6)$ a $(6,0)$ funkcia f nemá lokálne extrémy. V bode $(2,2)$ má relatívne maximum, lebo v tomto bode $D_1 = -4 < 0$. $\square$

Všimnime si, že relatívne maximum, ktoré sme našli v Príklade 7.2, nie je globálne (uvažujme $x_2 < 0$ a nechajme x_1 rásť nad všetky medze). Na tento príklad nemožno aplikovať Vetu 7.2, lebo $\frac{\partial}{\partial x_1 \partial x_1} f(A)$ je pre niektoré $A \in D(f)$ kladné.

PRÍKLAD 7.3. Firma vyrába dva výrobky X_1 a X_2. Dopyt je funkciou ceny a pre tieto výrobky je $x_1 = 50 - p_1$, respektíve $x_2 = 35 - \frac{1}{2} p_2$, (tu x_i je množstvo výrobku X_i dodané na trh a p_i je jeho cena, $1 \le i \le 2$). Vieme, že funkcia nákladov pre tieto výrobky je $C(x_1, x_2) = 2x_1 x_2$. Určte, koľko výrobkov X_1 a X_2 má firma vyrábať aby maximalizovala zisk.

RIEŠENIE. Z funkcií dopytu si vyjadríme ceny výrobkov. Keďže $p_1 = 50 - x_1$ a $p_2 = 70 - 2x_2$, tak výnos $R(x_1, x_2)$ je

$$R(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 50x_1 - x_1^2 + 70x_2 - 2x_2^2.$$

Zisk je rozdielom výnosov a nákladov, čiže

$$P(x_1, x_2) = R(x_1, x_2) - C(x_1, x_2) = 50x_1 - x_1^2 + 70x_2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2.$$

Parciálne derivácie sú

$$P'_{x_1}(x_1, x_2) = 50 - 2x_1 - 2x_2 \qquad \text{a} \qquad P'_{x_2}(x_1, x_2) = 70 - 2x_1 - 4x_2$$

a pre kritický bod $A = (a_1, a_2)$ platí

$$\begin{aligned} 50 - 2a_1 - 2a_2 &= 0 \\ 70 - 2a_1 - 4a_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{z čoho vyplýva} \qquad \begin{aligned} a_1 &= 15 \\ a_2 &= 10 \end{aligned}$$

Druhé parciálne derivácie sú

$$\begin{aligned} P''_{x_1x_1} &= -2, & \qquad P''_{x_1x_2} &= -2, \\ P''_{x_2x_1} &= -2, & \qquad P''_{x_2x_2} &= -4, \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4.$$

Keďže $D_2 = 4 > 0$ a $D_1 = -2 < 0$, tak funkcia P má v bode $(15, 10)$ relatívne maximum. Naviac, $D_1 < 0$ a $D_2 > 0$ platí pre každý bod z definičného oboru funkcie P, takže podľa Vety 7.2 máme v bode $(15, 10)$ globálne maximum. Teda firma by mala vyrábať 15 kusov výrobku X_1 a 10 kusov výrobku X_2. □

Lagrangeove multiplikátory

Metódu **Lagrangeových multiplikátorov** použijeme, keď hľadáme minimum alebo maximum funkcie viacerých premenných, pričom riešenie musí spĺňať ohraničenia, ktoré majú tvar rovníc.

Uvažujme problém

$$\begin{aligned} &\operatorname{opt} z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \text{ak} \quad &g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ &\quad\vdots \\ &g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

kde „opt“ je buď „min“, alebo „max“.

Aby sme vyriešili (1), zostrojíme **Lagrangeovu funkciu**

$$F(x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x_1,\dots,x_n)+$$
$$+\lambda_1\cdot g_1(x_1,\dots,x_n)+\dots+\lambda_m\cdot g_m(x_1,\dots,x_n).$$

Premenné $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ sa nazývajú **Lagrangeove multiplikátory**.

Dá sa ukázať, že všetky riešenia (1) sú kritickými bodmi funkcie F. Budeme preto hľadať bod $A=(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)$, v ktorom sa všetky parciálne derivácie F rovnajú nule. Teda budeme riešiť systém rovníc

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1}F(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)&=0\\ &\vdots\\ \frac{\partial}{\partial x_n}F(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)&=0\\ g_1(a_1,\dots,a_n)&=0\\ &\vdots\\ g_m(a_1,\dots,a_n)&=0\end{aligned}$$

pretože $\frac{\partial}{\partial\lambda_i}F(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)=g_i(a_1,\dots,a_n)$ pre $1\le i\le m$.

Ak chceme určiť, či je v kritickom bode A extrém, použijeme nasledujúcu vetu. V nej zostrojíme determinanty D_i, $1\le i\le n$, pre Lagrangeovu funkciu F analogicky, ako sme konštruovali tieto determinanty pre funkciu f vo Vete 7.1.

VETA 7.3. *Predpokladajme, že v kritickom bode A existujú všetky druhé parciálne derivácie funkcie F podľa x_i a x_j, $1\le i,j\le n$. Potom platí:*

(i) *ak $D_1>0$, $D_2>0$, … , $D_n>0$, tak v A je relatívne minimum problému (1);*
(ii) *ak $D_1<0$, $D_2>0$, $D_3<0$, $D_4>0$, … , čiže ak $(-1)^i\cdot D_i>0$, pre všetky i, $1\le i\le n$, tak v A je relatívne maximum problému (1).*

Všimnime si, že determinanty D_i v predchádzajúcej vete sa konštruovali len pre i spĺňajúce $1\le i\le n$ a nie $1\le i\le n+m$. Napriek tomu sa čísla $b_1,b_2,\dots,b_m$ môžu vyskytnúť v druhých deriváciach, takže ich potrebujeme vypočítať.

Môže sa však stať, že v kritickom bode funkcie f testy (i) a (ii) z Vety 7.3 zlyhajú a napriek tomu má funkcia v danom bode extrém, pozri Príklad 7.5. V takom prípade musíme preskúmať body v okolí A, aby sme určili, či je v A relatívny extrém.

PRÍKLAD 7.4. Uvažujeme v rovine dve krivky dané rovnicami $g_1(x_1,x_2)=0$ a $g_2(x_1,x_2)=0$, kde

$$g_1(x_1,x_2)=2x_1^2-4x_1x_2+2x_2^2-x_1-x_2\quad\text{a}$$
$$g_2(x_1,x_2)=9x_1-7x_2+16.$$

Grafom $g_1 = 0$ je parabola, zatiaľ čo grafom $g_2 = 0$ je priamka. Nájdite bod na parabole, ktorého vzdialenosť od priamky je minimálna.

Náznak riešenia. Nech je (u_1, u_2) ľubovoľný bod na parabole a nech je (v_1, v_2) ľubovoľný bod na priamke. Vzdialenosť z (u_1, u_2) do (v_1, v_2) je

$$\sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

a našou úlohou je nájsť

$$\begin{aligned} &\min z = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 \\ \text{ak} \quad &2u_1^2 - 4u_1u_2 + 2u_2^2 - u_1 - u_2 = 0 \\ &9v_1 - 7v_2 + 16 = 0 \end{aligned}$$

Lagrangeovou funkciou je

$$\begin{aligned} F(u_1, u_2, v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2) &= (u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \\ &+ \lambda_1 \cdot (2u_1^2-4u_1u_2+2u_2^2-u_1-u_2) + \lambda_2 \cdot (9v_1-7v_2+16), \end{aligned}$$

a aby sme našli jej kritické body, potrebujeme vyriešiť systém

$$\begin{aligned} F'_{u_1} &= 2(u_1 - v_1) + \lambda_1(4u_1 - 4u_2 - 1) = 0 \\ F'_{u_2} &= 2(u_2 - v_2) + \lambda_1(4u_2 - 4u_1 - 1) = 0 \\ F'_{v_1} &= -2(u_1 - v_1) + 9\lambda_2 = 0 \\ F'_{v_2} &= -2(u_2 - v_2) - 7\lambda_2 = 0 \\ F'_{\lambda_1} &= 2u_1^2 - 4u_1u_2 + 2u_2^2 - u_1 - u_2 = 0 \\ F'_{\lambda_2} &= 9v_1 - 7v_2 + 16 = 0 \end{aligned}$$

Jediným riešením daného systému je $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $v_1 = \frac{159}{65}$, $v_2 = \frac{353}{65}$ a $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{8}{65}$. Teraz

$$\begin{aligned} F''_{u_1u_1} &= 2 + 4\lambda_1 & F''_{u_2v_1} &= F''_{v_1u_2} = 0 \\ F''_{u_1u_2} &= F''_{u_2u_1} = -4\lambda_1 & F''_{u_2v_2} &= F''_{v_2u_2} = -2 \\ F''_{u_1v_1} &= F''_{v_1u_1} = -2 & F''_{v_1v_1} &= 2 \\ F''_{u_1v_2} &= F''_{v_2u_1} = 0 & F''_{v_1v_2} &= F''_{v_2v_1} = 0 \\ F''_{u_2u_2} &= 2 + 4\lambda_1 & F''_{v_2v_2} &= 2 \end{aligned}$$

a v bode $(3, 5, \frac{159}{65}, \frac{353}{65}, \frac{8}{65}, \frac{8}{65})$ platí $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$ a $D_4 > 0$. Teda v tomto bode je relatívne minimum. Z podstaty príkladu je zrejmé, že každé relatívne minimum je globálnym, čiže hľadaným bodom na parabole je bod $(3, 5)$. □

Nasledujúci príklad je ukážkou toho, že bezduché aplikovanie zložitého aparátu nemusí vždy dať želaný výsledok.

PRÍKLAD 7.5. Malá firma vyrába pre miestny trh dva druhy výrobkov X_1 a X_2. Zisk z výroby a predaja týchto dvoch tovarov je $z = x_1^2 \cdot x_2^2$, kde x_1 predstavuje množstvo výrobkov X_1 a x_2 je množstvo výrobkov X_2. Ceny týchto výrobkov (v eurách) sú $p_1 = 2$ a $p_2 = 4$, pričom je známe, že zákazníci sú ochotní vynaložiť na tieto výrobky 40 € denne. Pre aké hodnoty x_1 a x_2 dosiahne firma maximálny zisk?

RIEŠENIE 1. Našou úlohou je nájsť

$$\begin{aligned} \max z &= x_1^2 \cdot x_2^2 \\ \text{ak} \quad 2x_1 + 4x_2 - 40 &= 0 \end{aligned}$$

Lagrangeovou funkciou je

$$F(x_1, x_2, \lambda_1) = x_1^2 \cdot x_2^2 + \lambda_1(2x_1 + 4x_2 - 40)$$

a aby sme našli jej kritické body, potrebujeme vyriešiť systém

$$\begin{aligned} F'_{x_1} &= 2x_1x_2^2 + 2\lambda_1 = 0 \\ F'_{x_2} &= 2x_1^2x_2 + 4\lambda_1 = 0 \\ F'_{\lambda_1} &= 2x_1 + 4x_2 - 40 = 0 \end{aligned}$$

Pripočítaním $(-\frac{1}{2})$-násobku druhej rovnice k prvej získame

$$2x_1x_2^2 - x_1^2x_2 = (2x_2 - x_1)x_1x_2 = 0,$$

z čoho plynie, že buď $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, alebo $2x_2 - x_1 = 0$. Keďže v prvých dvoch prípadoch je zisk nulový, čo zjavne nie je maximom, dostávame

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 20 \end{aligned}$$

čiže $x_1 = 10$, $x_2 = 5$ a $\lambda_1 = -250$. Ďalej

$$F'_{x_1x_1} = 2x_2^2, \qquad F'_{x_1x_2} = F'_{x_2x_1} = 4x_1x_2, \qquad F'_{x_2x_2} = 2x_1^2.$$

Teda v bode $(10, 5, -250)$ máme

$$F'_{x_1x_1} = 50, \qquad F'_{x_1x_2} = F'_{x_2x_1} = 200, \qquad F'_{x_2x_2} = 200,$$

čo dáva $D_1 = 50 > 0$ a $D_2 = 50 \cdot 200 - 200 \cdot 200 < 0$.

Keďže $D_2 < 0$, nevieme určiť, či je v bode $(10, 5)$ maximum. V tomto prípade je Veta 7.3 bezcenná a musíme vyšetriť body ležiace pri $(10, 5)$ a porovnať hodnotu účelovej funkcie v týchto bodoch s $10^2 \cdot 5^2 = 2500$. □

Príklad 7.5 sme nemuseli riešiť pomocou Lagrangeových multiplikátorov. Keďže ohraničenie je lineárna funkcia, jednu z premenných sme mohli vyjadriť pomocou druhej, čím by sme získali funkciu jednej premennej, ako uvádzame v nasledujúcom.

RIEŠENIE 2. Keďže ohraničenie má tvar $2x_1 + 4x_2 = 40$, v riešení musí platiť $x_1 = 20 - 2x_2$. Keď túto hodnotu dosadíme do funkcie zisku, dostaneme

$$z = x_1^2 \cdot x_2^2 = (20 - 2x_2)^2 x_2^2 = 4x_2^4 - 80x_2^3 + 400x_2^2 = f(x_2).$$

Teraz je už zisk funkciou len jednej premennej. Keďže

$$f'_{x_2} = 16x_2^3 - 240x_2^2 + 800x_2 = 16x_2(x_2^2 - 15x_2 + 50),$$

tak kritickými bodmi sú $x_2 = 0$, $x_2 = \frac{15-\sqrt{15^2-4\cdot 50}}{2} = 5$ a $x_2 = \frac{15+\sqrt{15^2-4\cdot 50}}{2} = 10$. Ďalej,

$$f''_{x_2x_2} = 16 \cdot (3x_2^2 - 30x_2 + 50)$$

takže

$$f''_{x_2x_2}(0) = 16 \cdot 50 = 800 > 0$$
$$f''_{x_2x_2}(5) = 16 \cdot (75 - 150 + 50) = -400 < 0$$
$$f''_{x_2x_2}(10) = 16 \cdot (300 - 300 + 50) = 800 > 0$$

Teda zisk je maximálny pre $x_2 = 5$ a $x_1 = 20 - 2x_2 = 10$, ako sme očakávali. □

Cvičenia

CVIČENIE 7.1. Nájdite parciálne derivácie $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ nasledujúcich funkcií.

a) $4 - x_1^2 - x_2^2$ b) $x_1^2 - x_2^2$ c) $\ln\left(x_1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)$

d) $x_1^{x_2}$ e) $x_1^{x_1^{x_2}}$ f) $\ln\left(\frac{x_1+x_2}{x_1-x_2}\right)$

CVIČENIE 7.2. Nájdite relatívne minimá a maximá funkcie $z = f(x_1, x_2)$.

a) $z = 2x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 - x_1 + 3x_2 + 2$ b) $z = \dfrac{x_1^2}{4} - \dfrac{x_2^2}{9}$

c) $z = x_1^2x_2 + x_1x_2^3 - x_1x_2$ d) $z = x_1^3 + x_2^3 + 6x_1x_2$

e) $z = x_1^3 + x_2^3 - 18x_1x_2 + 215$ f) $z = x_1^2x_2^3(12 - x_1 - x_2)$

CVIČENIE 7.3. Nájdite relatívne minimá a maximá funkcie $f(x_1, x_2, x_3)$.

a) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6$

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_1}{x_2 + x_3} + \dfrac{x_2}{x_1 + x_3} + \dfrac{x_3}{x_1 + x_2}$, ak $x_1, x_2, x_3 > 0$

CVIČENIE 7.4. Spoločnosť vyrába dva výrobky X_1 a X_2. Výnos z ich predaja je $R(x_1, x_2) = 5x_1 + 4x_2$ pri nákladoch $C(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 7x_1 + 10x_2 + 11$, kde x_i je množstvo výrobku X_i, $1 \le i \le 2$. Zistite, aké množstvá X_1 a X_2 má spoločnosť vyrábať, aby maximalizovala zisk. (Pripomíname, že zisk je rozdielom výnosov a nákladov.)

CVIČENIE 7.5. Monopolný výrobca vyrába produkt, ktorý dodáva dvom zákazníkom. Keď dodá prvému zákazníkovi q_1 jednotiek tovaru, tak tento je ochotný zaplatiť $150 - 15q_1$ € za kus. Na druhej strane, keď dodá druhénu zákazníkovi q_2 jednotiek tovaru, tak tento je ochotný zaplatiť $70 - 4q_2$ € za kus. Pri výrobe q kusov sú náklady $100 + 15q$ €. Koľko kusov tovaru má monopolný výrobca vyrobiť a ako ho má rozdeliť medzi svojich zákazníkov, aby maximalizoval zisk?

CVIČENIE 7.6. Firma má dve továrne. Náklady na výrobu x_1 jednotiek tovaru v prvej továrni sú $x_1^2 + 1200$ a náklady na výrobu x_2 jednotiek tovaru v druhej továrni sú $3x_2^3 + 800$. Firma má objednávku na 1200 jednotiek tovaru. Koľko tovaru má firma vyrobiť v jednotlivých továrňach, ak chce minimalizovať náklady? (Vyriešte problém pomocou Lagrangeových multiplikátorov a potom dosadením vhodného výrazu za jednu z premenných vyriešte problém pomocou funkcie jednej premennej.)

CVIČENIE 7.7. Malá spoločnosť vyrába stroje. Jednotku kapitálu vie získať za dolár a hodinu práce vie získať za dva doláre. Ak bude mať K jednotiek kapitálu a L hodín práce, tak dokáže vyrobiť $K^{1/3}L^{2/3}$ strojov. Zistite, aký najväčší počet strojov môže firma vyrobiť, ak má na zadováženie kapitálu a práce k dispozícii 10 000 dolárov. (Vyriešte problém pomocou Lagrangeových multiplikátorov a potom dosadením vhodného výrazu za jednu z premenných vyriešte problém pomocou funkcie jednej premennej.)

CVIČENIE 7.8. Nájdite relatívne minimá a maximá funkcie $z = x_1 + x_2$ pri obmedzení $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{a^2}$.

CVIČENIE 7.9. Nájdite relatívne minimá a maximá funkcie dvoch premenných $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$ ak má platiť $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

CVIČENIE 7.10. Nájdite relatívne minimá a relatívne maximá funkcie dvoch premenných $z = (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 1)^2$ pri ohraničení $x_1^2 - x_2^2 = 3$.

8 MATEMATICKÉ PROGRAMOVANIE

Definície

Úloha matematického programovania je optimalizačný problém, ktorý má tvar

$$
\begin{aligned}
\text{opt}\, z &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\text{ak} \quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0 \\
g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0 \\
&\vdots \\
g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Tu „opt" je „max", alebo „min"; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú premenné a $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ sú funkcie n premenných.

Poznamenajme, že ak by sme potrebovali ohraničenie tvaru $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$, tak toto možno zapísať nerovnicou $-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$. Tvar (1) pripúšťa aj ohraničenia v tvare rovníc. To preto, lebo ohraničenie $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ sa dá zapísať pomocou dvojice $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ a $-g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$. Teda metódou Lagrangeových multiplikátorov, ktorú sme prebrali v predchádzajúcej kapitole, vieme vyriešiť niektoré špeciálne úlohy matematického programovania.

Ak by sme potrebovali, aby bola premenná x_i nezáporná, stačí pridať ohraničenie $x_i \geq 0$. Toto ohraničenie však obyčajne pridávame až dodatočne, ak optimálne riešenie bez neho bude mať zápornú hodnotu x_i. To preto, lebo čím bude v úlohe viac ohraničení, teda čím bude m väčšie, tým bude táto úloha zložitejšia.

Z predchádzajúceho vyplýva, že úloha lineárneho programovania je špeciálnym prípadom úlohy matematického programovania.

Kuhn-Tuckerove podmienky

Úlohu matematického programovania môžeme riešiť pomocou nasledujcej dvojice viet, ktoré sa nazývajú **Kuhn-Tuckerove podmienky**. Avšak ak budú funkcie f, respektíve g_j „príliš komplikované", tak nám Kuhn-Tuckerove podmienky nepomôžu. To preto, lebo všeobecnú úlohu matematického programovania (1) nedokážeme vždy vyriešiť.

Veta 8.1. *Ak je bod* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *optimálne riešenie minimalizačného problému (1), tak tento bod vyhovuje ohraničeniam (1) a existujú nezáporné čísla* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *také, že*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(A) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(A) &= 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \lambda_j \big(g_j(A)\big) &= 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Veta 8.2. *Ak je bod* $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *optimálne riešenie maximalizačného problému (1), tak tento bod vyhovuje ohraničeniam (1) a existujú nezáporné čísla* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *také, že*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(A) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(A) &= 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ \lambda_j \big(g_j(A)\big) &= 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

Všimnime si, že koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ vo Vetách 8.1 a 8.2 musia byť nezáporné. Táto podmienka nemusela byť splnená pre Lagrangeove multiplikátory v predchádzajúcej kapitole.

Koeficienty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sú **tieňové ceny**. To znamená, že nahradením nerovnice

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0,$$

čo je vlastne

$$-g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0,$$

nerovnicou

$$-g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 1,$$

čiže

$$g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) + 1 \geq 0,$$

vzrastie hodnota účelovej funkcie o λ_j. (Keďže $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nemusí byť lineárna funkcia, tak táto hodnota vzrastie iba „približne“ o hodnotu λ_j.)

Skúmajme teraz, ako sa zmenia Kuhn-Tuckerove podmienky ak požadujeme, aby boli všetky premenné nezáporné. Potom bude mať úloha matematického programovania tvar

$$
\begin{aligned}
\text{opt}\, z &= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
\text{ak} \quad g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0 \\
g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0 \\
&\vdots \\
g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) &\geq 0 \\
x_1 &\geq 0 \\
&\vdots \\
x_n &\geq 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Teraz aplikovaním Kuhn-Tuckerových podmienok dostávame, že ak je bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ optimálne riešenie problému (2), tak tento bod vyhovuje ohraničeniam (2) a existujú nezáporné čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ také, že

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} f(A) \mp \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(A) \mp \mu_j &= 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
\lambda_j \big(g_j(A)\big) &= 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m \\
\mu_i a_i &= 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

pričom horné znamienko v $\mp$ sa vzťahuje na minimalizačnú a dolné na maximalizačnú úlohu. Keď teraz dosadíme μ_i z prvej sady rovníc do poslednej, dostávame nasledujúce tvrdenia.

VETA 8.3. *Ak je bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ optimálne riešenie minimalizačného problému (2), tak tento bod vyhovuje ohraničeniam (2) a existujú nezáporné čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ také, že*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} f(A) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(A) &\geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
\lambda_j \big(g_j(A)\big) &= 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m \\
\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(A) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(A)\right] a_i &= 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

VETA 8.4. *Ak je bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ optimálne riešenie maximalizačného problému (2), tak tento bod vyhovuje ohraničeniam (2) a existujú nezáporné čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ také, že*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} f(A) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(A) &\leq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\
\lambda_j \big(g_j(A)\big) &= 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, m \\
\left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(A) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(A)\right] a_i &= 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Vety 8.1 až 8.4 dávajú nutné podmienky na to, aby bol bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ optimálne riešenie problému (1), respektíve (2). To znamená, že ak pomocou týchto viet nájdeme bod A, tak tento ešte nemusí byť optimálnym. (Je iba akýmsi „kritickým“ bodom.) Nasledujúce tvrdenia nám dávajú podmienky, ktoré sú postačujúce. Teda ak bod A niektorú z týchto viet spĺňa, je optimálnym riešením.

VETA 8.5. *Predpokladajme, že hľadáme riešenie minimalizačného problému (1), respektíve (2). Ak je funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konvexná a $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sú všetky konkávne, tak ľubovoľný bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ktorý spĺňa predpoklady Vety 8.1, respektíve Vety 8.3, je optimálnym riešením problému (1), respektíve (2).*

VETA 8.6. *Predpokladajme, že hľadáme riešenie maximalizačného problému (1), respektíve (2). Ak je funkcia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ konkávna a všetky $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sú tiež všetky konkávne, tak ľubovoľný bod $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ktorý spĺňa predpoklady Vety 8.2, respektíve Vety 8.4, je optimálnym riešením problému (1), respektíve (2).*

Použitie Kuhn-Tuckerových podmienok vysvetlíme na dvoch príkladoch.

PRÍKLAD 8.1. Nech je f funkcia jednej premennej a nech sú h_1 a h_2 čísla, pre ktoré platí $h_1 \leq h_2$. Použitím Kuhn-Tuckerových podmienok vyriešte maximalizačný problém

$$\max z = f(x)$$

$$\text{ak} \quad h_1 \leq x \leq h_2$$

RIEŠENIE. Našou úlohou je vyriešiť problém

$$\max z = f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x - h_1 &\geq 0 \\ -x + h_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Podľa Vety 8.2 máme nájsť nezáporné čísla λ_1 a λ_2 také, že platí

$$f'(a) + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{3}$$

$$\lambda_1(a - h_1) = 0 \tag{4}$$

$$\lambda_2(-a + h_2) = 0 \tag{5}$$

Ak bod a a čísla λ_1 a λ_2 vyhovujú rovniciam (3), (4) a (5), tak a vyhovuje Kuhn-Tuckerovým podmienkam, a teda v tomto bode sa môže dosahovať optimálne riešenie. Uvažujme štyri prípady

(i) $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 0$. Potom $f'(a) = 0$ podľa (3). Čiže ak $f'(a) = 0$, tak v a sa môže dosahovať optimum.

(ii) $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 > 0$. Podľa (5) $a = h_2$ a z (3) máme $f'(a) = f'(h_2) = \lambda_2$. Teda $f'(h_2) > 0$. Čiže ak $a = h_2$ a $f'(a) > 0$, tak v a sa môže dosahovať optimum.

(iii) $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 = 0$. Podľa (4) $a = h_1$ a z (3) máme $f'(a) = f'(h_1) = -\lambda_1$. Teda $f'(h_1) < 0$. Čiže ak $a = h_1$ a $f'(a) < 0$, tak v a sa môže dosahovať optimum.

(iv) $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$. Potom $a = h_1$ a $a = h_2$, čo je možné len ak $h_1 = h_2$. V takom prípade je optimum v $a = h_1 = h_2$.

Ohraničenia sú lineárne, a teda konkávne. To znamená, že ak je f konkávna funkcia, tak nájdené možné riešenia sú podľa Vety 8.6.optimálne. □

Pre každý z prípadov v predchádzajúcom príklade načrtnite zodpovedajúci graf funkcie f, ktorá je na intervale $\langle h_1, h_2 \rangle$ konkávna.

Príklad 8.2. Monopolný výrobca môže zakúpiť nanajvýš 20 litrov chemikálie v cene 10 € za liter. Pri nákladoch 3 € za liter dokáže spracovať liter chemikálie na liter produktu X_1 a pri nákladoch 5 € za liter dokáže spracovať liter chemikálie na liter produktu X_2. Dopyt po tovare X_1 je daný závislosťou $p_1 = 30 - x_1$ a dopyt po tovare X_2 je $p_2 = 50 - 2x_2$, kde p_i je cena za liter pri dodaní x_i litrov na trh, $1 \leq i \leq 2$. Zistite, pri akom množstve zakúpenej chemikálie a pri akých objemoch výroby X_1 a X_2 dosiahne výrobca maximálny zisk.

Riešenie. Označme x_3 množstvo zakúpenej chemikálie. Potom zisk je rozdielom výnosov a nákladov, čiže

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3) &= x_1(30 - x_1) + x_2(50 - 2x_2) - 3x_1 - 5x_2 - 10x_3 = \\ &= -x_1^2 - 2x_2^2 + 27x_1 + 45x_2 - 10x_3 \end{aligned}$$

Teda našou úlohou je vyriešiť problém

$$\max z = -x_1^2 - 2x_2^2 + 27x_1 + 45x_2 - 10x_3$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad -x_1 - x_2 + x_3 &\geq 0 \\ 20 - x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ako sme spomenuli vyššie, najprv sa pokúsime vyriešiť problém bez dodatočných obmedzení $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ a $x_3 \geq 0$. Iba ak tento postup zlyhá, pridáme ohraničenia na nezápornosť premenných.

Podľa Vety 8.2, pre optimálne riešenie $A = (a_1, a_2, a_3)$ existujú nezáporné čísla λ_1 a λ_2 také, že

$$-2a_1 + 27 - \lambda_1 = 0 \tag{6}$$

$$-4a_2 + 45 - \lambda_1 = 0 \tag{7}$$

$$-10 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \tag{8}$$

$$\lambda_1(-a_1 - a_2 + a_3) = 0 \tag{9}$$

$$\lambda_2(20 - a_3) = 0 \tag{10}$$

Tak ako v predchádzajúcom príklade, aj teraz budeme uvažovať štyri prípady

(i) $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 0$. Potom $10 = 0$ podľa (8), takže tento prípad nemôže nastať.

(ii) $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 > 0$. Potom $\lambda_2 = -10$ podľa (8), čo odporuje nezáponosti λ_2.

(iii) $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 = 0$. Podľa (8) máme $\lambda_1 = 10$. Teraz $a_1 = 8{,}5$ podľa (6) a z (7) plynie $a_2 = 8{,}75$. Na záver, (9) dáva $a_3 = 17{,}25$. Tieto hodnoty spĺňajú Kuhn-Tuckerove podmienky.

(iv) $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$. Podľa (10) máme $a_3 = 20$ a z (9) plynie $a_2 = 20 - a_1$. Tvrdenie (7) môžeme prepísať v tvare

$$-4(20 - a_1) + 45 - \lambda_1 = 4a_1 - 35 - \lambda_1 = 0$$

a keď k tejto rovnici pridáme dvojnásobok (6), tak dostávame $19 - 3\lambda_1 = 0$. Teda $\lambda_1 = \frac{19}{3}$. Podľa (8) máme $\lambda_2 = -10 + \frac{19}{3} = -\frac{11}{3} < 0$, čo odporuje nezápornosti λ_2.

Funkcia $P(x_1, x_2, x_3)$ je konkávna, lebo je súčtom konkávnych funkcií. Konkávne sú aj ohraničenia, lebo sú lineárne. Teda $(8{,}5; 8{,}75; 17{,}25)$ je optimálne riešenie, pri ktorom sa dosahuje zisk 225,375. $\square$

Všimnime si, že predchádzajúci príklad sa dal riešiť jednoduchšie. Je zrejmé, že čo firma nakúpi, to spracuje. Teda možno predpokladať $a_3 = a_1 + a_2$ a po dosadení za a_3 do účelovej funkcie získame problém, ktorý má iba dve premenné. Koniec koncov, získané riešenie s $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 = 0$ tvrdí, že prvé ohraničenie je v optimálnom riešení splnené rovnicou a druhé ostrou nerovnicou (uvedomme si, že λ_1 a λ_2 sú tieňové ceny ohrančení).

Cvičenia

Cvičenie 8.1. Nájdite minimum funkcie $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$ pri ohraničeniach. (Všimnite si, že prípad a je podstatne jednoduchší ako b.)

a) $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\ge 1 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \end{aligned}$$

Cvičenie 8.2. Nájdite minimum funkcie dvoch premenných pri dvoch lineárnych ohraničeniach.

a) $$\begin{aligned} &\min z = 2x_1^2 - x_2 \\ \text{ak} \quad & 2x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} &\min z = x_1 + 2x_2^2 \\ \text{ak} \quad & x_1 + x_2 \le 2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

CVIČENIE 8.3. Nájdite maximum funkcie dvoch premenných pri dvoch lineárnych ohraničeniach.

a)
$$\begin{aligned} \min z &= 20x_1 + 10x_2 - x_1^2 \\ \text{ak} \quad 3x_1 + x_2 &\le 20 \\ x_1 + 2x_2 &\le 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min z &= 15x_1 + 20x_2 - x_1^2 - x_2^2 \\ \text{ak} \quad 2x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1 + 2x_2 &\le 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

CVIČENIE 8.4. Nájdite minimum funkcie $z = (x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 1)^2$ pri ohraničeniach $-x_1 + x_2 \ge 1$ a $x_1 + x_2 \le 3$.

CVIČENIE 8.5. Nájdite minimum funkcie $z = -x_1^2 - x_2^2 + 4x_1 + 6x_2$ pri ohraničeniach $x_1 + x_2 \le 6$, $0 \le x_1 \le 3$ a $0 \le x_2 \le 4$.

CVIČENIE 8.6. Nájdite maximum funkcie $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + e^{-2x_2}$ pri ohraničení $x_1 + x_2 \le 1$, ak majú byť obidve premenné nezáporné.

CVIČENIE 8.7. Nájdite minimá a maximá funkcie $z = 2x_1 + x_2$ pri ohraničení $x_1^2 + x_2^2 \le 4$.

CVIČENIE 8.8. Vyriešte úlohu matematického programovania

$$\min z = \tfrac{50}{x} + \tfrac{20}{y} + xy$$
$$\text{ak} \quad x \ge 1, \quad y \ge 1$$

CVIČENIE 8.9. Firma má týždenne k dispozícii 150 hodín práce, pričom za túto prácu platí 9 € za hodinu. Ďalšie hodiny práce vie zabezpečiť pri nákladoch 15 € za hodinu. Kapitál sa dá zadovážiť pri nákladoch 3 € za jednotku. Keď firma získa K jednotiek kapitálu a L hodín práce týždenne, vie vyrobiť $K^{1/3}L^{1/2}$ strojov. Každý stroj sa predáva po 150 €. Ako má firma maximalizovať týždenný zisk?

9 KVADRATICKÉ PROGRAMOVANIE

Aplikačný príklad

Nech je f polynóm n premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$, čiže

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{t} a_k x_1^{r_{k,1}} x_2^{r_{k,2}} \dots x_n^{r_{k,n}}.$$

Stupeň f je maximum z $r_{k,1} + r_{k,2} + \dots + r_{k,n}$, kde $1 \leq k \leq t$.

Úloha kvadratického programovania je taká úloha matematického programovania, v ktorej sú všetky ohraničenia lineárne a účelová funkcia je polynóm stupňa nanajvýš 2. To znamená, že úloha lineárneho programovania je špeciálna úloha kvadratického programovania.

Úloha kvadratického programovania sa využíva pri určovaní optimálneho portfólia. Zopakujme si, že ak je S diskrétna náhodná premenná, tak pre strednú hodnotu platí

$$E(S) = \sum x_k \cdot P(S = x_k),$$

pričom $P(S = x_k)$ je pravdepodobnosť javu $S = x_k$ a suma ide cez všetky hodnoty x_k, ktoré môže S nadobúdať. Ak je S spojitá náhodná premenná s rozdelením $f(x)$, tak

$$E(S) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Pre disperziu $D(S)$ potom máme

$$D(S) = E\big([S - E(S)]^2\big) = E(S^2) - (E(S))^2,$$

pričom $\sqrt{D(S)}$ je štandardná odchýlka. Ak sú S_1 a S_2 náhodné premenné, ich kovariancia je

$$cov(S_1, S_2) = E\big([S_1 - E(S_1)][S_2 - E(S_2)]\big).$$

Nech sú $S_1, S_2, \dots S_n$ náhodné premenné. Potom pre stredné hodnoty, disperzie a kovariancie platia vzťahy

$$
\begin{aligned}
E(c \cdot S_i) &= c \cdot E(S_i) \\
D(c \cdot S_i) &= c^2 \cdot D(S_i) \\
cov(a \cdot S_i, b \cdot S_j) &= ab \cdot cov(S_i, S_j) \\
E(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) &= E(S_1) + E(S_2) + \cdots + E(S_n) \\
D(S_1 + S_2 + \cdots + S_n) &= D(S_1) + D(S_2) + \cdots + D(S_n) + \sum_{i \neq j} cov(S_i, S_j)
\end{aligned}
$$

Príklad 9.1. Študent chce investovať 5000 € do troch fondov. Nech je S_i náhodná premenná reprezentujúca výnosnosť i-teho fondu. (Čiže ak $S_i = 0{,}13$, tak 1 € investovaná dnes dá 1,13 o rok.) Vieme, že platí $E(S_1) = 0{,}15$, $E(S_2) = 0{,}11$, $E(S_3) = 0{,}1$, ďalej $D(S_1) = 0{,}2$, $D(S_2) = 0{,}09$, $D(S_3) = 0{,}18$, $cov(S_1, S_2) = 0{,}05$, $cov(S_1, S_3) = 0{,}02$ a $cov(S_2, S_3) = 0{,}03$. Zostavte úlohu, ktorej riešením bude portfólio s minimálnou disperziou pri očakávanom výnose aspoň 12%.

Riešenie. Pri investícii x_i eúr do i-teho fondu bude výnos

$$\frac{(x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3)}{5\,000}.$$

Pre očakávaný výnos dostávame

$$E\Big(\frac{x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3}{5\,000}\Big) = \frac{x_1E(S_1) + x_2E(S_2) + x_3E(S_3)}{5\,000} \geq 0{,}12,$$

čo dáva ohraničenie

$$0{,}15x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}1x_3 \geq 600.$$

Druhým ohraničením je

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5\,000.$$

Zostáva opísať účelovú funkciu. Podľa vzťahov pred príkladom platí

$$
\begin{aligned}
D(x_1S_1 + x_2S_2 + x_3S_3) &= \sum_{i=1}^{3} D(x_iS_i) + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 3} cov(x_iS_i, x_jS_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \cdot D(S_i) + 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_ix_j \cdot cov(S_i, S_j) = \\
&= 0{,}2x_1^2 + 0{,}09x_2^2 + 0{,}18x_3^2 + 0{,}10x_1x_2 + 0{,}04x_1x_3 + 0{,}06x_2x_3
\end{aligned}
$$

Teda optimálne portfólio nájdeme vyriešením úlohy kvadratického programovania

$$
\begin{aligned}
\min z = 0{,}2x_1^2 + 0{,}09x_2^2 + 0{,}18x_3^2 + 0{,}10x_1x_2 + 0{,}04x_1x_3 + 0{,}06x_2x_3 \\
\text{ak} \quad 0{,}15x_1 + 0{,}11x_2 + 0{,}1x_3 \geq 600 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 5\,000. \quad \square
\end{aligned}
$$

Wolfeho metóda

Úlohu kvadratického programovania možno riešiť Wolfeho metódou. Tá spočíva v aplikovaní modifikovaného simplexového algoritmu na Kuhn-Tuckerove podmienky. Objasníme si ju na príklade.

Príklad 9.2. Vyriešte úlohu

$$\begin{aligned} \min z = -x_1 - x_2 + \tfrac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 \le 3 \\ -2x_1 - 3x_2 \le -6 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Riešenie. Premenné majú byť nezáporné, a preto použijeme Vetu 8.3. Podľa tejto vety pre optimálne riešenie $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ musí platiť

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(X) - \sum_{j=1}^{2} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(X) &\ge 0 \qquad & i = 1, 2 \\ \lambda_j \big(g_j(X)\big) &= 0 & j = 1, 2 \\ \left[\frac{\partial}{\partial x_i} f(X) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(X)\right] x_i &= 0 & i = 1, 2 \\ g_j(X) &\ge 0 & j = 1, 2 \\ x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Teraz prepíšme do takéhoto tvaru zadanie príkladu.

$$\begin{aligned} -1 + x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 &\ge 0 \\ -1 + 2x_2 - x_1 + \lambda_1 - 3\lambda_2 &\ge 0 \\ \lambda_1(3 - x_1 - x_2) &= 0 \\ \lambda_2(-6 + 2x_1 + 3x_2) &= 0 \\ [-1 + x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2]x_1 &= 0 \\ [-1 + 2x_2 - x_1 + \lambda_1 - 3\lambda_2]x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &\le 3 \\ -2x_1 - 3x_2 &\le -6 \\ x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Keď prevedieme všetky ohraničenia na rovnice, tak pri nezápornej pravej strane dostávame

$$\begin{array}{l}
x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 = 1\\
-x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - e_2 = 1\\
x_1 + x_2 + v_1 = 3\\
2x_1 + 3x_2 - e_3 = 6
\end{array}$$

$$e_1x_1 = 0, \qquad e_2x_2 = 0, \qquad \lambda_1v_1 = 0, \qquad \lambda_2e_3 = 0$$

$$x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, e_1, e_2, v_1, e_3 \geq 0$$

Využili sme, že zo vzťahu $-1 + x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 = 0$ vyplýva $e_1 = -1 + x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1$, čiže rovnicu $[-1 + x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1]x_1$ možno prepísať $e_1x_1 = 0$. Podobne sme postupovali aj pri ďalších rovniciach.

Dodáme nazáporné umelé premenné p_1, p_2, p_3 a dvojfázovým simplexovým algoritmom nájdeme prípustné riešenie. Jediným rozdielom oproti klasickému simplexovému algoritmu bude, že v ľubovoľnej báze môže byť vždy nanajvýš jedna premenná z dvojice e_1 a x_1, nanajvýš jedna premenná z dvojice e_2 a x_2, jedna z λ_1 a v_1 a nanajvýš jedna z dvojice λ_2 a e_3. Rovnicami pre úvodnú simplexovú tabuľku sú

$$\begin{array}{l}
x_1 - x_2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 - e_1 + p_1 = 1\\
-x_1 + 2x_2 + \lambda_1 - 3\lambda_2 - e_2 + p_2 = 1\\
x_1 + x_2 + v_1 = 3\\
2x_1 + 3x_2 - e_3 + p_3 = 6
\end{array}$$

a našou úlohou je minimalizovať $q = p_1 + p_2 + p_3$, čiže

$$\max(-q) = -p_1 - p_2 - p_3 = 2x_1 + 4x_2 + 2\lambda_1 - 5\lambda_2 - e_1 - e_2 - e_3 - 8.$$

Úvodnou simplexovou tabuľkou je

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	v_1	e_3	p_1	p_2	p_3	
p_1	1	−1	1	−2	−1	0	0	0	1	0	0	1
p_2	−1	2	1	−3	0	−1	0	0	0	1	0	1
v_1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
p_3	2	3	0	0	0	0	0	−1	0	0	1	6
$-q$	−2	−4	−2	5	1	1	0	1	0	0	0	−8

Pivota hľadáme v stĺpci, v ktorom sa v poslednom riadku nachádza záporné číslo. Stĺpec λ_1 nie je vhodný, pretože v báze máme v_1. Zvoľme si stĺpec x_2. Tu je pivotom 2 a po úprave získame ďalšiu tabuľku

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	v_1	e_3	p_1	p_2	p_3	
p_1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
v_1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
p_3	$\frac{7}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	-1	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{9}{2}$
$-q$	-4	0	0	-1	1	-1	0	1	0	2	0	-6

Teraz si zvolíme pivota v prvom stĺpci. Dostaneme

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	v_1	e_3	p_1	p_2	p_3	
p_1	0	0	$\frac{12}{7}$	$-\frac{29}{7}$	-1	$-\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	1	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$
x_2	0	1	$\frac{2}{7}$	$-\frac{6}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$
v_1	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$
x_1	1	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{9}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$
$-q$	0	0	$-\frac{12}{7}$	$\frac{29}{7}$	1	$\frac{5}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{8}{7}$	$-\frac{6}{7}$

Keďže v_1 máme v báze, pivota nemôžeme hľadať v stĺpci λ_1. Zostáva stĺpec e_3.

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	v_1	e_3	p_1	p_2	p_3	
p_1	0	0	$\frac{5}{3}$	-4	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
e_3	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
$-q$	0	0	$-\frac{5}{3}$	4	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$

Teraz už v_1 v báze nie je, a preto môžeme hľadať pivota v stĺpci λ_1.

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	e_1	e_2	v_1	e_3	p_1	p_2	p_3	
λ_1	0	0	1	$-\frac{12}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
e_3	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	-1	$\frac{6}{5}$
x_1	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
$-q$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0

Táto tabuľka je už optimálna. Teda riešením je $x_1 = \frac{9}{5}$ a $x_2 = \frac{6}{5}$. Naviac, tieňové ceny ohraničení sú $\lambda_1 = \frac{2}{5}$ a $\lambda_2 = 0$. $\square$

Vie sa, že ak sú všetky vedúce hlavné minory Hessiánu účelovej funkcie kladné, tak Wolfeho metódou je vždy možné nájsť optimálne riešenie úlohy kvadratického programovania.

Cvičenia

Cvičenie 9.1. Uvažujeme investície do troch fondov. Náhodná premenná S_i reprezentuje hodnotu, ktorú dostaneme o rok pri investovaní 1$ do fondu i. Vieme, že $E(S_1) = 1{,}15$, $E(S_2) = 1{,}22$, $E(S_3) = 1{,}08$, $var(S_1) = 0{,}09$, $var(S_2) = 0{,}10$, $var(S_3) = 0{,}01$, $cov(S_1, S_2) = 0{,}006$, $cov(S_1, S_3) = -0{,}004$ a $cov(S_2, S_3) = 0{,}005$. Chceme investovať 100$ a želáme si, aby bol očakávaný výnos aspoň 15 %. Sformulujte úlohu kvadratického programovania na nájdenie portfólia s minimálnou varianciou.

Cvičenie 9.2. Vyriešte nasledujúce úlohy kvadratického programovania Wolfeho metódou.

a)
$$\begin{aligned} \min z &= x_1^2 - 2x_1 - x_2 \\ \text{ak} \quad 2x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \min z &= x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\le 2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1 - 9x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + 2x_2 &\le 2 \\ 3x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1 + 4x_2 \\ \text{ak} \quad x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Cvičenie 9.3. Firma Fruit Computer Company vyrába počítače Pear a Apricot. Ak bude cena týchto počítačov p_1, respektíve p_2, tak sú schopní predať q_1 kusov počítačov Pear a q_2 kusov počítačov Apricot. Vedia, že $p_1 = 4\,000 - 10q_1 + q_2$ a $p_2 = 2\,000 - 9q_2 + 0{,}8q_1$. Na výrobu počítača Pear sú potrebné 2 hodiny práce a 3 čipy. Na Apricot potrebujú 3 hodiny práce a 1 čip. V súčasnosti je k dispozícii 5000 hodín práce a 4500 čipov. Zostavte úlohu kvadratického programovania, ktorá maximalizuje výnos spoločnosti. Potom úlohu vyriešte Wolfeho metódou a určte hornú hranicu sumy, ktorú je spoločnosť ochotná zaplatiť za nadčasy.

Cvičenie 9.4. Firma používa surovinu na výrobu dvoch produktov. V procese výroby sa jedna jednotka suroviny zmení na 2 jednotky výrobku V_1, respektíve na 1 jednotku výrobku V_2. Funkcia dopytu pre V_1 je $p_1 = 49 - x_1$, kde p_1 je cena v dolároch a x_1 je množstvo V_1. Dopyt pre V_2 je $p_2 = 30 - 2x_2$. Jednotka suroviny stojí 5$ a firma má k dispozícii 100 jednotiek suroviny. Sformulujte úlohu matematického programovania maximalizujúcu zisk firmy a vyriešte túto úlohu.

10 GRADIENTNÁ METÓDA

Gradientná metóda

V predchádzajúcich kapitolách sme sa zaoberali metódami a algoritmami, ktorými možno vyriešiť optimalizačnú úlohu buď priamo, alebo po konečnom počte iterácií. Teraz uvedieme metódy, ktoré hľadajú limitné riešenie.

Gradientnou metódou sa riešia optimalizačné úlohy bez ohraničení, čiže

$$\begin{aligned} \operatorname{opt} z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1}$$

kde opt $\in \{\min, \max\}$. Nech je $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ľubovoľný bod z definičného oboru f. Potom vektor

$$\nabla f(A) = \left(\frac{\partial f(A)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(A)}{\partial x_n} \right)$$

nazývame **gradient** funkcie f v bode A. Ak v bode A existujú všetky prvé parciálne derivácie a A je riešením (1), tak je kritickým. Teda

$$\nabla f(A) = (0, 0, \dots, 0).$$

Ak však A nie je riešením (1), tak gradient $\nabla f(A)$ určuje smer vektora s najväčším rastom funkcie f v bode A. Teda keď sa posunieme z bodu A o veľmi malý úsek, najväčší (najmenší) prírastok f dosiahneme, ak sa posunieme v smere (proti smeru) gradientu.

Na tomto pozorovaní je založená gradientná metóda s optimálnym parametrom. Úlohu (1) začneme riešiť v ľubovoľnom bode, povedzme $A_0 = (0, 0, \dots, 0)$. Určíme smer, v ktorom sa máme z tohoto bodu posunúť a nájdeme, o aký úsek sa treba posunúť. Nato budeme potrebovať nájsť extrém funkcie jednej premennej. Dostaneme ďalší bod A_1, v ktorom celú procedúru zopakujeme. Keďže dĺžka gradientu v kritickom bode je 0, iterácie skončíme vtedy, keď bude mať gradient „malú“ dĺžku. Postup podrobnejšie opíšeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 10.1. Nájdite minimum funkcie $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1 + 4x_2$.

Riešenie. Pre $X = (x_1, x_2)$ máme

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \right) = (6x_1 - 6, 8x_2 + 4).$$

Začneme v bode $A_0 = (0,0)$. Tu $\nabla f(A_0) = (-6,4)$, pričom dĺžka gradientu je $||\nabla f(A_0)|| = \sqrt{(-6)^2+4^2} \doteq 7{,}21$. Pre ďalší bod A_1 máme

$$A_1 = A_0 + t\cdot\nabla f(A_0) = (0-6t, 0+4t)$$

pre vhodné t. Keď dosadíme A_1 do f, dostaneme

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 3(0{-}6t)^2 + 4(0{+}4t)^2 - 6(0{-}6t) + 4(0{+}4t) = \\ &= 108t^2 + 64t^2 + 36t + 16t = 172t^2 + 52t. \end{aligned}$$

Nájdeme minimum $f_1(t)$. Platí $f_1'(t) = 344t - 52$ a $f_1'(t) = 0$ pre $t = \frac{-52}{344} = \frac{-13}{86}$. Keďže $f_1''(t) = 344 > 0$, našli sme minimum funkcie f_1. Preto pre ďalší bod máme $A_1 = (0-6\frac{-13}{86}, 0+4\frac{-13}{86}) = (\frac{78}{86}, \frac{-52}{86}) = (\frac{39}{43}, \frac{-26}{43})$. Tým sme ukončili prvú iteráciu gradientnej metódy.

Teraz celú procedúru zopakujeme v bode A_1. Opäť najprv nájdeme gradient. Platí $\nabla f(A_1) = (6\frac{39}{43} - 6, 8\frac{-26}{43} + 4) = (\frac{-24}{43}, \frac{-36}{43})$, pričom dĺžka gradientu je $||\nabla f(A_1)|| \doteq 1{,}01$. Pre bod A_2 máme

$$A_2 = A_1 + t\cdot\nabla f(A_1) = \left(\tfrac{39}{43} - \tfrac{24}{43}t, \tfrac{-26}{43} - \tfrac{36}{43}t\right)$$

pre vhodné t. Keď dosadíme A_2 do f, dostaneme

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 3\left(\tfrac{39-24t}{43}\right)^2 + 4\left(\tfrac{-26-36t}{43}\right)^2 - 6\left(\tfrac{39-24t}{43}\right) + 4\left(\tfrac{-26-36t}{43}\right) = \\ &= \tfrac{1}{43^2}\left(-7\,267 + 1\,872t + 6\,912t^2\right). \end{aligned}$$

Teraz $f_2'(t) = \frac{1}{43^2}(13\,824t + 1\,872)$ a $f_2'(t) = 0$ pre $t = \frac{-1872}{13824} = \frac{-13}{96}$. Keďže pre druhú deriváciu f_2 v t platí $f_2''(t) > 0$, našli sme minimum funkcie f_2. Preto pre ďalší bod máme $A_2 = (\frac{39}{43} + \frac{24}{43}\frac{13}{96}, \frac{-26}{43} + \frac{36}{43}\frac{13}{96}) = (\frac{338}{344}, \frac{-169}{344})$. Tým sme ukončili druhú iteráciu gradientnej metódy. Keďže $||\nabla f(A_2)|| = 0{,}13$, bod A_2 je už „veľmi blízko“ riešeniu danej úlohy. $\square$

Predchádzajúci príklad bolo možné riešiť priamo. Pre kritický bod $A = (a_1, a_2)$ platí $\nabla f(A) = (0,0)$ ak $6a_1 - 6 = 0$ a $8a_2 + 4 = 0$. Z toho dostávame $A = (1, \frac{-1}{2})$. Všimnime si, že $||A - A_2|| \doteq 0{,}02$, čiže bod A_2 je naozaj veľmi blízko optimálneho riešenia.

Metóda prípustných smerov

Táto metóda je v podstate gradientnou metódou pozmenenou pre úlohy s ohraničeniami v tvare nerovníc. Rozoberieme len najjednoduchší prípad maximalizačnej úlohy, keď sú všetky nerovnice lineárne. Našou úlohou bude vyriešiť

$$\max z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\begin{aligned} \text{ak}\quad \mathbb{A}\cdot X &\le B \\ X &\ge 0 \end{aligned}$$

kde $\mathbb{A}$ je matica koeficientov typu $m \times n$, X je stĺpec premenných $x_1, x_2, \dots, x_n$, B je stĺpec konštánt pravej strany a 0 je stĺpec n núl. (Poznamenajme, že keď to bude vhodné, tak symbolom X budeme označovať aj riadok premenných.) Kľúčovým pozorovaním je, že ak pre gradient funkcie f v bode A a nejaký vektor D platí, že skalárny súčin $\nabla f(A) \cdot D > 0$, tak keď sa posunieme z A v smere D o „malý kúsok", tak v novo získanom bode bude hodnota účelovej funkcie f väčšia.

Metóda prípustných smerov pozostáva z inicializácie a z dvoch krokov.

Krok 0 (inicializácia): Nájdeme jedno prípustné riešenie A_0. Keďže všetky ohraničenia sú lineárne, prípustné riešenie môžeme nájsť pomocou dvojfázového simplexového algoritmu).

Krok 1: Pre prípustné riešenie A_i vyriešime úlohu lineárneho programovania

$$\max z_i = \nabla f(A_i) \cdot D_i$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad \mathbb{A} \cdot D_i &\leq B \\ D_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Všimnime si, že ak je D_i riešením tejto úlohy a A_i nie je, tak platí $\nabla f(A_i) \cdot D_i > \nabla f(A_i) \cdot A_i$, čiže $\nabla f(A_i) \cdot (D_i - A_i) > 0$.

Krok 2: Zostrojíme nový bod $A_{i+1} = A_i + t(D_i - A_i)$, kde t je riešením maximalizačnej úlohy jednej premennej

$$\max f(A_i + t(D_i - A_i))$$

$$\text{ak} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Keďže platí

$$\mathbb{A} \cdot A_{i+1} = \mathbb{A} \cdot (A_i + t(D_i - A_i)) = (1-t)\mathbb{A} \cdot A_i + t\mathbb{A} \cdot D_i \leq (1-t)B + tB = B$$

tak A_{i+1} je opäť prípustným riešením. Ďalej pokračujeme krokom 1.

Algoritmus skončíme vtedy, keď budú nasledujúce body „veľmi blízko". Ak je funkcia f konkávna, v každom kroku získame hornú hranicu na riešenie, ktorou je $f(A_i) + \nabla f(A_i)(D_i - A_i)$.

Opísaný postup demonštrujeme na nasledujúcom príklade.

PRÍKLAD 10.2. Vyriešte úlohu matematického programovania

$$\max z = f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

RIEŠENIE. Pre $X = (x_1, x_2)$ máme

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} \right) = (-4x_1 + 2x_2 + 4, 2x_1 - 6x_2 + 6).$$

Keďže bod $A_0 = (0,0)$ vyhovuje ohraničeniam, začneme v tomto bode.

Potom $\nabla f(A_0) = (4,6)$. Teda potrebujeme vyriešiť úlohu

$$\max z = 4d_1 + 6d_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad d_1 + d_2 &\le 2 \\ d_1, d_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Táto úloha má triviálne riešenie $D_0 = (d_1, d_2) = (0,2)$. Pre ďalší bod máme $A_1 = A_0 + t(D_0 - A_0)$. Keďže $f(A_1) = f(0+0, 0+2t) = -12t^2 + 12t$, tak t je riešením

$$\max f(0,2t) = -12t^2 + 12t$$

$$\text{ak} \quad 0 \le t \le 1$$

Tu $f'(t) = 12 - 24t$ a $f''(t) = -24 < 0$, čiže maximum sa nadobúda pre $t = \frac{1}{2}$. Preto $A_1 = A_0 + t(D_0 - A_0) = (0 + \frac{1}{2}0, 0 + \frac{1}{2}2) = (0,1)$. Tu $f(A_1) = -3 + 6 = 3$, pričom horná hranica na riešenie je

$$f(A_0) + \nabla f(A_0)(D_0 - A_0) = f(0,0) + (4,6) \cdot [(0,2) - (0,0)] = 12.$$

Teraz $\nabla f(A_1) = (6,0)$. Teda potrebujeme vyriešiť úlohu

$$\max z = 6d_1 + 0d_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad d_1 + d_2 &\le 2 \\ d_1, d_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Úloha má triviálne riešenie $D_1 = (d_1, d_2) = (2,0)$. Pre ďalší bod máme $A_2 = A_1 + t(D_1 - A_1)$. Keďže $f(A_2) = f(0 + 2t, 1 - t) = -2(2t)^2 - 3(1-t)^2 + 2(2t)(1-t) + 4(2t) + 6(1-t) = -15t^2 + 12t + 3$, tak t je riešením

$$\max f(2t, 1-t) = -15t^2 + 12t + 3$$

$$\text{ak} \quad 0 \le t \le 1$$

Tu $f'(t) = 12 - 30t$ a $f''(t) = -30 < 0$, čiže maximum sa nadobúda pre $t = \frac{2}{5}$. Preto $A_2 = A_1 + t(D_1 - A_1) = (0 + \frac{2}{5}2, 1 - \frac{2}{5}1) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Tu $f(A_2) = -\frac{12}{5} + \frac{24}{5} + 3 = 5{,}4$, pričom horná hranica na riešenie je

$$f(A_1) + \nabla f(A_1)(D_1 - A_1) = f(0,1) + (6,0) \cdot [(2,0) - (0,1)] = 15.$$

Teraz $\nabla f(A_2) = (-4\frac{4}{5} + 2\frac{3}{5} + 4, 2\frac{4}{5} - 6\frac{3}{5} + 6) = (2,4)$. Teda potrebujeme vyriešiť úlohu

$$\max z = 2d_1 + 4d_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad d_1 + d_2 &\le 2 \\ d_1, d_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Aj táto úloha má triviálne riešenie $D_2 = (d_1, d_2) = (0, 2)$. Pre ďalší bod máme $A_3 = A_2 + t(D_2 - A_2) = (\frac{4}{5} - t\frac{4}{5}, \frac{3}{5} + t(2 - \frac{3}{5}))$. Keďže $f(A_3) = f(\frac{4-4t}{5}, \frac{3+7t}{5}) = -2(\frac{4-4t}{5})^2 - 3(\frac{3+7t}{5})^2 + 2\frac{4-4t}{5}\frac{3+7t}{5} + 4\frac{4-4t}{5} + 6\frac{3+7t}{5} = -\frac{47}{5}t^2 + \frac{20}{5}t + \frac{27}{5}$, tak t je riešením

$$\max f(\tfrac{4-4t}{5}, \tfrac{3+7t}{5}) = -\tfrac{47}{5}t^2 + \tfrac{20}{5}t + \tfrac{27}{5}$$

$$\text{ak} \quad 0 \le t \le 1$$

Tu $f'(t) = \frac{20}{5} - \frac{94}{5}t$ a $f''(t) = -\frac{94}{5} < 0$, čiže maximum máme pre $t = \frac{20}{94} = \frac{10}{47}$. Preto $A_3 = A_2 + t(D_2 - A_2) = (\frac{4}{5} - \frac{10}{47}\frac{4}{5}, \frac{3}{5} + \frac{10}{47}\frac{7}{5}) = (\frac{148}{235}, \frac{211}{235})$ Tu $f(A_3) \doteq 5{,}83$, pričom horná hranica na riešenie je

$$f(A_2) + \nabla f(A_2)(D_2 - A_2) = f(\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}) + (2, 4) \cdot [(0, 2) - (\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5})] = \tfrac{47}{5} = 9{,}4.$$

V iteráciách by sme mohli pokračovať, no teraz sa uspokojíme s bodom A_3 a s tým, že pre optimum f^* funkcie f platí $5{,}83 \le f^* \le 9{,}4$. $\square$

Predchádzajúci príklad sa dal riešiť aj pomocou Kuhn-Tuckerových podmienok. Potom by mala úloha tvar

$$\max z = f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad g(x_1, x_2) = 2 - x_1 - x_2 &\ge 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

a bez ohraničení na nezápornosť premenných by sme mali riešiť systém

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} f(A) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_1} g(A) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(A) + \lambda \frac{\partial}{\partial x_2} g(A) &= 0 \\ \lambda\big(g(A)\big) &= 0 \end{aligned}$$

čiže

$$\begin{aligned} -4a_1 + 2a_2 + 4 - \lambda &= 0 \\ 2a_1 - 6a_2 + 6 - \lambda &= 0 \\ \lambda\big(2 - a_1 - a_2\big) &= 0 \end{aligned}$$

Pričom ak $\lambda = 0$, tak riešením je $A = (a_1, a_2) = (1{,}8, 1{,}6)$, čo nevyhovuje ohraničeniam, avšak ak $\lambda > 0$ tak $A = (a_1, a_2) = (1, 1)$ a $\lambda = 2$. Preto je optimálne riešenie $A = (1, 1)$ s hodnotou účelovej funkcie $f(A) = 7$.

Záverom poznamenajme, že v prípade, keď nepožadujeme nezápornosť premenných, tak túto podmienku vypustíme v kroku 1. Takto upravený algoritmus bude riešiť novú úlohu.

Cvičenia

CVIČENIE 10.1. Gradientnou metódou nájdite riešenia úloh

a) $\max z = -(x_1-2)^2 - x_1 - x_2^2$

b) $\max z = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$

c) $\min z = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

d) $\min z = (x_1+x_2)e^{-(x_1+x_2)} - x_1$

CVIČENIE 10.2. Relaxačná metóda spočíva v zlepšovaní daného riešenia postupne v smere všetkých premenných účelovej funkcie. Tieto smery využijeme namiesto gradientu, avšak to, o aký úsek sa máme posunúť, zistíme presne tak isto ako v gradientnej metóde. Vyriešte všetky príklady predchádzajúceho cvičenia pomocou relaxačnej metódy.

CVIČENIE 10.3. Metódou prípustných smerov vyriešte úlohy

a) $\min z = x_1^2 - 2x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad 2x_1 - x_2 &\le 1 \\ x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

b) $\min z = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + x_2 &\le 2 \\ 2x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

c) $\min z = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1 - 9x_2$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + 2x_2 &\le 2 \\ 3x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

d) $\max z = 2x_1x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_1 + 4x_2$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + 2x_2 &\le 5 \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

CVIČENIE 10.4. Obsah trojuholníka je $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pričom a, b a c sú dĺžky jeho strán a $s = \frac{a+b+c}{2}$. Máme k dispozícii 60 metrov pletiva a chceme oplotiť územie tvaru trojuholníka. Pomocou vyššie uvedeného vzorca zistite, ako maximalizovať oplotenú plochu.

CVIČENIE 10.5. Ako sa zmení riešenie predchádzajúceho cvičenia, ak jednou stranou trojuholníka bude breh rieky, takže pletivo použijeme len na zvyšné 2 strany?

11 DUALITA 2

Sedlové body a Lagrangeova funkcia

Majme funkciu $F(X,Y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, kde $X \in \mathbb{R}^n$ a $Y \in \mathbb{R}^m$. Ak pre bod $(A,B) = (a_1, a_2 \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m)$ platí, že $F(A,B) = \min_X F(X,B)$ a zároveň $F(A,B) = \max_Y F(A,Y)$, tak (A,B) nazývame **sedlový bod** funkcie F.

VETA 11.1. *Ak je (A,B) sedlový bod funkcie $F(X,Y): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, tak*

$$\max_{Y\in\mathbb{R}^m} \min_{X\in\mathbb{R}^n} F(X,Y) = F(A,B) = \min_{X\in\mathbb{R}^n} \max_{Y\in\mathbb{R}^m} F(X,Y).$$

DÔKAZ. Najprv si všimnime, že pre každý bod (A',B') platí

$$\min_{X\in\mathbb{R}^n} F(X,B') \le F(A',B') \le \max_{Y\in\mathbb{R}^m} F(A',Y).$$

Pre rôzne Y nadobúda $\min_X F(X,Y)$ rôzne hodnoty. Zvoľme za B' také Y, pre ktoré je $\min_X F(X,Y)$ maximálne. Analogicky, zvoľme za A' také X, pre ktoré je $\max_Y F(X,Y)$ minimálne. Potom

$$\begin{aligned}\max_{Y\in\mathbb{R}^m} \min_{X\in\mathbb{R}^n} F(X,Y) &= \min_{X\in\mathbb{R}^n} F(X,B') \le F(A',B') \le \\ &\le \max_{Y\in\mathbb{R}^m} F(A',Y) = \min_{X\in\mathbb{R}^n} \max_{Y\in\mathbb{R}^m} F(X,Y).\end{aligned}$$

Keďže (A,B) je sedlový bod, platí

$$\begin{aligned}\min_{X\in\mathbb{R}^n} \max_{Y\in\mathbb{R}^m} F(X,Y) &\le \max_{Y\in\mathbb{R}^m} F(A,Y) = F(A,B) = \\ &= \min_{X\in\mathbb{R}^n} F(X,B) \le \max_{Y\in\mathbb{R}^m} \min_{X\in\mathbb{R}^n} F(X,Y),\end{aligned}$$

čo spolu s predchádzajúcou nerovnosťou dáva požadované tvrdenie. $\square$

Uvažujme všeobecnú úlohu matematického programovania

$$\min z = f(X) \tag{P}$$

$$\text{ak} \quad g_i(X) \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

pričom $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. K tejto úlohe zostrojíme **Lagrangeovu funkciu**

$$F(X,Y) = f(X) - \sum_{i=0}^{m} y_i \cdot g_i(X),$$

kde $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ je nezáporný vektor. Potom ak je (A, Λ) sedlový bod funkcie $F(X,Y)$, tak A je riešenie úlohy P. Dokonca platí viac. Ak sú funkcie f a g_i „pekné“ (tieto funkcie sú vždy „pekné“ ak je f konvexná kvadratická funkcia a g_i sú lineárne), tak pre každé riešenie A problému (P) existuje nezáporný vektor Λ taký, že (A, Λ) je sedlovým bodom Lagrangeovej funkcie $F(X,Y)$.

Toto tvrdenie ponúka nové možnosti pre riešenie problému (P). Keby sme poznali druhú zložku sedlového bodu Λ, tak riešením (P) by bol taký vektor A, pre ktorý $F(A,\Lambda) = \min_X F(X,\Lambda)$. Podľa predchádzajúceho, Λ je riešenie úlohy

$$\begin{aligned} & \max z = G(Y) \\ \text{kde} \quad & G(Y) = \min_{X\in\mathbb{R}^n} F(X,Y) \\ \text{a} \quad & Y \geq 0. \end{aligned} \tag{D}$$

Úloha (D) je **duálnou úlohou** k primárnej úlohe (P). Táto duálna úloha je pekná v tom, že má len ohraničenia na nezápornosť premenných. Zatiaľ čo s ohraničeniami primárnej úlohy $g_i(X) \geq 0$ sa pracuje pre zložitejšie funkcie g_i veľmi obtiažne, s ohraničeniami na nezápornosť sa pracuje jednoducho. Problém je vo funkcii $G(Y)$. Tú vo všeobecnom prípade nevieme zostrojiť. Avšak ak sú funkcie f a g_i „pekné“ (pozri poznámku vyššie), tak pre gradient funkcie $G(Y)$ platí

$$\nabla G(Y) = \Big(-g_1(A), -g_2(A), \dots, -g_m(A) \Big),$$

kde A je riešením úlohy $\min_X F(X,Y)$.

Dualita, ako sme ju definovali teraz, nijako nie je v spore s definíciou z kapitoly 4, venovanej lineárnemu programovaniu. Majme primárnu úlohu

$$\begin{aligned} & \min z = C \cdot X^T \\ \text{ak} \quad & \mathbb{A} \cdot X^T \geq B^T, \end{aligned} \tag{PL}$$

kde C a X sú riadkové vektory dĺžky n, B je riadkový vektor dĺžky m a $\mathbb{A}$ je matica typu $m \times n$. V tejto úlohe (podobne ako v úlohe (P) matematického programovania) nepožadujeme nezápornosť premenných. Lagrangeova funkcia má tvar

$$F(X,Y) = C \cdot X^T - Y(\mathbb{A} \cdot X^T - B^T),$$

kde Y je nezáporný riadkový vektor dĺžky m. Potom

$$G(Y) = \min_{X\in\mathbb{R}^n} F(X,Y) = \min_{X\in\mathbb{R}^n} [C \cdot X^T + Y \cdot B^T - Y \cdot \mathbb{A} \cdot X^T] =$$

$$= B \cdot Y^T + \min_{X\in\mathbb{R}^n} \Big[X \cdot (C^T - \mathbb{A}^T \cdot Y^T) \Big] = \begin{cases} B \cdot Y^T & \text{ak} \quad C^T - \mathbb{A}^T \cdot Y^T = 0^T \\ -\infty & \text{inak} \end{cases}$$

kde 0 je nulový riadkový vektor dĺžky n. Teda duálna úloha je

$$\begin{aligned} &\max G(Y) = B \cdot Y^T \\ &\text{ak} \quad \mathbb{A}^T \cdot Y^T = C^T \\ &\quad \text{a} \qquad Y \geq 0. \end{aligned} \tag{DL}$$

respektíve $-\infty$ ak úloha (DL) nemá prípustné riešenie. Všimnime si, že (DL) je duálna k (PL) podľa kapitoly 4.

Uzawova metóda

Ako bolo možné vidieť v predchádzajúcej kapitole, gradientná metóda konverguje veľmi rýchlo, zatiaľ čo metóda prípustných smerov konverguje pomaly. Keď však aplikujeme málo pozmenenú gradientnú metódu na úlohu (D), konvergencia zostane rýchla. Takto dostaneme **Uzawovu metódu**, ktorá je vlastne gradientnou metódou úlohy (D). Touto metódou budú naše čiastkové riešenia v druhej zložke konvergovať k druhej zložke Λ sedlového bodu funkcie $F(X,Y)$, pričom prvé zložky budú konvergovať k optimálnemu riešeniu A primárnej úlohy (P).

Uzawova metóda pozostáva z inicialicácie a z dvoch krokov.

Krok 0 (inicializácia): Zvolíme $\Lambda_0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Neskôr bude Λ_k funkciou ρ, preto píšeme $\Lambda_k(\rho)$.

Krok 1: Položíme za A_k a ρ_{k-1} riešenie úlohy

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n, \rho} F(X, \Lambda_{k-1}(\rho)),$$

pričom po dosadení ρ_{k-1} určíme $\Lambda_{k-1} = \Lambda_{k-1}(\rho_{k-1})$.

Krok 2: Posunieme sa z bodu Λ_{k-1} v smere gradientu, čiže pre už určené $\Lambda_{k-1} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ položíme

$$\Lambda_k = \big(\max\{\lambda_1 - \rho g_1(A_k), 0\}, \max\{\lambda_2 - \rho g_2(A_k), 0\}, \ldots, \max\{\lambda_m - \rho g_m(A_k), 0\}\big)$$

Ďalej pokračujeme krokom 1.

Algoritmus skončíme vtedy, keď budú nasledujúce body „veľmi blízko“.

Výhodou Uzawovej metódy je, že nahrádza úlohu s ohraničeniami postupnosťou úloh bez ohraničení. Táto metóda určite konverguje pre úlohy kvadratického programovania, v ktorých je účelová funkcia konvexná. Avšak konverguje aj v iných prípadoch.

Nasledujúci príklad demonštruje Uzawovu metódu.

Príklad 11.1. Vyriešte úlohu matematického programovania

$$\min z = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 - 3x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} \text{ak} \quad x_1 + x_2 + x_3 &\le 1 \\ x_2 - x_3 &\le 1 \end{aligned}$$

Riešenie. Najprv upravíme nerovnice do štandardného tvaru

$$\begin{aligned} 1 - x_1 - x_2 - x_3 = g_1(x_1, x_2, x_3) &\ge 0 \\ 1 - x_2 + x_3 = g_2(x_1, x_2, x_3) &\ge 0 \end{aligned}$$

Zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2+\tfrac{1}{2}x_2^2+\tfrac{1}{2}x_3^2-3x_2-x_3-\lambda_1(1-x_1-x_2-x_3)-\lambda_2(1-x_2+x_3)$$

V inicializačnom kroku zvolíme $\Lambda_0 = (0, 0)$. Teraz potrebujeme nájsť A_1. Nato by sme mali vyriešiť úlohu

$$\min z = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 - 3x_2 - x_3 - 0(1-x_1-x_2-x_3) - 0(1-x_2+x_3).$$

V kritickom bode (a_1, a_2, a_3) sa všetky prvé parciálne derivácie rovnajú 0, čiže platí

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 - 3 &= 0 \\ a_3 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

a preto je jediným kritickým bodom $(0, 3, 1)$. Keďže Hessián, čiže matica druhých parciálnych derivácií, je identická matica, ľubovoľný kritický bod je minimom. Teda $A_1 = (0, 3, 1)$.

Máme $g_1(A_1) = -3$ a $g_2(A_1) = -1$, a preto

$$\Lambda_1(\rho) = \big(\max\{0-\rho(-3), 0\}, \max\{0-\rho(-1), 0\}\big) = \big(\max\{3\rho, 0\}, \max\{\rho, 0\}\big)$$

čím sme ukončili prvú iteráciu algoritmu.

Teraz nájdeme A_2 vyriešením úlohy

$$\min z = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 - 3x_2 - x_3 - 3\rho(1-x_1-x_2-x_3) - \rho(1-x_2+x_3).$$

V kritickom bode (a_1, a_2, a_3, r) sa všetky prvé parciálne derivácie rovnajú 0, čiže platí

$$\begin{aligned} a_1 + 3r &= 0 \\ a_2 - 3 + 4r &= 0 \\ a_3 - 1 + 2r &= 0 \\ 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 &= 4 \end{aligned}$$

Teraz keď si vyjadríme a_1, a_2 a a_3 pomocou r a takto upravené výrazy dosadíme do štvrtej rovnice, dostávame $r = \frac{10}{29}$. To po dosadení dáva $\Lambda_1 = (\frac{30}{29}, \frac{10}{29})$. Ďalej máme $A_2 = (\frac{-30}{29}, \frac{47}{29}, \frac{9}{29})$, pretože Hessián je opäť identická matica. (Pripomeňme, že Hessián obsahuje druhé parciálne derivácie iba podľa premenných x_1, x_2 a x_3, pozri Kapitolu 7.)

Máme $g_1(A_2) = \frac{3}{29}$ a $g_2(A_2) = \frac{-9}{29}$, a preto

$$\Lambda_2(\rho) = \big(\max\{\tfrac{30}{29}-\rho\tfrac{3}{29}, 0\}, \max\{\tfrac{10}{29}+\rho\tfrac{9}{29}, 0\}\big)$$

čím sme ukončili druhú iteráciu algoritmu.

V ďalšom riešime úlohu

$$\min z = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 + \tfrac{1}{2}x_3^2 - 3x_2 - x_3 - \tfrac{30-3\rho}{29}(1-x_1-x_2-x_3) - \tfrac{10+9\rho}{29}(1-x_2+x_3).$$

V kritickom bode (a_1, a_2, a_3, r) sa všetky prvé parciálne derivácie rovnajú 0, čiže platí

$$\begin{aligned}
a_1 + \tfrac{30}{29} - \tfrac{3}{29}r &= 0\\
a_2 - 3 + \tfrac{40}{29} + \tfrac{6}{29}r &= 0\\
a_3 - 1 + \tfrac{20}{29} - \tfrac{12}{29}r &= 0\\
\tfrac{3}{29}(1-x_1-x_2-x_3) - \tfrac{9}{29}(1-x_2+x_3) &= 0
\end{aligned}$$

Teraz keď si vyjadríme a_1, a_2 a a_3 pomocou r a takto upravené výrazy dosadíme do štvrtej rovnice, dostávame

$$\tfrac{3}{29}(\tfrac{29}{29}-\tfrac{3}{29}r+\tfrac{30}{29}+\tfrac{6}{29}r-\tfrac{47}{29}-\tfrac{12}{29}r-\tfrac{9}{29}) - \tfrac{9}{29}(\tfrac{29}{29}+\tfrac{6}{29}r-\tfrac{47}{29}+\tfrac{12}{29}r+\tfrac{9}{29}) = 0$$

čo po úprave dá $-63r + 30 = 0$, čiže $r = \frac{10}{21}$. Potom

$$\Lambda_2 = \big(\max\{\tfrac{30}{29}-\tfrac{10}{21}\tfrac{3}{29}, 0\}, \max\{\tfrac{10}{29}+\tfrac{10}{21}\tfrac{9}{29}, 0\}\big) = \big(\tfrac{200}{203}, \tfrac{100}{203}\big)$$

Dostávame $A_3 = (\frac{-200}{203}, \frac{309}{203}, \frac{103}{203})$, pretože Hessián je opäť identická matica. V tomto bode algoritmus skončíme, pretože bod A_3 je „veľmi blízko“ predchádzajúceho bodu A_2. Teda bod A_3 prehlásime za približné riešenie úlohy. □

Predchádzajúci príklad sme mohli riešiť aj pomocou Kuhn-Tuckerových podmienok. Tie dávajú rovnice

$$\begin{aligned}
a_1 + \lambda_1 &= 0\\
a_2 - 3 + \lambda_1 + \lambda_2 &= 0\\
a_3 - 1 + \lambda_1 - \lambda_2 &= 0\\
\lambda_1(1-a_1-a_2-a_3) &= 0\\
\lambda_2(1-a_2+a_3) &= 0
\end{aligned}$$

Teraz pre $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ dostávame $A = (0, 3, 1)$, čo je bod, ktorý nevyhovuje ohraničeniam.

Pre $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 > 0$ máme $x_1 = 0$. Sčítaním druhej a tretej rovnice dostávame $x_2 + x_3 = 4$, čo spolu s poslednou rovnicou dáva $A = (0, \frac{5}{2}, \frac{3}{2})$. Ani tento bod nevyhovuje ohraničeniam.

Pre $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 = 0$ sčítaním všetkých štyroch rovníc dostávame $\lambda_1 = 1$ a následne $A = (1, 2, 0)$, čo opäť nevyhovuje ohraničeniam.

Zostáva prípad $\lambda_1 > 0$ a $\lambda_2 > 0$. Vyriešením sústavy piatich lineárnych rovníc s piatimi neznámymi dostávame riešenie $A = (-1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ pri $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Pre bod A_3 z predchádzajúceho príkladu máme $||A_3 - A|| \doteq 0{,}028$.

V predchádzajúcej kapitole sme Príklad 10.2 riešili metódou prípustných smerov a konvergencia bola veľmi pomalá. Ukážeme, ako si s týmto príkladom poradí Uzawova metóda.

Príklad 11.2. Vyriešte úlohu matematického programovania

$$\max z = f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_1x_2 + 4x_1 + 6x_2$$

$$\begin{aligned} \text{ak}\quad x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Riešenie. Úlohu budeme riešiť bez podmienok na nezápornosť premenných. Až keby nám riešenie vychádzalo záporné v niektorej premennej, pridáme ohraničenie na nezápornosť. Budeme teda riešiť úlohu

$$\min -z = -f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$$

$$\text{ak}\quad g(x_1, x_2) = 2 - x_1 - x_2 \ge 0$$

Lagrangeovou funkciou bude

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 - \lambda(2-x_1-x_2)$$

V inicializačnom kroku zvolíme $\Lambda_0 = 0$. Teraz potrebujeme nájsť A_1. Nato vyriešime úlohu

$$\min -z = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 - 0(2-x_1-x_2)$$

V kritickom bode (a_1, a_2) sa všetky prvé parciálne derivácie rovnajú 0, čiže platí

$$\begin{aligned} 4a_1 - 2a_2 - 4 &= 0 \\ -2a_1 + 6a_2 - 6 &= 0 \end{aligned}$$

a preto je jediným kritickým bodom $(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$. Keďže Hessián je matica

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

ktorej prvý minor má hodnotu 4 a druhý 20, v kritickom bode je minimum, a teda $A_1 = (\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$.

Máme $2-\frac{9}{5}-\frac{8}{5}=-\frac{7}{5}$, a preto

$$\Lambda_1(\rho)=\big(\max\{0-\rho(-\tfrac{7}{5}),0\}\big)=\big(\max\{\tfrac{7}{5}\rho,0\}\big)$$

čím sme ukončili prvú iteráciu algoritmu.

Teraz nájdeme A_2 vyriešením úlohy

$$\min -z=2x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2-\tfrac{7}{5}\rho(2-x_1-x_2)$$

V kritickom bode (a_1,a_2,r) sa všetky prvé parciálne derivácie rovnajú 0, čiže platí

$$\begin{aligned} 4a_1-2a_2-4+\tfrac{7}{5}r&=0\\ -2a_1+6a_2-6+\tfrac{7}{5}r&=0\\ -2+a_1+a_2&=0 \end{aligned}$$

a preto je jediným kritickým bodom $(1,1,\frac{10}{7})$. To dáva $\Lambda_1=\max\{\frac{7}{5}\frac{10}{7},0\}=2$ a $A_2=(1,1)$, pretože Hessián je tá istá matica ako pri prvej iterácii.

Máme $2-1-1=0$, a preto

$$\Lambda_2(\rho)=\big(\max\{2-\rho 0,0\}\big)=(2).$$

To znamená, že budeme riešiť tú istú úlohu ako v predchádzajúcom a dostávame stacionárny bod algoritmu. Teda bod $A_2=(1,1)$ je riešením úlohy pri tieňovej cene ohraničenia $\lambda=2$. Toto riešenie je presne to, ktoré sme našli pomocou Kuhn-Tuckerových podmienok v predchádzajúcej kapitole. $\square$

Cvičenia

Cvičenie 11.1. Vyriešte úlohu z Príkladu 11.2 s podmienkami na nezápornosť premenných.

Cvičenie 11.2. Uzawovou metódou vyriešte úlohy

a) $$\begin{aligned} \min z&=x_1^2-2x_1-x_2\\ \text{ak}\quad 2x_1-x_2&\le 1\\ x_1+x_2&\le 1\\ x_1,x_2&\ge 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \min z&=x_1^2+x_2^2-4x_1-4x_2\\ \text{ak}\quad x_1+x_2&\le 2\\ 2x_1+x_2&\le 3\\ x_1,x_2&\ge 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \min z&=2x_1^2+3x_2^2-8x_1-9x_2\\ \text{ak}\quad x_1+2x_2&\le 2\\ 3x_1+x_2&\le 3\\ x_1,x_2&\ge 0 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \max z&=2x_1x_2-2x_1^2-3x_2^2+3x_1+4x_2\\ \text{ak}\quad x_1+2x_2&\le 5\\ 2x_1+x_2&\le 4\\ x_1,x_2&\ge 0 \end{aligned}$$

CVIČENIE 11.3. Nájdite maximum funkcie $f(x_1, x_2) = e^{-x_1} + e^{-2x_2}$ pri ohraničení $x_1 + x_2 \leq 1$, ak majú byť obidve premenné nezáporné, pomocou Uzawovej metódy.

CVIČENIE 11.4. Nájdite maximum kvadratickej funkcie troch premenných $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 4x_2 + 6x_3$ pri ohraničeniach $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6$ a $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 9$, pomocou Uzawovej metódy.

Index

Literatúra

[1] BUDINSKÝ P., CHARVÁT J.: *Matematika 1.* SNTL, Praha 1987.

[2] CIARLET P.G.: *Introduction to numerical linear algebra and optimisation.* Cambridge University Press, Cambridge 1989.

[3] ELIÁŠ J., HORVÁTH J., KAJAN J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 3.* Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry, Bratislava 1965.

[4] HAMALA M.: *Nelineárne programovanie.* Alfa, Bratislava 1972.

[5] HARSHBARGER R.J., REYNOLDS J.J.: *Calculus with applications.* D. C. Heath and Company, Lexington, Massachusetts 1990.

[6] IVAN J.: *Matematika 2.* Alfa, Bratislava 1989.

[7] KOMORNÍK J., KOMORNÍKOVÁ M., MIKULA K.: *Modelovanie ekonomických a finančných procesov.* Univerzita Komenského, Bratislava 1998.

[8] TOMA V.: *Teória a algoritmy lineárneho programovania.* Univerzita Komenského, Bratislava 1983.

[9] WINSTON W.L.: *Operations research.* 2nd ed., PWS-KENT Publishing Company, Belmont, California 1991.

Obsah