

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Stavebná fakulta
Katedra kovových a drevených konštrukcií

Ing. Michal Kováč

VZPERNÁ ODOLNOSŤ KOVOVÝCH PRÚTOV
A PRÚTOVÝCH KONŠTRUKCIÍ

APLIKÁCIE NOVÝCH METÓD Z EUROKÓDOV

Dizertačná práca z vedného odboru teória a konštrukcie
inžinierskych stavieb

Školiteľ: prof. Ing. Ivan Baláž, PhD.

Bratislava, Apríl 2010

POĎAKOVANIE

Rád by som sa poďakoval svojmu školiteľovi prof. Ing. Ivanovi Balážovi, PhD. za jeho odborné vedenie, cenné rady, návrhy a pripomienky pri vypracovávaní dizertačnej práce. Zároveň by som sa chcel poďakovať Ing. Mikulášovi Martinčekovi CSc. za pomoc pri zostavovaní programu.

ABSTRAKT

V súčasnosti zavádzaných európskych normách pre navrhovanie kovových konštrukcií sú zahrnuté niektoré metódy, ktoré sa v nahrádzaných normách nenachádzali. Preto tieto metódy zatiaľ neboli dostatočne používané nato, aby sa overila ich správnosť (výstižnosť). Úlohou prvej časti práce je overenie správnosti a zhodnotenie približnej metódy výpočtu kritickej osovej sily pri priestorovej strate stability tenkostenného, centricky tlačeného prúta. Táto metóda vychádza z približného riešenia sústavy diferenciálnych rovníc (vyjadrujúcich podmienky rovnováhy prúta), ktoré odvodil vo svojej práci Vlasov [1]. Pre potrebu výpočtu väčšieho množstva kritických síl bol zostrojený vlastný výpočtový program na základe metódy konečných prvkov (MKP). Druhá časť práce sa venuje vzpernej odolnosti hliníkových prútov s priečnymi alebo pozdĺžnymi zvarmi podľa normy [11]. Vzhľadom na zníženie pevnosti hliníka v teplom ovplyvnenej oblasti od zvarovania sú tu určité špecifiká. Okrem toho je tu zavedená metóda efektívnej hrúbky prvku prierezu na rozdiel od metódy efektívnej šírky prvku prierezu, ktorá sa používa pri oceli. V tretej časti práce sa analyzuje metóda posudzovania vzpernej odolnosti prútov s nekonštantným prierezom a/alebo s nekonštantnou osovou silou a rámov z takýchto prútov zložených na základe analýzy teóriou II. rádu s imperfekciou odvodenou od vlastného tvaru vybočenia prúta/rámu. Začiatočná globálna a lokálna imperfekcia sa v tvare ekvivalentnej geometrickej imperfekcie odvádza od vlastného tvaru straty stability prúta alebo rámu v pružnom stave. Vzhľadom na možnosť použitia tejto metódy aj pri prútoch s konštantným prierezom a osovou silou a rámoch z nich zložených, sa v poslednej časti práce nachádza porovnanie s ostatnými metódami posudzovania vzpernej odolnosti nachádzajúcimi sa v norme [10].

ABSTRACT

The European standards for design of steel and aluminum constructions being implemented in the present contain some of the methods that were missing in the former standards. Therefore, these methods have not been used sufficiently yet in order to verify their correctness (accuracy). The aim of the first part of this work is to evaluate and verify of correctness of an approximate method of calculating critical force in the case of a torsional-flexural buckling of a thin-walled, centrally compressed member. This method is based on an approximate solution of a system of differential equations (expressing the equations of equilibrium of a member) that were derived by Vlasov in his thesis [1]. In order to be able to calculate a bigger amount of critical forces, a computing program based on the finite element method was created. The second part of the work deals with buckling resistance of longitudinally or transversally welded aluminum members according to the standard [11]. Regarding to a reduction in strength properties of aluminum in a heat affected zone (HAZ) caused by welding, there are certain particularities. Besides this, the method of effective thickness of an element's cross-section is implemented here, what is different from the method used in the case of steel members, where effective width of an element's cross-section is used. In the third part of the work the method of verifying buckling resistance of members with a non-uniform cross-section and/or with a non-uniform axial compression force (and frames containing this kind of members) is being analyzed. This method is based on the second order theory with an imperfection derived according to a buckling mode of a member or frame in an elastic condition. According to the possibility to use this method also in the case of members with a uniform cross-section and a uniform axial force and frames containing these members, there is a comparison with other methods of verifying buckling resistance from the standard [10].

OBSAH

ABSTRAKT	3
ABSTRACT	4
OBSAH	5
ZOZNAM POUŽITÝCH ZNAČIEK A SYMBOLOV	7
1. ÚVOD	13
CIELE A TÉZY DIZERTAČNEJ PRÁCE	14
2. VÝVOJ PROBLEMATIKY STABILITY PRÚTOV – HISTORICKÝ PREHĽAD	15
3. STABILITA TENKOSTENNÝCH CELISTVÝCH CENTRICKY TLAČENÝCH PRÚTOV	17
3.1 VZPER TENKOSTENNÝCH CELISTVÝCH CENTRICKY ZAŤAŽENÝCH PRÚTOV	17
3.2 RIEŠENIE SÚSTAVY (3.4) PRIBLIŽNOU METÓDOU	21
3.2.1 Riešenie sústavy (3.4) pri totožných okrajových podmienkach v ohyboch a v krútení odpovedajúcich prostému uloženiu	21
3.2.2 Riešenie sústavy pri rôznych okrajových podmienkach v ohyboch a v krútení	22
3.3 RIEŠENIE PRIESTOROVEJ STABILITY PRÚTA POMOCOU MKP	28
3.3.1 Riešenie sústavy (3.4) MKP- prútový model	28
3.3.1.1 Diskretizácia prúta a aproximačný polynóm	28
3.3.1.2 Slabá formulácia, elementová a globálna sústava rovníc	29
3.3.1.3 Problém vlastných čísel a vektorov	34
3.3.2 Zadanie príkladu	34
3.3.3 Riešenie MKP- škrupinový model v programe ANSYS	35
3.4 POROVNANIE RIEŠENIA MKP PRÚTOVÝM, ŠKRUPINOVÝM MODELOM A PRIBLIŽNOU METÓDOU	41
3.5 POROVNANIE KRITICKÝCH SÍL PRÚTOV PRE VYBRANÉ KOMBINÁCIE OKRAJOVÝCH PODMIENOK VYPOČÍTANÝCH MKP PRÚTOVÝM MODELOM A PRIBLIŽNOU METÓDOU	45
3.6 ZÁVER	62
4. ODOLNOSŤ TLAČENÝCH PRÚTOV Z HLINÍKOVÝCH ZLIATIN SO ZVARMÍ 64	64
4.1 VZPERNÁ ODOLNOSŤ PRÚTOV Z HLINÍKOVÝCH ZLIATIN PODĽA [11]	64
4.2 POZDĹŽNE ZVARY	65
4.4 ZÁVER	71
5. VZPERNÁ ODOLNOSŤ RÁMOV A PRÚTOV S NEKONŠTANTNÝM PRIEBEHOM OSOVEJ SILY A/ALEBO S PREMENNÝM PRIEREZOM	73
5.1 PRÚTY S NEKONŠTANTNÝM PRIEBEHOM OSOVEJ SILY A/ALEBO OHYBOVEJ TUHOSŤI (PREMENNÝM PRIEREZOM)	73
5.2 VZPERNÁ ODOLNOSŤ RÁMOV S PRÚTMÍ S PREMENNOU OSOVOU SILOU A/ALEBO OHYBOVOU TUHOSŤOU (PREMENNÝM PRIEREZOM)	75
5.3 RIEŠENIE VLASTNÝCH ČÍSIEL A TVAROV ROVNICE (5.1) S NEKONŠTANTNÝMI KOEFICIENTMI POMOCOU DIFERENČNEJ METÓDY	80
5.4 ILUSTRATÍVNE PRÍKLADY	84
5.4.1 Príklad 1	84
5.4.2 Príklad 2	87
5.5 ZÁVER	89
6. POSUDZOVANIE VZPERNEJ ODOLNOSTI RÁMOV PODĽA METÓD Z STN EN 1993-1-1 [10]	91
6.1 GLOBÁLNA ANALÝZA PODĽA [10]	91

6.2 IMPERFEKCIE PODĽA [10]	92
6.3 METÓDY POSUDZOVANIA VZPERNEJ ODOLNOSTI PODĽA [10]	94
6.3.1 Globálna analýza na základe teórie II. rádu a posúdenie prierezo	94
6.3.2 Globálna analýza na základe teórie II. rádu a posúdenie prútov vyrezaných z konštrukcie	94
6.3.3 Globálna analýza na základe teórie I. rádu a posúdenie náhradného prúta.....	95
6.3.4 Všeobecná metóda pre stratu stability konštrukčných prvkov ohybom z roviny alebo stratu stability klopením	95
6.3.5 Porovnávací výpočet posúdení rámu v rovine podľa metód v [10]	96
6.3.6 Porovnávací výpočet posúdení stability v rovine a z roviny rámu podľa metód v [10] .	98
6.4 ZÁVER.....	100
7. ZÁVERY	102
PRÍNOS PRÁCE PRE VEDU A PRAX	105
ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY	106
ZOZNAM POUŽITÝCH PROGRAMOV	107
ZOZNAM PUBLIKOVANÝCH PRÁC AUTORA.....	108
ZOZNAM CITÁCIÍ AUTORA	108
ZOZNAM PRÍLOH.....	109

ZOZNAM POUŽITÝCH ZNAČIEK A SYMBOLOV

Kapitola 3

N_{cr}	kritická sila pri strate stability ohybom v rovine osi symetrie prierezu v pružnom stave
N_n	osové sily charakterizujúce stavy rozdvojenia rovnováhy prúta
n	počet polovln sínusoidy
EI	ohybová tuhosť pri ohybe v rovine osi symetrie prierezu
L	dĺžka prúta
w	priehyb v smere osi symetrie prierezu v (3.2)
w	deformácia (priehyb) prúta v smere hlavnej osi z prierezu v (3.4)
v	deformácia (priehyb) prúta v smere hlavnej osi y prierezu v (3.4)
x, y	hlavné ťažiskové osi prierezu podľa Vlasovovej konvencie v (3.3)
z	pozdlžna ťažisková os prúta podľa Vlasovovej konvencie v (3.3)
y, z	hlavné ťažiskové osi podľa konvencie v Eurokóde (použitá v tejto práci)
x	pozdlžna ťažisková os prúta podľa konvencie v Eurokóde (použitá v tejto práci)
N, P	osová sila
ρ	polomer krivosti priehybovej krivky
ξ, η	premiestnenie prierezu v smere osi x resp. y podľa Vlasovovej súradnicovej konvencie
θ	pootočenie prierezu podľa Vlasovovho značenia
EI_y, EI_z	ohybové tuhosti prierezu k hlavným ťažiskovým osiam prierezu
GI_d, GI_t	tuhosť vo voľnom krútení
I_d, I_t	moment zotrvačnosti vo voľnom krútení (Saint-Venantov)
I_ω	výsekový moment zotrvačnosti
EI_ω	tuhosť vo viazanom krútení
E, G	modul pružnosti v ťahu resp. v šmyku
β_x, β_y	geometrické veličiny závislé od tvaru prierezu vo Vlasovovej súradnicovej konvencii v (3.3): $\beta_x = \frac{U_y}{2I_y} - a_x$; $\beta_y = \frac{U_x}{2I_x} - a_y$;
U_x, U_y	geometrické veličiny prierezu (momenty tretieho rádu) v (3.3) $U_x = \int_A y(x^2 + y^2) dA$; $U_y = \int_A x(x^2 + y^2) dA$;
M_x, M_y	koncové ohybové momenty vo Vlasovovej súradnicovej konvencii v (3.3)
a_x, a_y	súradnice stredu šmyku vzhľadom na ťažisko prierezu (Vlasovovo značenie v (3.3))
z_s, y_s	súradnice stredu šmyku vzhľadom na ťažisko prierezu k hlavným osiam prierezu
r, i_s	polárny polomer zotrvačnosti prierezu vzhľadom na stred šmyku $i_s = \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A} + y_s^2 + z_s^2}$
I_y, I_z	momenty zotrvačnosti prierezu k hlavným ťažiskovým osiam prierezu
\mathcal{G}	skrútenie prierezu
A, B, C	konštanty v (3.7), (3.8) a (3.11)~(3.13)

$N_{cr,y}, N_{cr,z}$	kritické sily pri vybočení ohybom v rovinách kolmých na hlavné osi y a z prierezu (určované pomocou Eulerovho vzťahu aj v prípade, keď nastáva priestorové vybočenie prúta, pre ohybové tuhosti EI_y, EI_z a pre kritické dĺžky odpovedajúce uloženiu prúta v rovine príslušnej k hlavnej osi prierezu)
$N_{cr,T}$	kritická sila príslušná strate stability skrútením
$\chi(x), \varphi(x), \psi(x)$	fundamentálne funkcie v (3.11)~(3.15)
$k_{11}, k_{22}, k_{33}, k_{13}, k_{31}, k_{23}, k_{32}, k_{ii}, k_{ij}$	bezrozmerné veličiny zohľadňujúce okrajové podmienky prúta v ohybe v rovinách hlavných osí prierezu a v krútení
$\beta_y, \beta_z, \beta_w$	súčinitele vzperných dĺžok pri strate stability ohybom kolmo na os y, z a pri strate stability skrútením
k_y, k_z, k_w	súčinitele vzperných dĺžok pri strate stability ohybom kolmo na os y, z a pri strate stability skrútením (značenie v Eurokódoch)
α_{yw}, α_{zw}	súčinitele vyjadrujúce vplyv rôznych okrajových podmienok v ohybe a krútení
$N_{cr,TF}$	kritická sila pri priestorovej strate stability vypočítaná približnou metódou
$\beta_{VL.vlk}, \beta_{vlk}$	súčinitele "vzperných" dĺžok vypočítané z vlastných tvarov priečneho kmitania pri použití Vlasovovho vzorca (str.347 [1]) resp. pri použití tu odvodených vzorcov (3.14) pre koeficienty k_{ii} a vzorca (3.21)
β_{stab}	súčinitele vzperných dĺžok vypočítané z vlastných tvarov straty stability pri použití tu odvodených vzorcov (3.14) pre koeficienty k_{ii} a vzorca (3.21)
$C_1 \sim C_4$	koeficienty polynomickej aproximácie
w_b, v_b, ϑ_b	premiestnenia v smere osi z, y a skrútenie začiatočného prierezu elementu
w_e, v_e, ϑ_e	premiestnenia v smere osi z, y a skrútenie koncového prierezu elementu
$\varphi_{wb}, \varphi_{vb}, \varphi_{\vartheta b}$	prvé derivácie priebehov premiestnení v smere osi z, y a priebehu skrútenia v začiatočnom bode elementu (sekundárne neznáme v začiatočnom bode el.)
$\varphi_{we}, \varphi_{ve}, \varphi_{\vartheta e}$	prvé derivácie priebehov premiestnení v smere osi z, y a priebehu skrútenia v koncovom bode elementu (sekundárne neznáme v koncovom bode elementu)
$\psi_1(x) \sim \psi_4(x)$	bázové funkcie
$u(x)$	váhová (testovacia) funkcia
k_1, k_2	elementové matice
$\{\delta_{el}\}$	vektor primárnych a sekundárnych neznámych elementu
$\{\delta\}$	vektor primárnych a sekundárnych neznámych prúta
$[a], [b]$	matice sústavy rovníc elementu
$[A], [B]$	globálne matice sústavy rovníc prúta
K_1, K_2	matice prúta
$[A'], [B']$	globálne matice sústavy rovníc prúta s aplikovanými okrajovými podmienkami
$\{\delta'\}$	vektor primárnych a sekundárnych neznámych prúta s aplikovanými okrajovými podmienkami
α_{cr}	koeficient rozdvojenia rovnováhy, najmenšie vlastné číslo (prislúchajúce prvému vlastnému tvaru)
ν	Poissonove číslo
$\{\lambda\}$	vektor vlastných čísiel
$N_{cr,MKP}$	kritická sila priestorového vzperu vypočítaná vo vlastnom programe pomocou MKP použitím prútového modelu

$N_{cr,TF\alpha 1}$	kritická sila priestorového vzperu vypočítaná približnou metódou z (3.20) pri priereze s jednou osou symetrie pri položení $\alpha_{zw} = 1$ resp. riešením N z rovnice (3.18a) pri nesymetrickom priereze pre $\alpha_{yw} = \alpha_{zw} = 1$
L_p L_{yT}, L_{zT}	dĺžka pri ktorej sa kritické sily príslušné zložkám priestorového vzperu rovnajú dĺžka prútu pri ktorej je kritická sila $N_{cr,y}$ resp. $N_{cr,z}$ rovná kritickej sile $N_{cr,T}$

Kapitola 4

$N_{b,Rd}$	vzperná odolnosť prúta
A_{eff}	efektívna plocha prierezu s ohľadom na lokálne vydúvanie a vplyv mäknutia v teplom ovplyvnenej oblasti (HAZ) od pozdĺžnych zvarov
κ	súčiniteľ zohľadňujúci vplyv zvarov
χ	súčiniteľ vzperu
f_o	charakteristická hodnota dohovorenej medze klzu pre hliníkovú zliatinu
α	miera imperfekcie
$\bar{\lambda}$	pomerná štíhlosť
ρ_c	redukčný faktor pre lokálnu stratu stability
$t_{eff,haz}$	efektívna hrúbka s ohľadom na mäknutie v HAZ a lokálnu stratu stability
$f_{o,haz}$	charakteristická hodnota dohovorenej medze klzu v HAZ
$\rho_{o,haz}$	pomer hodnoty charakteristickej dohovorenej medze klzu v HAZ a mimo HAZ
A_{HAZ}	plocha teplom ovplyvnenej oblasti v priereze od pozdĺžnych zvarov
A_1	pomocná plocha (ktorej prenasobením f_o dostaneme charakteristickú odolnosť v tlaku prierezu s pozdĺžnym zvarom)
A	prierezová plocha
p_A	pomer A_1/A
w_0	amplitúda celkového priehybu
η_o	amplitúdy prídavného priehybu vyplývajúceho z teórie II. rádu
W	prierezový modul
x_s	vzdialenosť prierezu od inflexného bodu
γ_{M1}	parciálny súčiniteľ spoľahlivosti pre odolnosť prútov pri posudzovaní straty stability prúta
N_{Ed}	návrhová hodnota osovej sily
l_c	vzperná dĺžka (značenie použité podľa [11] a [3])
$f_{u,haz}$	charakteristická pevnosť materiálu hliníkovej zliatiny v HAZ
f_u	charakteristická pevnosť materiálu hliníkovej zliatiny
$\rho_{u,haz}$	pomer charakteristických pevností hliníkovej zliatiny v mieste a mimo HAZ
ω_0	faktor pre prierez s priečnym zvarom
$N_{c,Rd,w}$	návrhová odolnosť prierezu v tlaku v mieste priečného zvaru
$N_{b,Rd,w}(x_s)$	návrhová vzperná odolnosť tlačeneho prúta určená na základe prierezu so zvarom v mieste x_s
$f(\chi, x_s)$	interpolačná funkcia

γ_{M2}	parciálny súčiniteľ spoľahlivosti pre odolnosť priereзов namáhaných ťahom pri porušení pretrhnutím
$\bar{\lambda}_{haz}$	pomerná štiňlosť pre prierez s priečnym zvarom
χ_{haz}	súčiniteľ vzperu určený pre $\bar{\lambda}_{haz}$

Kapitola 5

$w_0(x)$	priebeh začiatočnej imperfekcie v rovine symetrie prierezu v (5.1)~(5.8)
$w(x)$	priehyb prúta (v uvažovanej rovine symetrie prierezu) v (5.1) a (5.2), prídavný priehyb prúta (v uvažovanej rovine symetrie prierezu) v (5.3)~(5.8)
$\eta_{cr}(x)$	vlastný tvar vybočenia prúta resp. rovinatej konštrukcie normovaný pre amplitúdu rovnú 1
$\eta_{init}(x)$	funkcia priebehu imperfekcie zvolenej v tvare afínnom vlastnému tvaru v pružnom stave
$\eta_{0,init}$	amplitúda imperfekcie $\eta_{init}(x)$
$\eta(x)$	priebeh prídavného priehybu (deformácie) prúta v zmysle teórie II. rádu (ktorý vzniká pôsobením osových síl na prúte s imperfekciou $\eta_{init}(x)$)
η_0, η_{max}	amplitúda prídavného priehybu
$N_{Rd}(x), M_{Rd}(x)$	návrhové odolnosti prierezu v tlaku a v ohybe
$M_{Ed,init}^{II}(x)$	priebeh ohybových momentov prúta vznikajúcich pri prídavnom priehybe počítaný teóriou II. rádu
$M_{Ed,init,m}^{II}(x_m)$	ohybový moment prúta v reze x_m určený teóriou II. rádu
$M_{Ed,nahr.p}^{II}(L_n/2)$	ohybový moment v strede náhradného prúta určený teóriou II. rádu
$N_{Ed}(x)$	priebeh osových síl
$EI_m; N_{Ed,m}; N_{Rd,m}; M_{Ed,init,m}^{II}; M_{Rd,m}$	veličiny v reze x_m
x_m	rozhodujúci prierez prúta
e_0	amplitúda imperfekcie (v tvare polovlny sínusoidy) náhradného prúta
$M_{\eta_{cr},m}$	ohybový moment v priereze x_m prúta, ktorý je zdeformovaný do prvého vlastného tvaru (s amplitúdou rovnou 1)
α_{cr}	koeficient rozdvojenia rovnováhy prúta/rámu v rovine príslušný prvému vlastnému tvaru v pružnom stave
L_n	dĺžka náhradného prúta
$N_{Rk}(x), M_{Rk}(x)$	charakteristické odolnosti prierezu v tlaku a v ohybe
α	miera imperfekcie náhradného prúta
$\bar{\lambda}$	pomerná štiňlosť náhradného prúta
N_{cr}	kritická sila náhradného prúta pre prvý vlastný tvar
$N_{cr,m}$	hodnota kritickej sily v reze x_m vyšetřovaného prúta
$N_{Rk,m}(x), M_{Rk,m}(x)$	charakteristické odolnosti prierezu v tlaku a v ohybe v reze x_m vyšetřovaného prúta
k	pomer medzi momentom vypočítaným teóriou II. rádu a momentom teórie I. rádu

$\bar{\lambda}_m, \chi_m$	pomerná štíhlosť a súčiniteľ vzperu vypočítané pre parametre z prierezu x_m
α_m	miera imperfekcie určená pre tvar prierezu prúta v rozhodujúcom reze x_m
$e_{0,d}$	amplitúda imperfekcie náhradného prúta - značenie podľa normy [13]
$M_{Ed}^{II}(x)$	ohybové momenty prúta od vonkajšieho zaťaženia určené teóriou II. rádu
h	dĺžka kroku pri ekvidistantnom delení prúta
$dN_{dx,i}$	hodnota derivácie osovej sily v uzle i
$\dots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots$	priehyby w v mieste $\dots x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$
EI_i, N_i	ohybová tuhosť prierezu resp. osová sila v mieste x_i
$[M]$	matica sústavy rovníc
$\{w\}$	vektor hľadaných priehybov prúta
$[M'_{EI}]$	matica s argumentmi a_i týkajúcich sa ohybových tuhostí EI_i
$[M'_{dN}]$	matica s argumentmi b_i týkajúcich sa derivácií osových síl $dN_{dx,i}$
$[M'_{N}]$	matica s argumentmi c_i týkajúcich sa osových síl N_i
$[M_{okr.pod.}]$	matica zohľadňujúca okrajové podmienky prúta
$\{\alpha\}$	vektor vlastných čísiel
α_i	i -te vlastné číslo z vektora $\{\alpha\}$, charakterizujúce stav rozdvojenia rovnováhy
$\{\eta\}_i$	vektor i -teho vlastného tvaru príslušného vlastnému číslu α_i
$\{VPS\}$	vektor pravých strán nehomogénnych rovníc skutočného prúta s imperfekciou
U_M, U_N, U	využitie v jednotlivých rezoch prúta od ohybových momentov resp. od osovej sily a celkové využitie
$x_{\eta,max}$	poloha maximálnej poradnice vlastného tvaru
$x_{max M}$	poloha maximálneho momentu teórie II. rádu na vyšetřovanom prúte
$x_{max \sigma_M}$	poloha maximálneho napätia od momentov teórie II. rádu na vyšetřovanom prúte

Kapitola 6

F_{cr}	kritické zaťaženie pre stratu stability v pružnom stave s globálnym vlastným tvarom, vypočítané pre začiatočné tuhosti
V_{Ed}	celkové návrhové zvislé zaťaženie konštrukcie v dolnej úrovni podlažia
H_{Ed}	návrhová hodnota vodorovnej reakcie v dolnej úrovni podlažia od vodorovných zaťažení a fiktívnych vodorovných zaťažení
$\delta_{H,Ed}$	relatívne vodorovné posunutie v hornej úrovni podlažia vzťahnuté na dolnú úroveň podlažia, pri zaťažení prútovej konštrukcie vodorovnými zaťaženiami a fiktívnymi vodorovnými zaťaženiami
h	výška podlažia
ϕ	začiatočné globálne naklonenie stĺpov
ϕ_0	základná hodnota naklonenia stĺpov
α_h, α_m	zmenšovacie faktory
$e_{0,d}$	návrhová hodnota lokálneho začiatočného zakrivenia prúta v (6.7)
L	dĺžka prúta

$\alpha_{ult,k}$	najmenšia hodnota zväčšovacieho faktora, ktorého prenasobením návrhové zaťaženie dosiahne charakteristickú odolnosť rozhodujúceho prierezu konštrukčného prvku pri zohľadnení pôsobenia prvku v rovine zaťaženia, bez zohľadnenia straty stability ohybom z roviny a straty stability klopením, avšak so zohľadnením všetkých účinkov spôsobených príslušnými globálnymi a lokálnymi pretvoreniami a imperfekciami v rovine zaťaženia
χ_{op}	súčiniteľ vzperu z roviny pre pomernú štíhlosť $\bar{\lambda}_{op}$
$\bar{\lambda}_{op}$	pomerná štíhlosť so zohľadnením straty stability ohybom z roviny a straty stability klopením
$\alpha_{cr,op}$	najmenšia hodnota zväčšovacieho faktora, ktorého prenasobením návrhové zaťaženie v rovine dosiahne hodnotu kritického zaťaženia konštrukčného prvku v pružnom stave, ktoré zodpovedá strate stability ohybom z roviny alebo strate stability klopením, so stratou stability ohybom v rovine zaťaženia sa neráta

1. ÚVOD

Pri návrhu kovových konštrukcií sa často stretávame s prúťovými prvkami namáhanými tlakovou osovou silou. Oceľ ako konštrukčný materiál s vysokou pevnosťou nám umožňuje tieto prvky navrhovať značne subtlne. Práve pri subtlných prvkoch namáhaných na tlak začína vzper ako stabilitný problém nepriaznivo ovplyvňovať odolnosť prúťov. Posúdenie vzpernej odolnosti v súčasných normách je riešené ako pevnostný problém, pričom sa opiera o hodnotu kritickej sily straty stability v pružnom stave ako o jeden zo základných parametrov. V praxi sa stretávame s prúťmi s tenkostennými prierezmi nielen dvojoso symetrickými, ale aj s prierezmi s jednou alebo bez osi symetrie. Pre prúťy s prierezom s jednou osou symetrie je možný rovinný i priestorový tvar straty stability. Pri centricky zaťažených prúťoch s nesymetrickým prierezom je možný iba priestorový tvar straty stability. Okrem toho sa v stavebnej praxi vyskytujú napríklad aj prúťy s nesymetrickým prierezom alebo s prierezom s jednou osou symetrie, ktoré majú okrajové podmienky v ohybe v jednej z hlavných rovín prierezu odlišné od okrajových podmienok v ohybe v druhej hlavnej rovine a okrajových podmienok v krútení. V týchto prípadoch výpočet kritickej sily priestorovej straty stability predstavuje neľahkú úlohu. Doposiaľ bola problematika priestorového vzperu veľmi málo publikovaná. Vzhľadom na dnešnú potrebu rýchleho výpočtu kritickej sily priestorovej straty stability (ktorá je potrebná pri výpočte vzpernej odolnosti) sa v pracovnom návrhu normy pre navrhovanie hliníkových konštrukcií [3] nachádza približná metóda jej výpočtu.

Zámerom prvej časti predkladanej práce je zhodnotiť túto približnú metódu, ktorá sa však môže používať aj pri oceľových prúťoch. Metóda bola neskôr použitá vo finálnej verzii normy [11] a v národnej prílohe [13].

Pre kontrolu približnej metódy je zvolená presnejšia referenčná metóda- metóda konečných prvkov (MKP). Uvedený je postup ako vypočítať kritickú silu priestorovej straty stability prúťu pomocou MKP. Na to sú použité dva prístupy:

- 1) Prúťový model - pomocou vlastného programu napísaného vo VBA (Visual Basic for Application) pre EXCEL a čiastočne v programe MathCAD
- 2) Škrupinový model - pomocou programu ANSYS.

Výpočet je demonštrovaný na príklade prúťu s jednoosovo symetrickým prierezom pre okrajové podmienky kĺb – kĺb v ohybe v obidvoch hlavných rovinách prierezu a s vidlicovým uložením v krútení. Pre kontrolu správnosti riešenia sú nakoniec výsledky MKP prúťového a MKP škrupinového modelu porovnané navzájom a tiež s výsledkami približnej metódy.

Približná metóda umožňuje zohľadniť rôzne typy podopretí prúťov v ohybe a v krútení. V prípade istých kombinácií okrajových podmienok prúťu je obťažné až nemožné tieto modelovať pri škrupinovom modeli. Napríklad zabrániť pootočeniu v ohybe (votknutie) konca prúťu ale pritom na ňom umožniť voľný priebeh deplácie. V týchto prípadoch je výhodnejšie používať MKP prúťový model. Niektoré prípady kombinácií okrajových podmienok v ohybe a v krútení nezodpovedajú reálne možnému uloženiu prúťu. Napriek tomu ich približná metóda umožňuje použiť. Vzhľadom na veľký počet možných kombinácií riešiteľných približnou metódou nebolo časovo možné preskúmať všetky reálne zhotoviteľné kombinácie. Preto pre viacero vybraných reálne zhotoviteľných kombinácií okrajových podmienok v ohybe a krútení prúťu sú vyhodnotené chyby približnej metódy v porovnaní s presnejším riešením pomocou MKP použitím prúťového modelu za pomoci zostaveného programu vo VBA pre Excel. Pri vyhodnocovaní chýb je braný ohľad na vplyv dĺžky prúťu a teda vplyv rôznych štíhlostí prúťu v ohybe a krútení.

V tých konštrukciách, v ktorých sa kladie dôraz na menšiu vlastnú tiaž pri zachovaní odolnosti, sa stále viac presadzuje hliník ako konštrukčný materiál. Z hliníku je možné

vyrobiť prúty so širokou paletou priereзов tzv. pretláčaním. Tu je však limitom najväčší priečny rozmer prúta rovný 800mm. Pokiaľ je požiadavka na väčší prierez, potom sa už prút musí pozdĺžne zväzať z viacerých kusov. Aj napriek nevýhode zníženej pevnosti materiálu hliníka v oblasti zvarov sa zväzaniu nevyhneme. Norma pre navrhovanie hliníkových konštrukcií [11] preto umožňuje posúdenie vzpernej odolnosti hliníkového prúta s priečnymi alebo pozdĺžnymi zvarmi.

Druhá časť práce je venovaná vzpernej odolnosti hliníkových prútov so zvarmi namáhaných osovým tlakom podľa normy [11]. S ohľadom na zníženú pevnosť v oblasti zvarov sú tu preto určité špecifiká. Okrem toho sa tu používa metóda efektívnej hrúbky prvku prierezu namiesto pri oceli používanej metóde efektívnej šírky prvku prierezu.

V tretej časti práce sa analyzuje metóda posudzovania vzpernej odolnosti prútov s premenným prierezom a/alebo s nekonštantnou osovou silou a rovinných konštrukcií z takýchto prútov zložených. Konceptiou ide o metódu analýzy na základe teórie II. rádu, pričom počiatočná globálna a lokálna imperfekcia sa vo forme ekvivalentnej geometrickej imperfekcie odvádza od vlastného tvaru vybočenia prúta/rámu v rovine rámu v pružnom stave. Prof. Chladný odvodil hodnotu takto volenej imperfekcie pre všeobecný prípad prútov s nekonštantným prierezom a/alebo nekonštantnou osovou silou a rámov z takýchto prútov zložených. Metóda je zahrnutá v norme [11] a národnej prílohe [13]. Touto metódou je možné posudzovať aj prúty s konštantným prierezom a osovou silou a rámy zložené z takýchto prútov. V norme [10] sa nachádza iba obmedzená forma metódy pre prúty s konštantným prierezom namáhaných konštantnou osovou silou a pre rámy z takýchto prútov zložených. Preto v poslednej kapitole pre konkrétne príklady rámov je uvedené porovnanie tejto metódy s ostatnými metódami posudzovania rámov, ktoré sa nachádzajú v [10].

CIELE A TÉZY DIZERTAČNEJ PRÁCE

Ciele dizertačnej práce je možné zhrnúť do nasledujúcich téz:

- 1) Zhodnotenie približnej metódy nachádzajúcej sa v normách [11] a [13] pre výpočet kritickej sily priestorového vzperu.
- 2) Vplyv pozdĺžnych a priečných zvarov na vzpernú odolnosť prútov z hliníkových zliatin podľa normy [11].
- 3) Vzperná odolnosť prútov s nekonštantným prierezom a/alebo s nekonštantnou osovou silou.
- 4) Formulácia záverov a návrhov pre vylepšenie návrhových postupov v Eurokódoch.

2. VÝVOJ PROBLEMATIKY STABILITY PRÚTOV – HISTORICKÝ PREHĽAD

1744	Leonhardt EULER (1707-1783)	- v práci „De curvis elasticis“, vyriešil kritickú silu a tvar straty stability prúta pre základné prípady podopretia, používa teóriu malých deformácií.
1773	J. L. LAGRANGE (1736-1813)	- v práci „Ouvres de..., Sur la figure de la colonne“ používa (na rozdiel od Eulera) na riešenie stability prúta teóriu veľkých deformácií
1915	B. G. GALERKIN (1871-1945)	- zaviedol aktuálne matematické metódy na vyšetrovanie exaktných a približných riešení teórie pružnosti, pri približných metódach pre okrajové úlohy.
1929	H. WAGNER	- študoval priestorový vzper prútov otvoreného prierezu ako prvý, zavádza pojem deplanácie pri krútení tenkostenných prútov avšak nesprávne predpokladá totožnosť ťažiska a stredy ohybu prierezu.
1931	A. OSTENFELD	- odvodil správne riešenie pre prúty prierezu U, L a T
1937	R. KAPPUS	- zvlášť zdokonalil teóriu
1936	Vasilij Zacharovič VLASOV (1906-1958)	- odovzdáva kandidátsku dizertačnú prácu „Stavebná mechanika škrupín“. Z tej vychádza pri teórii tenkostenných prútov a zákone výsekových plôch pre tenkostenné prúty, z ktorého ako zvláštny prípad vyplýva zákon o zachovaní rovinnosti prierezov. Neskôr formuluje sústavu diferenciálnych rovníc priestorovej stability tenkostenných prútov.
1941	A. L. Goľdenvejzer	- v článku [2] „Ustojčivosť tonkostěnných stěržněj pri dějstviji prodolnoj sily v zavisimosti ot graničnych uslovij“ používa približnú metódu akad. Galerkina na výpočet kritickej sily priestorovej straty stability pre prúty rôzne podopreté (kombinácie kĺbov a votknutí v ohybe i v krútení).
1959	Vasilij Zacharovič VLASOV (1906-1958)	- túto približnú metódu použité Goľdenvejzerom zahŕňa do druhého vydania knihy [1] „Tenkostěnně pružně pruty“

- 1962 Vladimír BŘEZINA - v knihe [4], „Vzpěrná únosnost kovových prutů a nosníků“ uvádza rozšírenú približnú metódu aj pre okrajové podmienky ako napríklad posuvné votknutie v kombinácií s inými a prípad konzoly pričom sa odvoláva na výsledky Gol'denvejzera
- 1982 Adolf CHALUPA - v komentári [6] k norme ČSN 73 1401 uvádza, že pri približnej metóde výpočtu kritickej sily priestorovej straty stability je možné na strane bezpečnej brať hodnotu súčiniteľa zohľadňujúceho rôzne okrajové podmienky v ohybe a krútení hodnotou 1,0.

Hore spomínaná rozšírená približná metóda výpočtu kritickej sily priestorovej straty stability prúta sa dostáva do pracovného návrhu normy pre navrhovanie hliníkových konštrukcií [3](pr EN 1999-1-1). Táto približná metóda sa neskôr nachádza aj vo finálnej verzii normy pre navrhovanie hliníkových konštrukcií [11] a v národnej prílohe [13] k norme pre navrhovanie oceľových konštrukcií.

3. STABILITA TENKOSTENNÝCH CELISTVÝCH CENTRICKY TLAČENÝCH PRÚTOV

3.1 VZPER TENKOSTENNÝCH CELISTVÝCH CENTRICKY ZAŤAŽENÝCH PRÚTOV

Stratou stability ohybom v rovine centricky tlačeného prúta sa ako prvý zaoberal L. Euler, ktorý odvodil hodnoty osových síl charakterizujúcich stavy rozdvojenia rovnováhy ideálneho prúta na oboch koncoch klbovo uloženého:

$$N_n = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}, \quad (3.1)$$

kde: $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$, EI je ohybová tuhosť prierezu nosníka a L je dĺžka prúta. Eulerovou kritickou silou N_{cr} je najmenšia sila, ktorú dostaneme pre $n = 1$ (tej odpovedá prvý vlastný tvar vybočenia v tvare polovlny sínusoidy). N_{cr} získal riešením matematického problému vlastnej hodnoty diferenciálnej rovnice (vyjadrujúcej podmienku rovnováhy prúta s priehybom w v rovine symetrie prierezu) s homogénnymi okrajovými podmienkami $w(0) = w(L) = 0$, $w''(0) = w''(L) = 0$:

$$EI \cdot w^{IV} + N \cdot w'' = 0. \quad (3.2)$$

Euler odvodil hodnoty kritických síl aj pre ostatné kombinácie uložení prúta vrátane votknutia a tiež prípad konzoly. Pri týchto okrajových podmienkach je možné kritickú silu vypočítať ako násobok Eulerovej kritickéj sily pre prút s obojstranným klbovým uložením. Vo výraze (3.1) pre $n = 1$ sa to docieli zavedením pojmu vzpernej dĺžky prúta $L_{cr} = \beta \cdot L$. Súčiniteľ vzpernej dĺžky β nadobúda hodnoty v intervale $0,5 \leq \beta < \infty$.

Lineárna homogénna diferenciálna rovnica štvrtého rádu (3.2), ktorú riešil Euler, je odvodená z elementárnej teórie ohybu nosníkov vypísaním podmienok rovnováhy na už zdeformovanom elemente (teória II. rádu). Priebeh priehybu prúta v rovine vznikajúci pri strate stability musí vyhovovať rovnici (3.2). Pri jej odvodzovaní bol prijatý predpoklad malých deformácií, predpoklad konštantnej ohybovej tuhosti prierezu prúta a modulu pružnosti materiálu, t.j. $EI = konst$ a konštantnej osovej sily N . Teória malých deformácií nahrádza presnú rovnosť $\frac{1}{\rho} = \frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}}$ približnou rovnosťou $\frac{1}{\rho} \cong w''$.

Dôsledkom zavedenia teórie malých deformácií je, že priehyb vo vybočenom stave je známy čo do tvaru, nie však čo do veľkosti. Neskôr Lagrange používa na riešenie stability prúta teóriu veľkých deformácií. Dospel však k tým istým bodom rozdvojenia rovnováhy ako Euler. Pri kritickom zaťažení nie je však rovnovážny stav indiferentný ale stabilný. V teórii veľkých deformácií je možné určiť aj konkrétne hodnoty priehybu vo vybočenom stave.

Eulerov vzper je založený na zákone zachovania rovinnosti pričných rezov, pričom uvažuje iba prosté ohybové tvary rovnováhy v jednej z hlavných rovín prierezu, ktoré sú aj rovinami symetrie. V skutočnosti je prút schopný stratiť stabilitu rovinne iba v smere osi symetrie pričného rezu. V opačnom prípade nastáva priestorová strata stability, ktorá nadobúda dôležitosť zvlášť u prútov tenkostenných. Ak charakterizujeme prút tromi rozmermi: L - dĺžka prúta, s - najväčší rozmer prierezu a t - hrúbka elementu prierezu, potom u tenkostenného prierezu sú parametre L , s/L , t/L rádovo rozdielne. Z toho vyplýva, že prakticky všetky prúty kovových konštrukcií sú prútmi tenkostennými.

Z hľadiska straty stability rozdeľujeme prúty nasledovne (vid' obr. 3.1 a 3.2):

- a) Prúty s prierezom, ktorý má totožný stred šmyku s ťažiskom napr. prierezy s dvoma a viacerými osami symetrie alebo prierezy bodovo symetrické. Strata stability nastáva tromi spôsobmi:
 1. vybočenie kolmo na os y ,
 2. vybočenie kolmo na os z ,
 3. skrútenie prúta okolo pozdĺžnej ťažiskovej osi prúta.
- b) Prúty s prierezom s jednou osou symetrie. Môžu nastať dva spôsoby straty stability:
 1. vybočenie v smere osi symetrie,
 2. vybočenie kolmo na os symetrie pri súčasnom skrútení prúta okolo pozdĺžnej osi prechádzajúcej stredmi ohybu prierezo prúta.
- c) Prúty s prierezmi bez osi symetrie. Strata stability nastáva vybočením kolmo na obidve osi y a z pri súčasnom skrútení prúta okolo pozdĺžnej osi prechádzajúcej stredmi ohybu prierezo prúta. Osami y a z sme rozumeli hlavné ťažiskové osi prierezu.

Pokiaľ nastáva skrútenie prúta okolo pozdĺžnej osi alebo vybočenie v jednej z hlavných rovín prierezu prúta pri súčasnom skrútení hovoríme o priestorovej strate stability prúta. Prúty s prierezmi bez osi symetrie zaťažené centricky môžu stratiť stabilitu iba priestorovo teda nemôže nastať klasický rovinný vzper popísaný Eulerom.

Obecnú teóriu tenkostenných prútov, ktoré majú otvorený ale tuhý alebo uzavretý a pritom deplanujúci prierez vypracoval V. Z. Vlasov v [1]. Pri tenkostenných prierezoch pre určité spôsoby namáhania a tvary prierezo prútov už neplatí zákon o rovinnosti priečných rezov po deformácii ako predpokladá elementárna teória ohybu (z ktorej vychádzal Euler pri rovinnom vzpere) ale môže dôjsť aj k deplanácii. Ako príklad môžeme uviesť prípad konzoly s I prierezom na konci zaťaženej štyrmi pozdĺžnymi silami umiestnenými na okrajoch pásnic orientovanými antimetricky vzhľadom na hlavné osi prierezu. Od tejto staticky rovnovážnej sústavy síl podľa elementárnej teórie pružnosti nenastane napätie v prúte. Napriek tomu však v tomto prípade nastáva krútenie prúta, a tomu odpovedajúce pretvorenie. Prierez deplanuje, nastáva pretvorenie pozdĺžnych vlákien prierezu a tomu odpovedajúce napätie.

Sústava diferenciálnych rovníc, vyjadrujúca podmienku rovnováhy tlačeneho tenkostenného prúta, ktorú odvodil V. Z. Vlasov v rámci obcej teórie tenkostenných prútov už daný jav zahŕňa a znie:

$$\begin{aligned}
 EI_y \cdot \xi^{IV} + P \cdot \xi'' + (M_x + a_y P) \theta'' &= 0, \\
 EI_x \cdot \eta^{IV} + P \cdot \eta'' + (M_y - a_x P) \theta'' &= 0, \\
 EI_\omega \cdot \theta^{IV} + (r^2 P + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x - GI_d) \theta'' + (M_x + a_y P) \xi'' + (M_y - a_x P) \eta'' &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

Pritom zavádza dva hlavné predpoklady:

- a) Strednicová plocha prúta sa nedeformuje šmykom (nedochádza ku skoseniu štvorcového elementu steny prierezu), t. z. nezohľadňuje vplyv zmeny pravého uhla elementu po deformácii na napätia tenkostenného prúta pretože je zanedbateľný.
- b) Priečný rez sa vo svojej rovine nedeformuje (je tuhý), to znamená, že zaťaženia, ktoré pôsobia v rovine priečného rezu a sú v statickej rovnováhe, nekonajú žiadnu prácu a teda nespôsobujú pretvorenie prúta.

V sústave rovníc (3.3) sú neznámymi funkcie posunutí $\xi = \xi(z)$, $\eta = \eta(z)$ v hlavných rovinách prierezu a uhol skrútenia $\theta = \theta(z)$ priečného rezu, ktoré vznikajú pri strate stability prúta pri dosiahnutí hodnoty kritickej sily P . Po vypustení členov s koncovými ohybovými momentmi, preznačením posunutí ξ , η a uhla skrútenia θ na posunutia w , v a uhly

skrútenia \mathcal{G} priečného rezu prúta, zmene súradného systému (pozri obr. 3.1), preznačení pozdĺžnej osi z na os x a ostatných členov rovníc v zmysle značenia EC dostávame:

$$\begin{aligned} EI_y \cdot w^{IV} + N(w'' - y_s \mathcal{G}'') &= 0, \\ EI_z \cdot v^{IV} + N(v'' + z_s \mathcal{G}'') &= 0, \\ EI_\omega \cdot \mathcal{G}^{IV} - GI_t \cdot \mathcal{G}'' + N(-y_s w'' + z_s v'' + i_s^2 \mathcal{G}'') &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Kde: y_s, z_s definujú polohu stredu šmyku vzhľadom na ťažisko prierezu,

i_s je polárny polomer zotrvačnosti prierezu vzťahovaný na stred šmyku.

Treba poznamenať, že zmena znamienok y_s a z_s znamená iba zmenu orientácie hlavných ťažiskových osí prierezu.

Sústava rovníc (3.4) vyjadruje podmienku rovnováhy centricky tlačných tenkostenných prútov. Prvá zo sústavy rovníc vyjadruje súčtovú podmienku rovnováhy ohybových momentov v rovine $z-x$, druhá podmienku rovnováhy ohybových momentov v rovine $y-x$ a tretia podmienku rovnováhy krútiacich momentov. Je zrejmé, že rovnice sú navzájom previazané.

V prípade prierezov s jednou osou symetrie napr. osou z bude súradnica y_s stredu šmyku vzhľadom na ťažisko prierezu rovná nule. Potom bude sústava rovníc (3.4) znieť nasledovne:

$$\begin{aligned} EI_y \cdot w^{IV} + N \cdot w'' &= 0, \\ EI_z \cdot v^{IV} + N(v'' + z_s \mathcal{G}'') &= 0, \\ EI_\omega \cdot \mathcal{G}^{IV} - GI_t \cdot \mathcal{G}'' + N(z_s v'' + i_s^2 \mathcal{G}'') &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

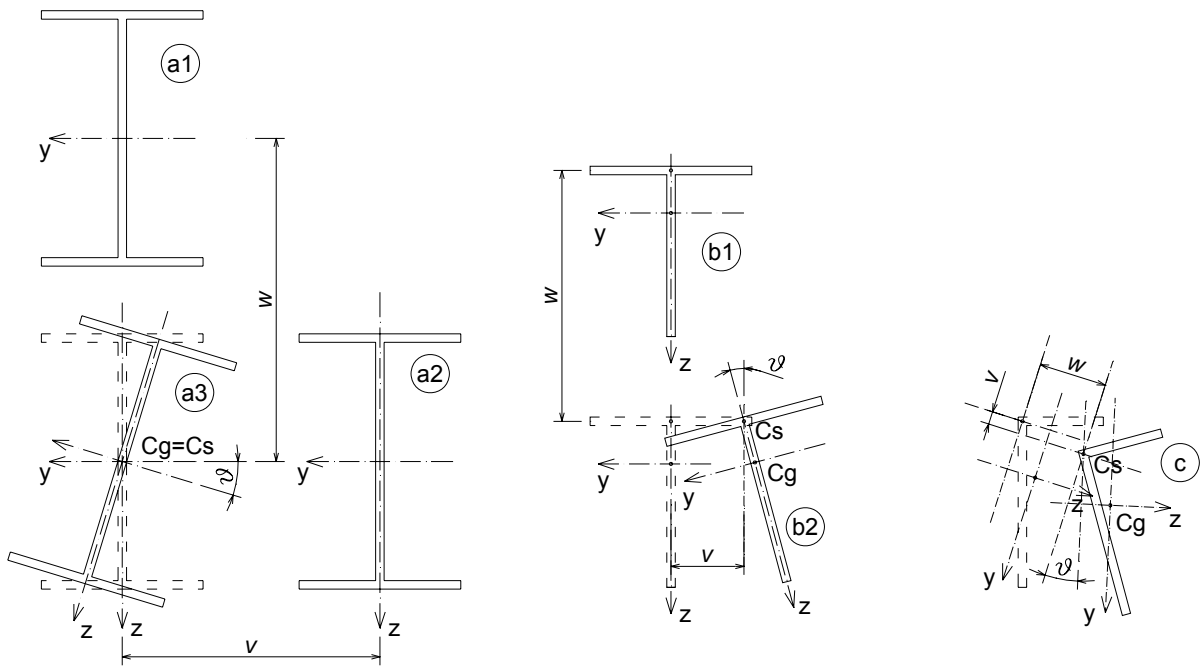
Je zrejmé, že zatiaľ čo prvá rovnica je samostatná (samostatne riešiteľná), ostatné dve sú navzájom previazané. Všimnime si, že prvá rovnica vyjadruje podmienku rovnováhy pri klasickom Eulerovom vzpere v rovine symetrie a ten je teda iba špeciálnym prípadom všeobecnej teórie stability prútov podľa Vlasova.

Pri prierezoch s dvomi a viacerými osami symetrie, prípadne pri prierezoch bodovo symetrických je totožné ťažisko so stredom ohybu (šmyku), potom $y_s = z_s = 0$ a dostávame tri samostatne riešiteľné rovnice. Dve popisujú Eulerov vzper v hlavných rovinách symetrie prierezu a tretia popisuje stratu stability skrútením okolo pozdĺžnej ťažiskovej osi prúta.

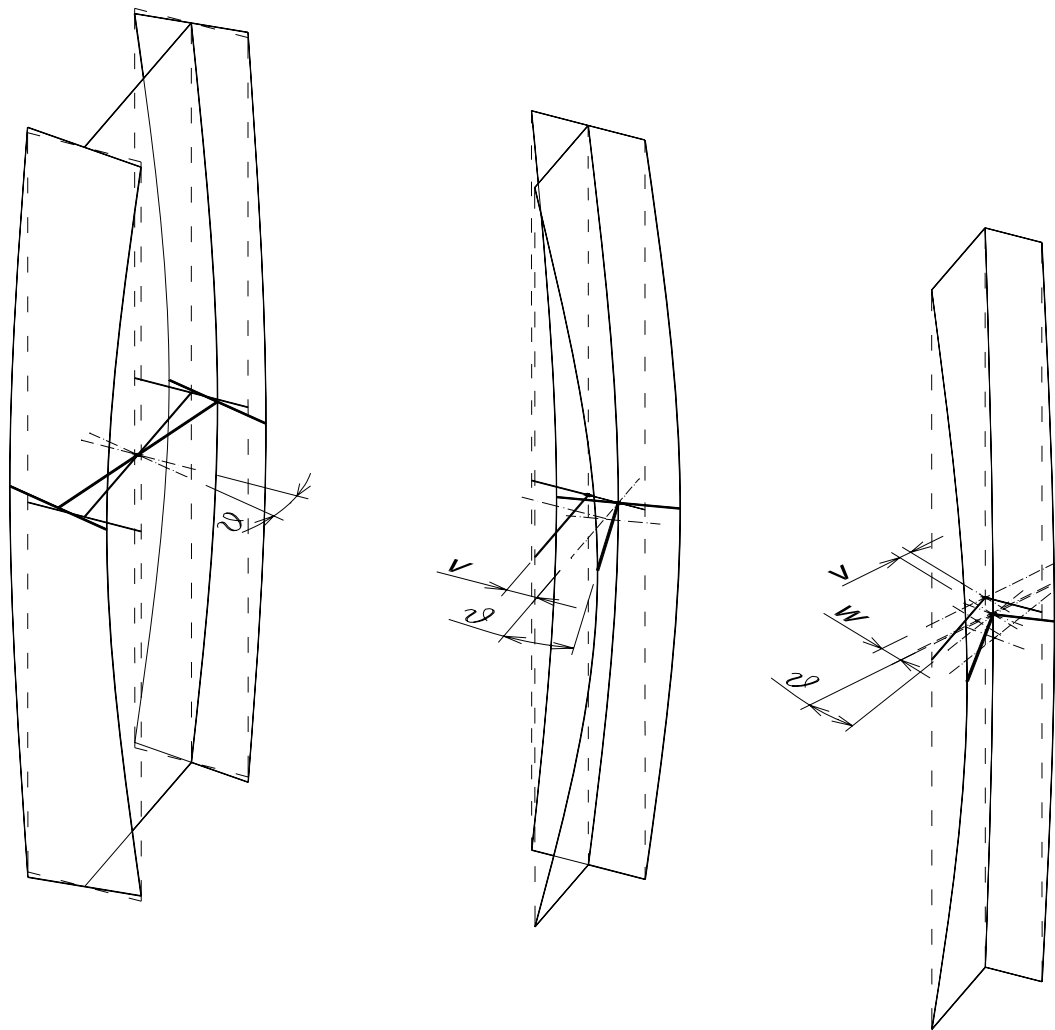
Rovnice (3.4) sú navzájom previazané, čo značne komplikuje riešenie sústavy analyticky. V časoch keď nebola k dispozícii výpočtová technika, bolo možné riešiť danú sústavu len približne pri prijatí určitých predpokladov. Napríklad Goľdenvejzer použil približnú variačnú metódu Bubnova-Galerkina na výpočet kritickej sily priestorovej straty stability, ktorú popisuje v článku [2]. Dnes sa dá bez zvláštnych ťažkostí riešiť pomocou metódy konečných prvkov (MKP) s využitím výpočtovej techniky. Na riešenie daného problému je možné použiť komerčné programy napríklad:

- DRILL je primárne určený na klopenie nosníkov, avšak prúty s prierezom s aspoň jednou osou symetrie je možné zaťažiť iba osovou silou a vypočítať kritickú silu priestorovej straty stability pre rôzne kombinácie okrajových podmienok,

- ANSYS obsahuje modul na výpočet vlastných čísel a vlastných tvarov, avšak je tu problém s komplikovaným modelovaním niektorých kombinácií okrajových podmienok. Preto má význam riešenie pomocou približnej metódy výhodnej hlavne pre prax.



Obr. 3.1 Možné prípady straty stability prúta podľa tvaru prierezu



Obr. 3.2 Priestorové tvary straty stability podľa typu prierezu (a3; b2; c)

3.2 RIEŠENIE SÚSTAVY (3.4) PRIBLIŽNOU METÓDOU

3.2.1 Riešenie sústavy (3.4) pri totožných okrajových podmienkach v ohyboch a v krútení odpovedajúcich prostému uloženiu

Sústave (3.4) pri okrajových podmienkach v $x = 0$ a $x = L$ (pri obojstranne kĺbovom uložení v hlavných rovinách zotrvačnosti a v krútení):

$$v = v'' = 0, \quad w = w'' = 0, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}'' = 0, \quad (3.6)$$

$$\text{vyhovuje riešenie:} \quad w = A \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad v = B \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \mathcal{G} = C \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.7)$$

Ak tieto 2 a 4-krát zderivujeme a dosadíme do sústavy (3.4) a po následnom vykrátení dostávame sústavu troch rovníc pre neznáme A , B , C a N :

$$\begin{aligned} EI_y \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 A - NA + y_s NC &= 0, \\ EI_z \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 B - NB - z_s NC &= 0, \\ EI_\omega \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 C + GI_t C + y_s NA - z_s NB - i_s^2 NC &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aby sústava mala netriviálne riešenie (podmienka existencie netriviálneho riešenia) musí sa jej determinant pre neznáme A , B , C rovnať nule:

$$\begin{vmatrix} (N_{cr,y} - N) & 0 & y_s N \\ 0 & (N_{cr,z} - N) & -z_s N \\ y_s N & -z_s N & i_s^2 (N_{cr,T} - N) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.9)$$

kde sme označili kritické sily:

$$N_{cr,y} = \frac{n^2 \pi^2 EI_y}{L^2}, \quad N_{cr,z} = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{L^2}, \quad (3.10a)$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_s^2} \left(\frac{n^2 \pi^2 EI_\omega}{L^2} + GI_t \right). \quad (3.10b)$$

Potom z (3.9) dostávame kubickú rovnicu:

$$(N_{cr,y} - N)(N_{cr,z} - N)(N_{cr,T} - N)i_s^2 - y_s^2 N^2 (N_{cr,z} - N) - z_s^2 N^2 (N_{cr,y} - N) = 0. \quad (3.10c)$$

Najmenší koreň rovnice (3.10c) pre neznámu N predstavuje kritickú osoú silu zodpovedajúcu priestorovej strate stability prúta s totožnými okrajovými podmienkami (3.6) pre $x = 0$ a $x = L$. Pre $n = 1$ v (3.7) dostaneme tvary straty stability zodpovedajúce polovne sínusoidy (prvý vlastný tvar vybočenia), ktorým zodpovedajú najmenšie hodnoty kritických síl (3.10a) a (3.10b). Aj v prípade iných okrajových podmienok (odpovedajúcich napr. votknutiu, posuvnému votknutiu alebo voľnému koncu), avšak totožných pre ohyb v oboch hlavných rovinách a krútení, vedie riešenie na rovnicu (3.10c). Riešeniu pre akékoľvek kombinácie okrajových podmienok a to aj navzájom odlišných v dvoch hlavných rovinách prierezu a v krútení sa bude venovať nasledovná kapitola.

3.2.2 Riešenie sústavy pri rôznych okrajových podmienkach v ohyboch a v krútení

V prípade ak nie sú okrajové podmienky na koncoch prúta týkajúce sa ohybu v jednej z hlavných rovín totožné s okrajovými podmienkami v ohybe v druhej hlavnej rovine a zároveň s okrajovými podmienkami v krútení, potom nie je možné postupovať podobným spôsobom ako v časti 3.2.1. Vlasov v [1] uvádza postup, ako možno aj s rôznymi okrajovými podmienkami v rovinách ohybu a krútení počítať. Používa zhodný postup ako Gol'denvejzer. Pritom využíva funkcie vlastných tvarov priečneho kmitania nosníka so spojitou rovnomerne rozloženou hmotou, tzv. fundamentálne funkcie $\chi(x)$, $\varphi(x)$ a $\psi(x)$, ktoré musia vyhovovať okrajovým podmienkam prúta v dvoch rovinách ohybu a v krútení podľa uloženia prúta. Týmito funkciami sú aproximované ako priebehy ohybového vybočenia v hlavných rovinách prierezu tak aj priebeh skrútenia:

$$w(x) = A \cdot \chi(x), \quad v(x) = B \cdot \varphi(x), \quad \vartheta(x) = C \cdot \psi(x). \quad (3.11)$$

Sústavou rovníc (3.4) je vyjadrená podmienka: súčet všetkých síl a momentov pôsobiacich na dĺžkový element sa rovná nule. Ak dosadíme výrazy (3.11) do (3.4) a jednotlivé rovnice vynásobíme postupne výrazmi $\chi(x)dx$, $\varphi(x)dx$, $\psi(x)dx$ dostaneme prácu všetkých síl pôsobiacich na element vykonanú na možnom pretvorení $\chi(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Po prevedení integrácie po dĺžke prúta môžeme v zmysle princípu virtuálnej práce položiť dané výrazy rovné nule. Dostaneme nasledovnú sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} EI_y A \int_L \chi^{IV}(x) \chi(x) dx + NA \int_L \chi''(x) \chi(x) dx - y_s NC \int_L \psi''(x) \chi(x) dx &= 0, \\ EI_z B \int_L \varphi^{IV}(x) \varphi(x) dx + NB \int_L \varphi''(x) \varphi(x) dx + z_s NC \int_L \psi''(x) \varphi(x) dx &= 0, \\ EI_\omega C \int_L \psi^{IV}(x) \psi(x) dx - GI_t C \int_L \psi''(x) \psi(x) dx + i_s^2 NC \int_L \psi''(x) \psi(x) dx & \\ - y_s NA \int_L \chi''(x) \psi(x) dx + z_s NB \int_L \varphi''(x) \psi(x) dx &= 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Po vydelení rovníc výrazmi $-\int_L \chi''(x) \chi(x) dx$, $-\int_L \varphi''(x) \varphi(x) dx$, $-\int_L \psi''(x) \psi(x) dx$ dostávame:

$$\begin{aligned} EI_y \frac{\pi^2}{L^2} k_{11} A - NA + y_s N k_{13} C &= 0, \\ EI_z \frac{\pi^2}{L^2} k_{22} B - NB - z_s N k_{23} C &= 0, \\ EI_\omega \frac{\pi^2}{L^2} k_{33} C + GI_t C - i_s^2 NC + y_s N k_{31} A - z_s N k_{32} B &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde sme zaviedli koeficienty:

$$k_{11} = -\frac{L^2 \int \chi^{IV}(x) \chi(x) dx}{\pi^2 \int \chi''(x) \chi(x) dx}, \quad k_{22} = -\frac{L^2 \int \varphi^{IV}(x) \varphi(x) dx}{\pi^2 \int \varphi''(x) \varphi(x) dx}, \quad k_{33} = -\frac{L^2 \int \psi^{IV}(x) \psi(x) dx}{\pi^2 \int \psi''(x) \psi(x) dx}, \quad (3.14)$$

$$k_{13} = \frac{\int \psi''(x) \chi(x) dx}{\int \chi''(x) \chi(x) dx}, \quad k_{23} = \frac{\int \psi''(x) \varphi(x) dx}{\int \varphi''(x) \varphi(x) dx}, \quad k_{31} = \frac{\int \chi''(x) \psi(x) dx}{\int \psi''(x) \psi(x) dx}, \quad k_{32} = \frac{\int \varphi''(x) \psi(x) dx}{\int \psi''(x) \psi(x) dx}. \quad (3.15)$$

Sústava (3.13) je sústava lineárnych homogénnych rovníc s neznámymi A , B , C a N . Neznámu N vieme určiť z podmienky existencie netriviálneho riešenia ak položíme determinant sústavy (3.13) pre neznáme A , B , C rovný nule:

$$\begin{vmatrix} (N_{cr,y} - N) & 0 & y_s k_{13} N \\ 0 & (N_{cr,z} - N) & -z_s k_{23} N \\ y_s k_{31} N & -z_s k_{32} N & i_s^2 (N_{cr,T} - N) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.16)$$

kde sme zaviedli:

$$N_{cr,y} = k_{11} \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}, \quad N_{cr,z} = k_{22} \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}, \quad (3.17a)$$

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_s^2} \left(k_{33} \frac{\pi^2 EI_\omega}{L^2} + GI_t \right). \quad (3.17b)$$

Pričom výrazy (3.17a) sú kritické sily, ktoré v prípade voľby vlastných tvarov straty stability prúta za fundamentálne funkcie vedú na Eulerové kritické sily ohybovej straty stability prúta v rovinách hlavných osí (aj keď tie nie sú pri nesymetrickom priereze osami symetrie) prierezu prúta. Keď vyčíslime determinant (3.16) dostávame kubickú rovnicu pre neznámu N :

$$(N_{cr,y} - N)(N_{cr,z} - N)(N_{cr,T} - N) \cdot i_s^2 - y_s^2 \alpha_{yw} N^2 (N_{cr,z} - N) - z_s^2 \alpha_{zw} N^2 (N_{cr,y} - N) = 0, \quad (3.18a)$$

kde sme označili súčinitele :

$$\alpha_{yw} = k_{13} k_{31}, \quad \alpha_{zw} = k_{23} k_{32}. \quad (3.18b)$$

Pri prierezoch s jednou osou symetrie napríklad osou z platí $y_s = 0$, potom sústava rovníc (3.12) sa rozpadne na jednu nezávislú rovnicu a sústavu dvoch rovníc. Pri totožných úpravách, aké boli hore vykonané so sústavou troch rovníc (3.12), sa teraz zo sústavy dvoch rovníc dostávame pri podmienke existencie netriviálneho riešenia k podmienke nulového determinantu:

$$\begin{vmatrix} (N_{cr,z} - N) & -z_s k_{23} N \\ -z_s k_{32} N & i_s^2 (N_{cr,T} - N) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.19a)$$

V (3.19a) pritom vystupujú totožné kritické sily (3.17a) a (3.17b) okrem $N_{cr,y}$. Koefficienty k_{22} , k_{33} , k_{23} a k_{32} sú tiež totožné a sú uvedené v (3.14) a (3.15). Vyčíslením determinantu v (3.19a) a substitúciou podľa (3.18b) dostávame kvadratickú rovnicu:

$$(N_{cr,z} - N)(N_{cr,T} - N) \cdot i_s^2 - z_s^2 N^2 \alpha_{zw} = 0, \quad (3.19b)$$

ktorej úpravou a riešením pre N dostávame kvadratickú rovnicu pre kritickú silu priestorovej straty stability $N_{cr,TF}$ (T-torsional, F-flexural):

$$N_{cr,TF} = \frac{1}{2(1 - \alpha_{zw} z_s^2 / i_s^2)} \left[(N_{cr,z} + N_{cr,T}) \pm \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4N_{cr,z} N_{cr,T} (1 - \alpha_{zw} z_s^2 / i_s^2)} \right]. \quad (3.20)$$

Kubická rovnica (3.18a) má pre hľadané N tri korene, z ktorých najmenší predstavuje kritickú silu N_{cr} priestorovej straty stability, pri ktorej dochádza k rozdrobeniu rovnováhy prúta. Prút prechádza z jedného (priamkového) stavu rovnováhy do kvalitatívne odlišného stavu rovnováhy (ohybového v dvoch hlavných rovinách pri súčasnom skrútení, pričom ohybové tvary sú násobkom vhodne zvolených fundamentálnych funkcií $\chi(x)$, $\varphi(x)$ a tvar skrútenia je násobkom $\psi(x)$).

Koeficienty k_{ii} (3.14) môžeme previesť na súčinitele vzperných dĺžok tak, že položíme kritické sily (3.17a) rovné známym výrazom pre Eulerové kritické sily pre vybočenie v rovine kolmo na os y a z a výraz (3.17b) rovný kritickkej sile straty stability skrútením, cez nasledujúci vzorec:

$$\beta_m = \frac{1}{\sqrt{k_{ii}}}, \text{ kde } i = 1,2,3 \text{ a } m = y, z, w \quad (3.21)$$

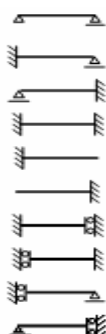
Treba poznamenať, že namiesto znaku β_m v (3.21) sa v normách [11] a [13] pre súčinitele vzperných dĺžok používajú znaky k_y , k_z a k_w . Týmto prevedením koeficientov (3.14) na súčinitele vzperných dĺžok môžeme skontrolovať hodnoty k_{ii} podľa už známych riešení Eulerových kritických síl pre rôzne okrajové podmienky.

Pre koeficienty k_{11} , k_{22} a k_{33} uvádza Vlasov v [1] (str. 347) už upravené vzorce, ktoré platia v prípade, ak za fundamentálne funkcie zvolíme vlastné tvary priečného kmitania prúta. Prostredníctvom týchto koeficientov boli pre všetky okrajové podmienky vyčíslené súčinitele (3.21) a sú zoradené vo vektore (3.22a) (príloha 1). Ak však za fundamentálne funkcie zvolíme funkcie vlastných tvarov straty stability prúta, musíme použiť vzorce (3.14) pre koeficienty k_{ii} , pre ktoré dáva vzorec (3.21) presne hodnoty súčiniteľov vzperných dĺžok (3.22b) korešpondujúcich s riešením Eulerových kritických síl pre rôzne podopreté prúty (príloha 1). Touto zhodou bolo preukázané správne zadanie funkcií vlastných tvarov straty stability prúta s rôznymi okrajovými podmienkami. Ukázalo sa, že vzorce (3.14), ak za fundamentálne funkcie zvolíme vlastné funkcie priečného kmitania prúta, platia vo všeobecnosti iba s výnimkou prípadu konzoly, kedy dávajú záporné číslo, pre ktoré výraz (3.21) dáva komplexné číslo (3.22c) (príloha 1). Poradie súčiniteľov vzperných dĺžok vo vektoroch (3.22a)~(3.22c) je zvolené podľa poradia okrajových podmienok použitých v EC a tiež v tab. 3.1 a 3.2.

$$\beta_{VL.vlk} =$$

	1
1	1
2	0.691
3	0.691
4	0.493
5	1.926
6	1.926
7	0.985
8	0.985
9	2
10	2

(3.22a)



$$\beta_{stab} =$$

	1
1	1
2	0.699
3	0.699
4	0.5
5	2
6	2
7	1
8	1
9	2
10	2

(3.22b)

$$\beta_{vlk} =$$

	1
1	1
2	0.691
3	0.691
4	0.493
5	0.828i
6	0.828i
7	0.985
8	0.985
9	2
10	2

(3.22c)

Výrazy pre koeficienty k_{ij} ($i \neq j$), ktoré uvádza Vlasov v [1] (str. 347) platia pre nasledujúce kombinácie okrajových podmienok:

- 1, prút na oboch koncoch kĺbovo uložený
- 2, prút na jednom konci votknutý a na druhom kĺbovo uložený
- 3, prút na oboch koncoch votknutý,

a za predpokladu použitia vlastných tvarov priečného kmitania ako fundamentálnych funkcií. Vzhľadom na to, že Vlasov riešil iba tieto 3 prípady uloženia prúta mohol pri úprave výrazov k_{ij} položiť prvý člen metódy integrovania "per partes" rovným nule. Pre všetky kombinácie okrajových podmienok ako napríklad prúty s posuvným uložením v kombinácii s inými a pre prípad konzoly platia iba vzorce (3.15).

Výrazy (3.14), (3.15) platia pre akékoľvek fundamentálne funkcie a kombinácie okrajových podmienok prútov. Tu sú uvedené už vypočítané hodnoty súčiniteľov (3.18b) (pre koeficienty k_{ij} z (3.15)) zoradené do tab. 3.1, ak za fundamentálne funkcie zvolíme funkcie vlastných tvarov straty stability rôzne podopretých prútov, pričom je dodržané poradie okrajových podmienok podľa EC pre stĺpce aj riadky. V tab. 3.2 sú hodnoty súčiniteľov (3.18b) vypočítané ak za fundamentálne funkcie zvolíme vlastné tvary priečného kmitania prútov s rovnomerne rozloženou hmotou (ktoré použil Vlasov). Výpočet súčiniteľov (3.18b) bol vykonaný v programe MathCAD a je uvedený v prílohe 1.

Pri výpočte kritickej sily zo vzorca (3.18a) je potrebné odčítať z tab. 3.1 (resp. tab. 3.2 podľa voľby buď funkcií vlastných tvarov priečného kmitania alebo funkcií vlastných tvarov straty stability za fundamentálne funkcie) súčinitele α_{yw} , α_{zw} vyjadrujúce vplyv rôznych okrajových podmienok. Súčiniteľ $\alpha_{yw}(k_y; k_w)$ je závislý na okrajových podmienkach v ohybe v rovine $z-x$ resp. na súčiniteli vzpernej dĺžky k_y pri vybočení ohybom v rovine kolmej na os y (určuje riadok v tab. 3.1 resp. 3.2) a na okrajových podmienkach v krútení resp. na súčiniteli vzpernej dĺžky k_w v krútení (určuje stĺpec v tab. 3.1 resp. 3.2). Súčiniteľ $\alpha_{zw}(k_z; k_w)$ je závislý na okrajových podmienkach v ohybe v rovine $y-x$ resp. na súčiniteli vzpernej dĺžky k_z pri vybočení ohybom v rovine kolmej na os z (určuje riadok v tab. 3.1 resp. 3.2) a na okrajových podmienkach v krútení resp. na súčiniteli vzpernej dĺžky k_w v krútení (určuje stĺpec v tab. 3.1 resp. 3.2). Obe súčinitele sa teda odčítavajú z tej istej tabuľky a v závislosti na voľbe fundamentálnych funkcií sa použije tab. 3.1 resp. 3.2.

Ak má prút rovnaké okrajové podmienky v ohybe v rovine $y-x$ (okolo osi z) ako okrajové podmienky v krútení potom funkcie $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ v (3.15) sú totožné a preto platí $k_{23} = k_{32} = 1$ a z (3.18b) aj $\alpha_{zw}(k_z = k_w) = 1$. Podobne ak prút má rovnaké okrajové podmienky v ohybe v rovine $z-x$ (okolo osi y) ako okrajové podmienky v krútení potom funkcie $\chi(x)$ a $\psi(x)$ v (3.15) sú totožné a preto platí $k_{13} = k_{31} = 1$ a z (3.18b) platí aj $\alpha_{yw}(k_y = k_w) = 1$. Vo všeobecnosti ak okrajové podmienky v ohybe budú totožné s okrajovými podmienkami v krútení bude súčiniteľ rovný 1. V tabuľkách 3.1 a 3.2 tomu odpovedá poloha súčiniteľa na diagonále.

Z tab. 3.2 vyplýva, že v časti tabuľky s prvými štyrmi riadkami a stĺpcami (ostatné prípady Vlasov neriešil) sú v prílohe 1 vypočítané súčinitele zhodné s ekvivalentnými Vlasovom označenými výrazmi $(k_{13} \cdot k_{31})$ a $(k_{23} \cdot k_{32})$ okrem súčiniteľa 0,472, ktorý ako jediný z tejto oblasti Vlasov vynechal. Tento súčiniteľ uvádza Březina ako hodnotu 1,45 odvolávajú sa na Gol'denvejzera. Aj v prípade ostatných súčiniteľov v tab. I.6 v norme [3], ktoré Březina uvádza v [4] sa odvoláva na výsledky Gol'denvejzera.

Tab. 3.1 Súčinitele (3.18b) pre vlastné tvary straty stability prútov

Okrajové pod. v ohybe	Okrajové podmienky v krútení									
	Súčinitele vzpernej dĺžky k_w									
súč.vzpernej dĺžky k_y, k_z										
	1,0	0,7	0,7	0,5	2,0	2,0	1,0	1,0	2,0	2,0
1,0	1	0,758	0,758	0,721	1,318	1,318	0	0	0,721	0,721
0,7	0,758	1	0,308	0,66	1,494	-0,601	0,367	0,042	0,104	0,808
0,7	0,758	0,308	1	0,66	-0,601	1,494	0,042	0,367	0,808	0,104
0,5	0,721	0,66	0,66	1	-0,422	-0,422	0	0	0,115	0,115
2,0	1,318	1,494	-0,601	-0,422	1	5,428	1,318	-2,637	1	1,483
2,0	1,318	-0,601	1,494	-0,422	5,428	1	-2,637	1,318	1,483	1
1,0	0	0,367	0,042	0	1,318	-2,637	1	1	-0,36	0,721
1,0	0	0,042	0,367	0	-2,637	1,318	1	1	0,721	-0,36
2,0	0,721	0,104	0,808	0,115	1	1,483	-0,36	0,721	1	0,405
2,0	0,721	0,808	0,104	0,115	1,483	1	0,721	-0,36	0,405	1

Tab. 3.2 Súčinitele (3.18b) pre vlastné tvary priečného kmitania prútov

Okrajové pod. v ohybe	Okrajové podmienky v krútení									
	Súčinitele vzpernej dĺžky k_w									
súč.vzpernej dĺžky k_y, k_z										
	1,0	0,7	0,7	0,5	2,0	2,0	1,0	1,0	2,0	2,0
1,0	1	0,817	0,817	0,78	1,805	1,805	0,106	0,106	0,721	0,721
0,7	0,817	1	0,472	0,765	1,776	-0,683	0,425	0,008	0,117	0,794
0,7	0,817	0,472	1	0,765	-0,683	1,776	0,008	0,425	0,794	0,117
0,5	0,78	0,765	0,765	1	-0,421	-0,421	0,008	0,008	0,127	0,127
2,0	1,805	1,776	-0,683	-0,421	1	16,783	1,348	-4,583	1,707	1,707
2,0	1,805	-0,683	1,776	-0,421	16,783	1	-4,583	1,348	1,707	1,707
1,0	0,106	0,425	0,008	0,008	1,348	-4,583	1	0,97	-0,378	0,78
1,0	0,106	0,008	0,425	0,008	-4,583	1,348	0,97	1	0,78	-0,378
2,0	0,721	0,117	0,794	0,127	1,707	1,707	-0,378	0,78	1	0,405
2,0	0,721	0,794	0,117	0,127	1,707	1,707	0,78	-0,378	0,405	1

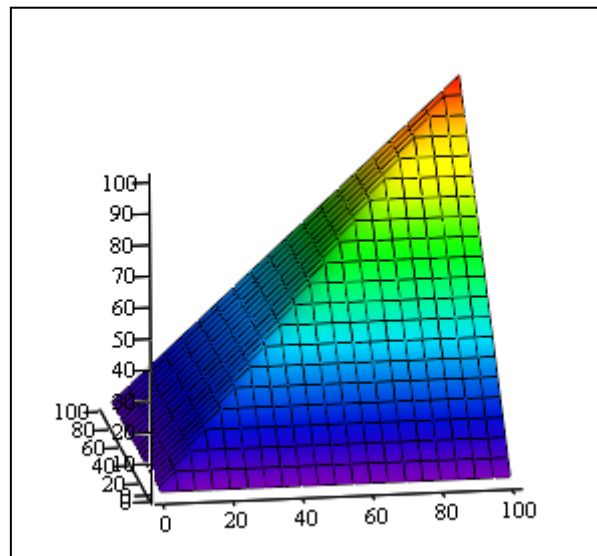
Všimnime si, že niektoré súčinitele v tab. 3.1 ale aj v tab. 3.2 sú záporné. Ak však záporné súčinitele dosadíme do (3.20), dostaneme hodnotu kritickej sily $N_{cr,TF}$, pre ktorú neplatí:

$$N_{cr,TF} \leq \min(N_{cr,z}; N_{cr,T}). \quad (3.22)$$

To však nekorešponduje so skutočnosťou, že ak okrem ohybovej straty stability súčasne nastáva aj skrútenie, potom hodnota kritickej sily priestorovej straty stability musí byť menšia ako hodnoty Eulerovej kritickej sily iba ohybovej straty stability v rovine $N_{cr,z}$ a hodnoty kritickej sily odpovedajúcej straty stability skrútením $N_{cr,T}$, čiže musí platiť (3.22). Dôkaz je uvedený v [1] (str. 322). Z uvedeného vyplýva, že pri prútoch s kombináciou okrajových

podmienok v ohybe a krútení, ktorým odpovedá záporný súčiniteľ, je daná približná metóda nekorektná.

Niektoré súčinitele v tab. 3.1 sú nulové, prípadne niektoré súčinitele v tab. 3.2 sú blízke nule. Ak vyšetrujeme prúty s kombináciou okrajových podmienok, ktorej odpovedá súčiniteľ $\alpha_{zw} = 0$ ($\alpha_{yw} = 0$) potom dostaneme kritickú silu presne rovnú menšej z kritických síl $N_{cr,z}$ a $N_{cr,T}$ ako znázorňuje nasledujúci graf.



N

Graf 3.1

Na grafe 3.1 je vynesená závislosť (3.23), ktorá vznikne dosadením $\alpha_{zw} = 0$; do (3.20), kde na osi x sa vynáša kritická sila ohybovej straty stability $N_{cr,z}$, na osi y kritická sila straty stability skrútením $N_{cr,T}$ a na zvislej osi hodnota:

$$N_{cr,TF} = 0,5 \left[(N_{cr,z} + N_{cr,T}) - \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4N_{cr,z}N_{cr,T}} \right]. \quad (3.23)$$

Chalupa v [6] uvádza, že pre prúty ktoré majú rovnaké okrajové podmienky na oboch koncoch v ohybe v rovine jednej aj druhej z hlavných rovín prierezu a aj v krútení, potom súčiniteľ je rovný 1,0 a je možné ho bezpečne uvažovať aj pre iné prípady okrajových podmienok, ktorým odpovedá súčiniteľ z intervalu (0;1).

Ak by sme súčinitele z intervalu (0;1) položili rovné 1,0 tak hodnoty kritických síl sa zmenšia, čo je v zhode s Chalupovým tvrdením na strane bezpečnej. Ak súčinitele z tab. 3.1 a 3.2, ktoré vyšli väčšie ako 1,0 položíme rovné 1,0 potom hodnota kritickej sily, ktorá bude vychádzať z (3.20) sa zväčší, čo by bolo na strane nebezpečnej iba ak by kritická sila vypočítaná MKP bola menšia ako sila vypočítaná touto približnou metódou z (3.20) pre súčiniteľ položený rovným 1,0.

Pre porovnanie približnej metódy s MKP je vhodné na tomto mieste uviesť riešenie priestorovej stability prúta pomocou MKP.

3.3 RIEŠENIE PRIESTOROVEJ STABILITY PRÚTA POMOCOU MKP

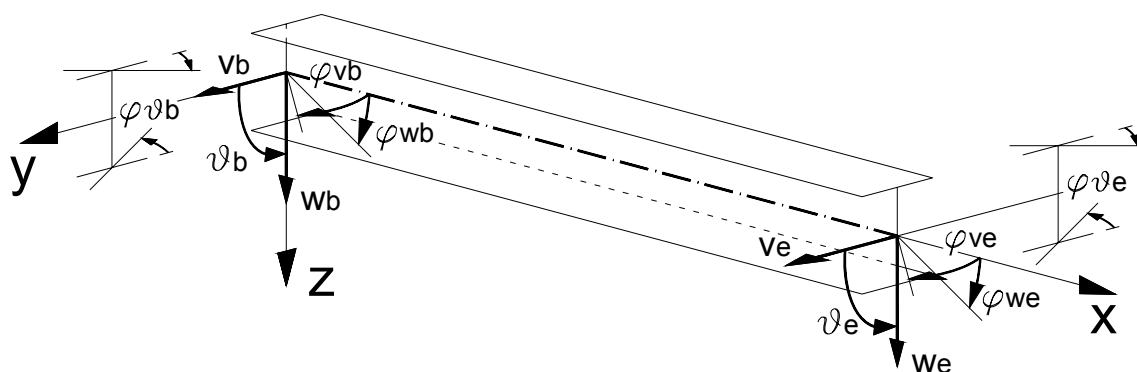
Prút s tenkostenným prierezom je možné riešiť dvomi spôsobmi. Jedna možnosť je riešenie prostredníctvom prútového modelu použitím jednorozmerných elementov, pričom musíme okrem materiálových charakteristík E , ν zadefinovať aj prierezové charakteristiky A , I_y , I_z , I_{ω} , I_t , i_s , y_s , z_s . Druhá možnosť je riešenie prostredníctvom škrupinového modelu s jedným prevládajúcim rozmerom použitím dvojrozmerných dosko-stenových elementov s reálnymi hrúbkami stien tenkostenného prierezu a takto modelovať celý prút. V tomto prípade stačí zadefinovať okrem materiálových charakteristík iba hrúbky stien priečneho rezu prúta.

3.3.1 Riešenie sústavy (3.4) MKP- prútový model

V tejto časti je teória odvodená matematickým postupom riešenia sústavy diferenciálnych rovníc (3.4) podľa [8] a [20]. V porovnaní s [20] tu bol zvolený polynóm iba štvrtého stupňa a pre dosiahnutie dostatočnej presnosti sa volí väčší počet elementov.

3.3.1.1 Diskretizácia prúta a aproximačný polynóm

Vzhľadom na rozsiahlosť výpočtu je zvolený element iba s koncovými uzlami s dvomi neznámymi v každom z nich, čo nám dovoľuje použiť aproximačný polynóm maximálne tretieho stupňa (kubický priebeh). V sústave rovníc (3.4) vystupujú tri neznáme: posunutia w , v a uhly skrútenia ϑ priečneho rezu prúta (primárne neznáme). Od nich závislé sú sekundárne neznáme: φ_w , φ_v , φ_{ϑ} , ktoré sú prvými deriváciami primárnych neznámých. Na obr. 3.3 sú zakreslené primárne a sekundárne neznáme na i -tom elemente.



Obr. 3.3 Primárne a sekundárne neznáme na elemente

Všetky tri primárne neznáme aproximujeme rovnakým kubickým polynómom (3.24), definovanom na oblasti elementu.

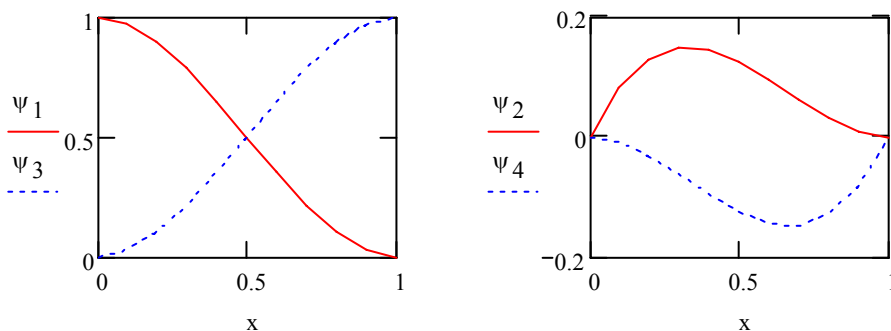
$$w(x) = C_1 + C_2 \cdot \frac{x}{L} + C_3 \cdot \frac{x^2}{L^2} + C_4 \cdot \frac{x^3}{L^3}. \quad (3.24)$$

Po prevedení na Galerkinov rozklad (príloha 3) s koeficientmi rovnými hodnotám primárnych a sekundárnych neznámych v uzlových bodoch dostávame tri aproximačné polynómy (3.25), popisujúce priebehy hľadaných neznámych $w(x)$, $v(x)$, $\mathcal{G}(x)$ na oblasti elementu:

$$\begin{aligned} w(x) &= w_b \cdot \psi_1(x) + \varphi_{wb} \cdot \psi_2(x) + w_e \cdot \psi_3(x) + \varphi_{we} \cdot \psi_4(x), \\ v(x) &= v_b \cdot \psi_1(x) + \varphi_{vb} \cdot \psi_2(x) + v_e \cdot \psi_3(x) + \varphi_{ve} \cdot \psi_4(x), \\ \mathcal{G}(x) &= \mathcal{G}_b \cdot \psi_1(x) + \varphi_{gb} \cdot \psi_2(x) + \mathcal{G}_e \cdot \psi_3(x) + \varphi_{ge} \cdot \psi_4(x), \end{aligned} \quad (3.25)$$

v ktorých priebehy básových funkcií $\psi_1(x) \sim \psi_4(x)$ sú vykreslené na obr. 3.4:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}, & \psi_2(x) &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}, \\ \psi_3(x) &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}, & \psi_4(x) &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$



Obr. 3.4 Básové funkcie

3.3.1.2 Slabá formulácia, elementová a globálna sústava rovníc

Vynásobením ľavých strán rovníc (3.4) váhovou (testovacou) funkciou $u(x)$ a zintegrování tohto súčinu na dĺžke elementu dostávame :

$$\begin{aligned} \int_0^L EI_y \cdot w^{IV} u \cdot dx + \int_0^L N \cdot w^{II} u \cdot dx - \int_0^L N \cdot y_s \mathcal{G}^{II} u \cdot dx &= 0, \\ \int_0^L EI_z \cdot v^{IV} u \cdot dx + \int_0^L N \cdot v^{II} u \cdot dx + \int_0^L N \cdot z_s \mathcal{G}^{II} u \cdot dx &= 0, \\ \int_0^L EI_\omega \cdot \mathcal{G}^{IV} u \cdot dx - \int_0^L GI_t \cdot \mathcal{G}^{II} u \cdot dx - \int_0^L N \cdot y_s w^{II} u \cdot dx + \int_0^L N \cdot z_s v^{II} u \cdot dx + \int_0^L N \cdot i_s^2 \mathcal{G}^{II} u \cdot dx &= 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Po uvážení, že ohybové tuhosti a osová sila sú na elemente konštantné a po úprave integrálov metódou “per partes“ (uvážené sú len prvé členy vzorcov (2.13a), (2.15) [8] vzhľadom na homogénne okrajové podmienky) dostaneme:

$$\begin{aligned}
EI_y \int_0^L w'' u'' dx + N \left(- \int_0^L w' u' dx \right) - Ny_s \left(- \int_0^L \mathcal{G}' u' dx \right) &= 0, \\
EI_z \int_0^L v'' u'' dx + N \left(- \int_0^L v' u' dx \right) + Nz_s \left(- \int_0^L \mathcal{G}' u' dx \right) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$EI_\omega \int_0^L \mathcal{G}'' u'' dx - GI_t \left(- \int_0^L \mathcal{G}' u' dx \right) - Ny_s \left(- \int_0^L w' u' dx \right) + Nz_s \left(- \int_0^L v' u' dx \right) + Ni_s^2 \left(- \int_0^L \mathcal{G}' u' dx \right) = 0$$

Všimnime si, že sa opakujú členy s integrálmi zo súčinu prvých alebo druhých derivácií vždy dvoch funkcií. Nasleduje zostrojenie elementovej sústavy rovníc. Za $w(x)$, $v(x)$ a $\mathcal{G}(x)$ dosadíme aproximačný polynóm v tvare Galerkinovho rozkladu (s koeficientmi rovnými primárnym a sekundárnym neznámym a s bazovými funkciami) a za váhové funkcie postupne dosadzujeme bazové funkcie a následne zintegrujeme na dĺžke elementu. Na vyjadrenie integrálov je vhodné použiť matematický software, napr. tu bol použitý MathCAD. Z vyjadrených integrálov zo súčinu druhých derivácií dvoch funkcií po vyňatí primárných a sekundárných neznámých a po úprave do maticovej formy dostávame maticu k_1 (príloha 3) a z integrálov zo súčinu prvých derivácií dvoch funkcií (z výrazov v zátvorkách v (3.28)) dostávame maticu k_2 (príloha 3), obidve sú totožné bez ohľadu na typ deformácie w , v alebo \mathcal{G} :

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix}, \quad k_2 = \frac{-1}{10L} \begin{bmatrix} 12 & L & -12 & L \\ L & \frac{4}{3}L^2 & -L & \frac{-1}{3}L^2 \\ -12 & -L & 12 & -L \\ L & \frac{-1}{3}L^2 & -L & \frac{4}{3}L^2 \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

kde L je dĺžka elementu. Vektor neznámých na elemente sme pritom výhodne zvolili:

$$\delta_{el} = \{w_b \quad \varphi_{wb} \quad w_e \quad \varphi_{we} \quad v_b \quad \varphi_{vb} \quad v_e \quad \varphi_{ve} \quad \mathcal{G}_b \quad \varphi_{gb} \quad \mathcal{G}_e \quad \varphi_{ge}\}^T. \tag{3.30}$$

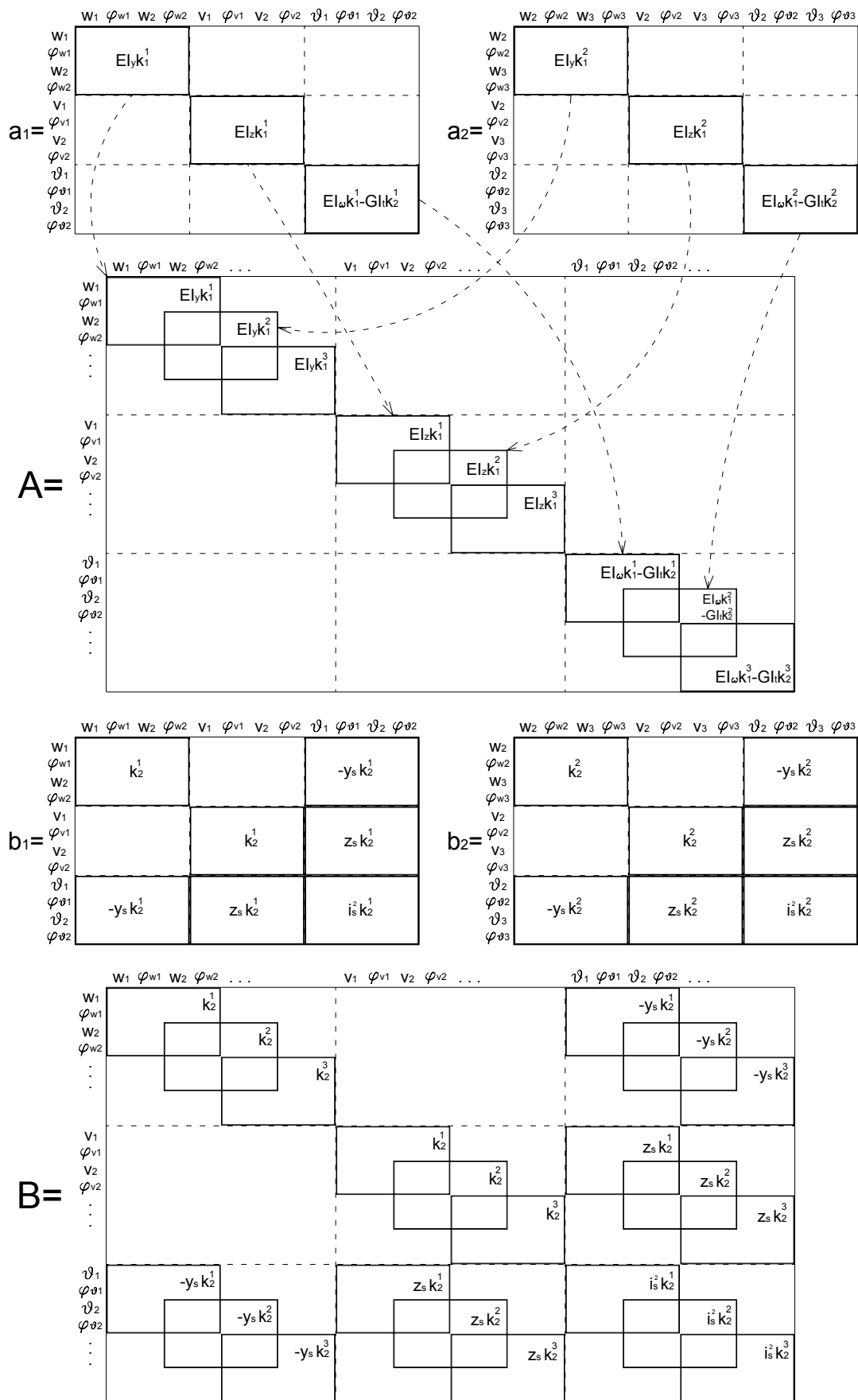
Matica k_1 je po prenásobení EI_y tuhostnou maticou prúťového elementu namáhaného ohybom a priečnou silou (je uvedená v lit. [8] (4.15)). Prepísaním sústavy rovníc (3.28) do maticovej formy (aplikovaním matic (3.29)), pri zvolení poradia primárných a sekundárných neznámých na elemente podľa (3.30), dostávame elementovú sústavu rovníc:

$$[[a] + N \cdot [b]] \cdot \{\delta_{el}\} = 0, \tag{3.31}$$

kde:

$$a = \begin{bmatrix} EI_y \cdot k_1 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \cdot k_1 & 0 \\ 0 & 0 & EI_\omega \cdot k_1 - GI_t \cdot k_2 \end{bmatrix}, \tag{3.32}$$

$$b = \begin{bmatrix} k_2 & 0 & -y_s \cdot k_2 \\ 0 & k_2 & z_s \cdot k_2 \\ -y_s \cdot k_2 & z_s \cdot k_2 & i_s^2 \cdot k_2 \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$



Obr. 3.5 Zostavenie globálnych matic
(poznámka: horný index pri maticiach k znamená číslo elementu)

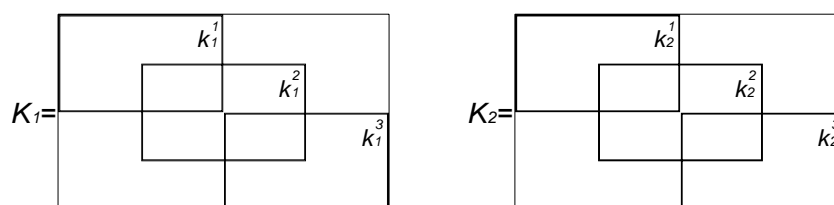
Vzhľadom na to, že matice k_1 a k_2 sú rozmeru 4×4 , sú matice $[a]$ a $[b]$ rozmeru 12×12 . Nasleduje vytvorenie globálneho konečno-prvkového modelu, spojenie elementových sústav rovníc (3.31) pre jednotlivé elementy do globálnej sústavy rovníc prúta. Najprv prepíšeme lokálne neznáme na elemente na globálne neznáme a potom sčítame navzájom tie rovnice, v ktorých sa vyskytujú rovnaké globálne neznáme. Pre prípad prúta rozdeleného na tri elementy je zostavenie globálnych matíc znázornené na obr. 3.5. Horný index matíc k znamená číslo elementu. V prípade že všetky elementy majú rovnakú dĺžku platí:

$$k_1^1 = k_1^2 = \dots = k_1^e = \dots = k_1^n, \quad k_2^1 = k_2^2 = \dots = k_2^e = \dots = k_2^n. \quad (3.34)$$

Vo všeobecnom prípade globálna sústava rovníc v maticovom tvare s homogénnymi okrajovými podmienkami znie:

$$[[A] + N \cdot [B]] \cdot \{\delta\} = 0. \quad (3.35)$$

Jednoduchší spôsob zostavenia sústavy rovníc vedie cez zostavenie matíc K_1 a K_2 , ktoré sa týkajú vždy iba jednej s vyšetřovaných deformácií (avšak pre každú deformáciu w , v alebo ϑ majú matice totožné tvary) podľa obr. 3.6, na ktorom sú uvedené pre prípad s tromi elementmi.



Obr. 3.6

Potom pre matice A a B platí:

$$A = \begin{bmatrix} EI_y \cdot K_1 & 0 & 0 \\ 0 & EI_z \cdot K_1 & 0 \\ 0 & 0 & EI_\omega \cdot K_1 - GI_t \cdot K_2 \end{bmatrix}, \quad (3.36a)$$

$$B = \begin{bmatrix} K_2 & 0 & -y_s \cdot K_2 \\ 0 & K_2 & z_s \cdot K_2 \\ -y_s \cdot K_2 & z_s \cdot K_2 & i_s^2 \cdot K_2 \end{bmatrix}. \quad (3.36b)$$

Vo všeobecnom prípade pre prút rozdelený na n elementov vznikne $n+1$ uzlov. V každom uzle sú dve neznáme, potom vznikne $2(n+1)$ rovníc globálnej sústavy týkajúcich sa iba jednej deformácie. Deformácie sú 3 a to w , v a ϑ , preto globálna sústava má $6(n+1)$ rovníc globálnej sústavy. Potom globálny vektor primárnych a sekundárnych neznámych je:

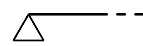
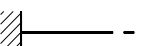
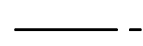
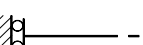
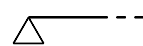
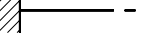
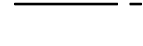
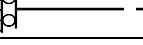
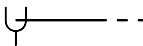
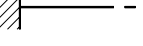

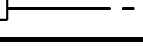
$$\delta = \{w_1 \quad \varphi_{w,1} \dots \dots w_{n+1} \quad \varphi_{w,n+1} \quad v_1 \quad \varphi_{v,1} \dots \dots v_{n+1} \quad \varphi_{v,n+1} \quad \vartheta_1 \quad \varphi_{\vartheta,1} \dots \dots \vartheta_{n+1} \quad \varphi_{\vartheta,n+1}\}^T. \quad (3.37)$$

Aplikovanie okrajových podmienok sa vykoná vyradením stĺpcov a riadkov matíc A , B a vynechaním príslušných členov vektora deformácií $\{\delta\}$, ktoré zodpovedajú nulovým

deformáciám. Pre všetky typy podopretí prúta sú v tab. 3.3 v 2. stĺpci vypísané nulové deformácie (deformácie vid' obr. 3.3), ktorým príslušné riadky a stĺpce matíc A a B a členy vektora neznámych (3.37) sa eliminujú. V prípade kĺbového uloženia sa vynecháva iba primárna neznáma. V prípade votknutia sa vynecháva primárna i sekundárna neznáma. V prípade posuvného votknutia sa vynecháva iba sekundárna neznáma. Vzhľadom na 3 zložky deformácie to treba vykonať pri ohybe v rovinách $x-z$, $x-y$ aj pri krútení. Aplikovaním okrajových podmienok sa počet globálnych rovníc zredukuje. Dostávame sústavu rovníc:

$$[[A'] + N \cdot [B']] \cdot \{\delta'\} = 0. \quad (3.38)$$

Tab. 3.3 Okrajové podmienky

Ohyb okolo osi y		
schéma v rovine x-z	zabránená (nulová) deformácia	voľná deformácia
	priehyb $w = 0$	pootočenie φ_w
	priehyb $w = 0$ pootočenie $\varphi_w = w' = 0$	
		priehyb w pootočenie φ_w
	pootočenie $\varphi_w = w' = 0$	priehyb w
Ohyb okolo osi z		
schéma v rovine x-y	zabránená (nulová) deformácia	voľná deformácia
	priehyb $v = 0$	pootočenie φ_v
	priehyb $v = 0$ pootočenie $\varphi_v = v' = 0$	
		priehyb v pootočenie φ_v
	pootočenie $\varphi_v = v' = 0$	priehyb v
Skrútenie		
schéma	zabránená (nulová) deformácia	voľná deformácia
	skrútenie $\vartheta = 0$	deplanácia φ_ϑ
	skrútenie $\vartheta = 0$ deplanácia $\varphi_\vartheta = \vartheta' = 0$	
		skrútenie ϑ deplanácia φ_ϑ
	deplanácia $\varphi_\vartheta = \vartheta' = 0$	skrútenie ϑ

(na obr. 3.3 sú jednotlivé deformácie vyznačené v koncových uzloch)

3.3.1.3 Problém vlastných čísel a vektorov

Vzhľadom na to, že globálna sústava rovníc (po aplikovaní homogénnych okrajových podmienok) (3.38) je homogénna, nie je možné vypočítať konkrétne hodnoty primárnych a sekundárnych neznámych. Preto nie je možné určiť deformácie pozdĺž prúta čo do veľkosti, ale je možné určiť tvar priebehu deformácie. To je dôsledkom použitia teórie malých deformácií. Sústava rovníc vedie na riešenie problému vlastných hodnôt a vlastných tvarov.

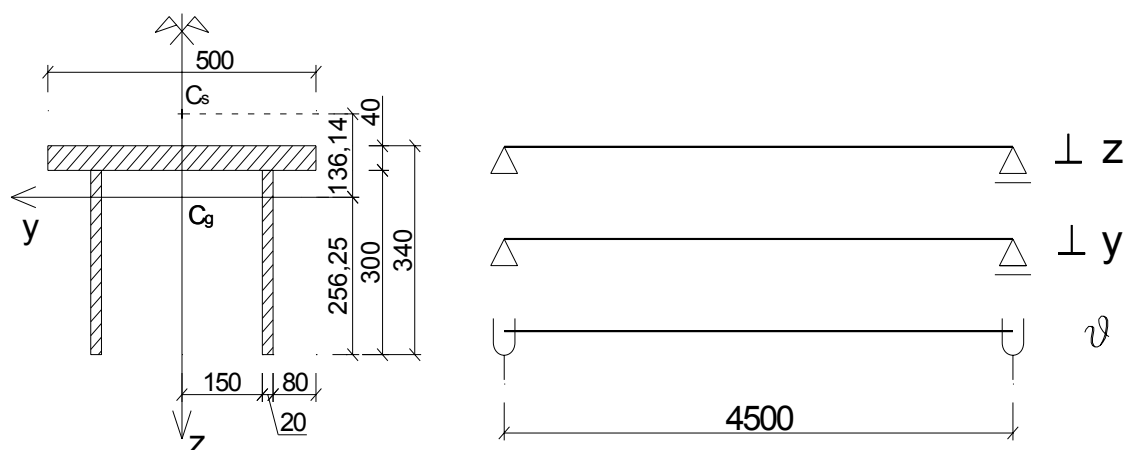
Riešením problému vlastných hodnôt a vlastných tvarov homogénnej rovnice (3.38) dostávame sériu vlastných čísel a k nim prislúchajúcich vlastných vektorov $\{\delta\}$. Pričom vlastné čísla ako násobitelia osovej sily N definujú stavy rozdvojenia rovnováhy. Príslušné vektory predstavujú potom tvary rovnováhy. Prenásobením osovej sily N najmenším vlastným číslom α_{cr} dostaneme hľadanú kritickú silu N_{cr} . Pri dosiahnutí kritickej sily sa prút dostáva do bodu rozdvojenia rovnováhy, kedy obidva tvary (priamy aj vybočený tvar) vyhovujú diferenciálnej rovnici pre dané homogénne okrajové podmienky.

Riešením zovšeobecneného problému vlastných hodnôt a vlastných vektorov matíc A' a B' dostávame sériu vlastných čísel, ktoré reprezentujú priamo hodnoty osových síl určujúcich stavy rozdvojenia rovnováhy. Príslušné vektory určujúce tvary vybočenia sú dané hodnotami primárnych a sekundárnych neznámych v uzloch prúta. Tieto je možné dosadiť do aproximačných polynómov a dostať tak spojitý priebeh tvarov vybočenia.

3.3.2 Zadanie príkladu

Pre porovnanie prútového a škrupinového modelu pri výpočte hodnoty kritickej sily je zvolený prút s prierezom s jednou osou symetrie (obr.3.7) (s prierezom z príkladu 6.4 str.130 [5]) o dĺžke 4,5m, proste uložený v obidvoch hlavných rovinách a vidlicovito uložený v krútení. Tento prierez bol zvolený zámerne s jednou osou symetrie, lebo vtedy pri vybočení v jednej z hlavných rovín prierezu (a to v rovine symetrie, v danom prípade rovina $z-x$) dochádza k Eulerovmu vzperu, pri ktorom hodnotu kritickej sily vieme určiť exaktne. Hodnoty kritických síl sú vypočítané aj približnou metódou (viď príloha 2)

V prípade prútového modelu je výpočet spracovaný v programoch MS EXCEL (zostavenie globálnych matíc prúta) a MathCAD (riešenie problému vlastných čísel a vlastných vektorov) (viď príloha 3). V prípade škrupinového modelu je použitý program ANSYS.



Obr. 3.7 Prierez a okrajové podmienky prúta

3.3.3 Riešenie MKP- škrupinový model v programe ANSYS

ANSYS umožňuje riešiť danú úlohu škrupinovým modelom použitím škrupinových elementov. Tieto elementy nahrádzajú steny prúta strednicovou rovinou so zadanou hrúbkou. Je zvolený prvok SHELL63, ktorý môže nadobúdať tvary trojuholníkové aj štvoruholníkové. V každom uzle má šesť stupňov voľnosti a to tri premiestnenia v smere súradných osí a tri pootočená okolo súradných osí. Je to dosko-stenový element umožňujúci aplikovať zaťaženie v rovine elementu ako aj kolmo na rovinu elementu a vyhodnocovať premiestnenia v rovine elementu tak aj kolmo na rovinu elementu. Má charakteristiky stenového a doskového elementu. Umožňuje zadať aj premennú hrúbku.

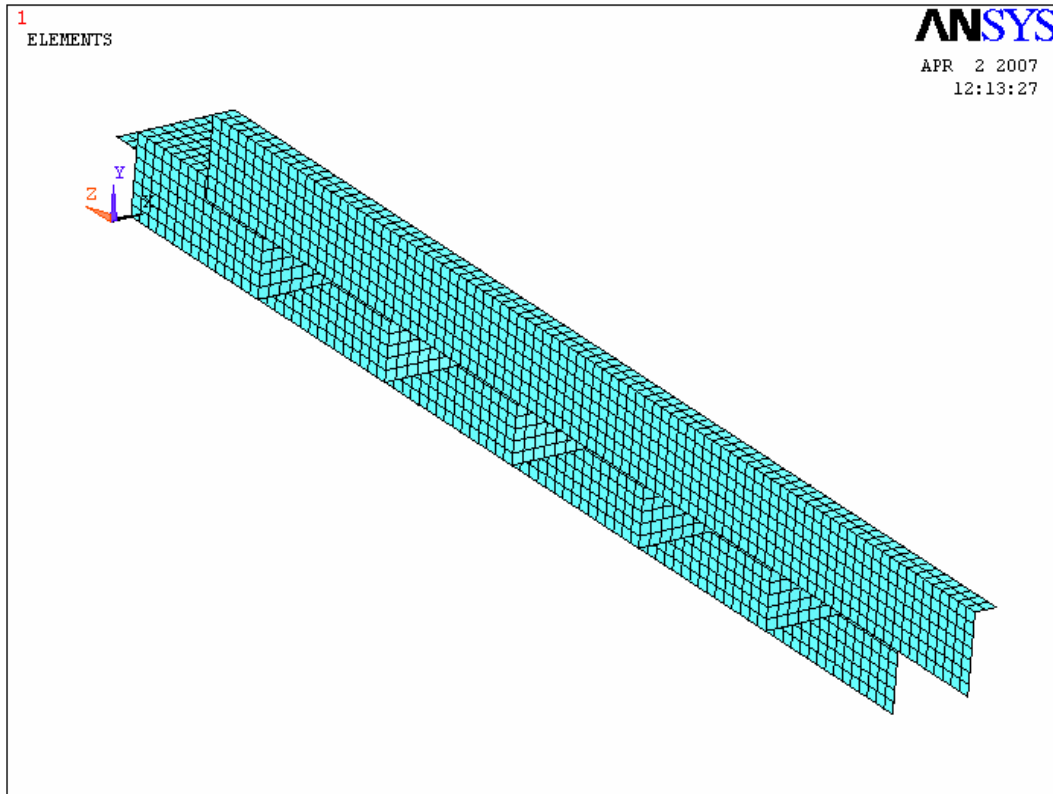
Postup modelovania

1. Ako prvé sa zadajú materiálové charakteristiky.

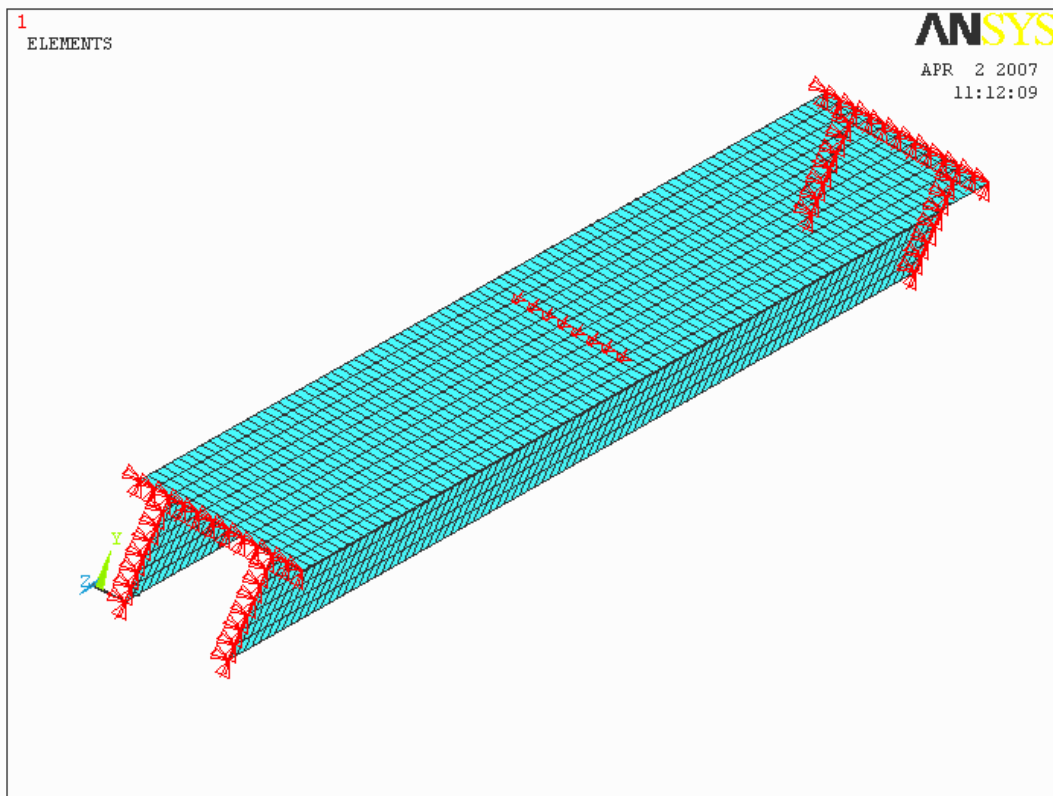
Tab. 3.4 Materiálové charakteristiky

Materiál	E [kPa]	ν
Oceľ	210 000 000	0,30

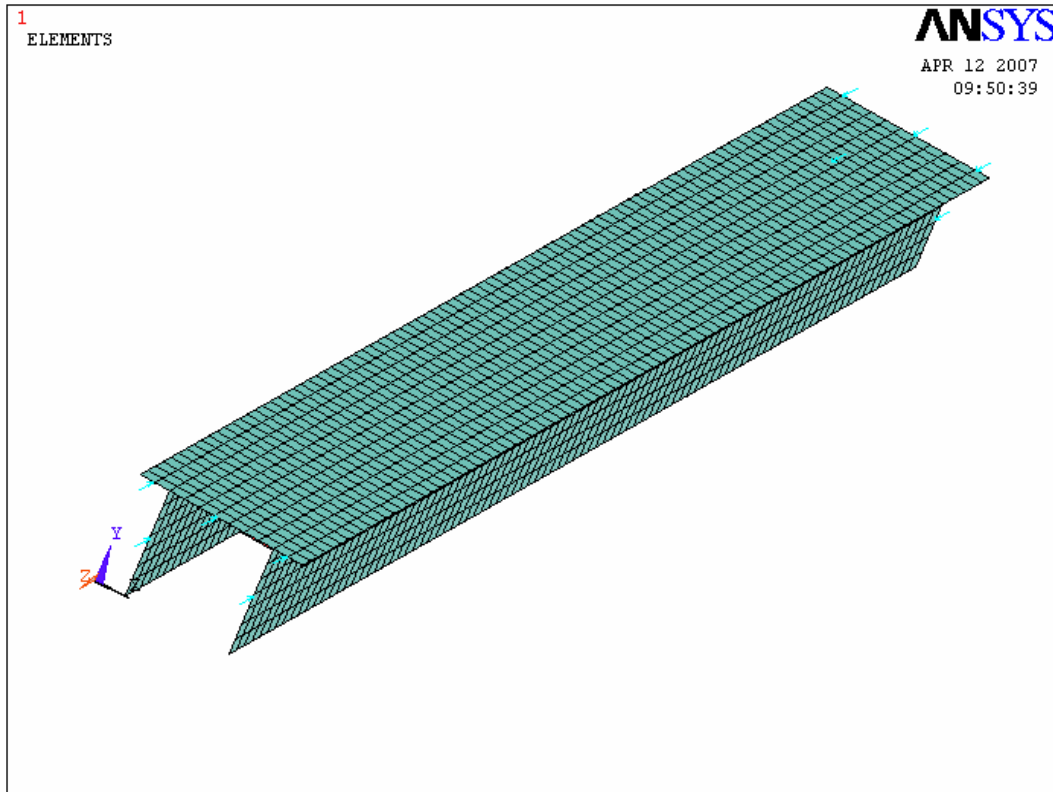
2. Modelovanie prúta
Model prúta je zobrazený na obr. 3.8. Treba podotknúť, že na to, aby sa mohli porovnávať výsledky s prúťovým modelom, musí sa zabrániť deformáciám v rovine prierezu prúta, aby bol splnený druhý predpoklad prúťového modelu (tuhosti priečneho rezu). Preto sú modelované v šestinách dĺžky diafragmy (obr. 3.8).
3. Zadeňovanie okrajových podmienok
V tomto prípade ide o klbové uloženie. V koncových prierezoch je zabránené posunutiam v rovine priečneho rezu a v strede dĺžky prúta na hrane diafragmy je zabránené pozdĺžnemu posunutiu. Spôsob uloženia je na obr. 3.9
4. Zadanie zaťaženia
V prvej fáze výpočtu je treba zaťažiť konštrukciu, aby bola programom vygenerovaná tuhostná a zaťažovacia matica prúta. Keďže ide o výpočet osovej kritickej sily je treba zadeňovať také zaťaženie na koncoch prúta, ktoré je staticky ekvivalentné sile pôsobiacej v ťažisku prierezu v smere pozdĺžnej osi prúta. To sa docieli zadaním spojitého zaťaženia na hranách elementov koncových prierezov. Zvolená je osová sila o hodnote 10MN. Potom sa spojitý zaťaženie na hrane elementu dostane podelením zvolenej sily plochou priečneho rezu a vynásobením príslušnou hrúbkou elementu. Zaťaženie je znázornené na obr. 3.10. Na obr. 3.11 je priebeh deformácie od osovej sily, ktorý musí reprezentovať iba osové skrátenie prúta, keďže ho spôsobuje centrická osová sila (kontrola zaťaženia).
5. Riešenie stability prúta
Keď prebehol statický výpočet môže sa pristúpiť k druhej fáze k stabilitnému výpočtu (*New Analysis/ Eigen buckling, Analysis option/ Block Lanczos, Nmode= počet vlastných tvarov, LDmulte=0.0*), a to riešenie problému vlastných čísel a vlastných vektorov matíc vygenerovaných v prvej fáze výpočtu. Po výpočte sa môžu načítať jednotlivé vlastné tvary s príslušnými frekvenciami. Každému vlastnému tvaru zodpovedá jedna hodnota kritickej osovej sily, ktorá sa získa vynásobením zvolenej osovej sily frekvenciou - vlastným číslom. Priebeh prvého vlastného tvaru je na obr. 3.12~3.14 druhého na obr. 3.15~3.17.



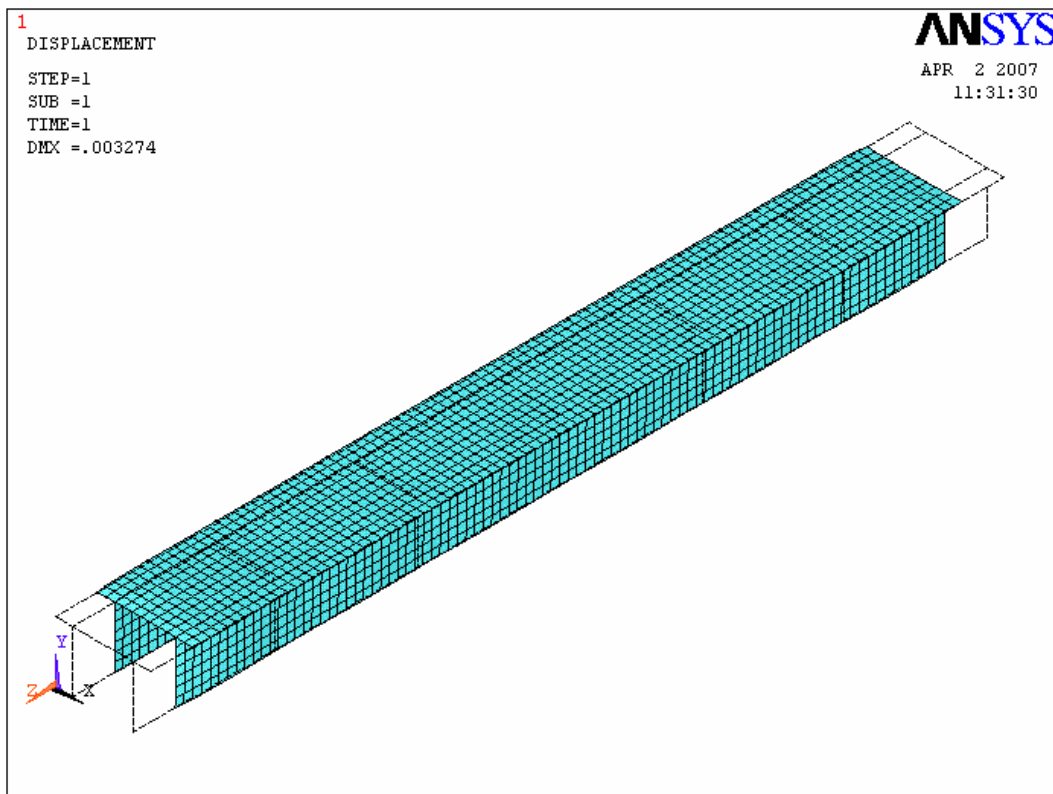
Obr. 3.8 Model prúta



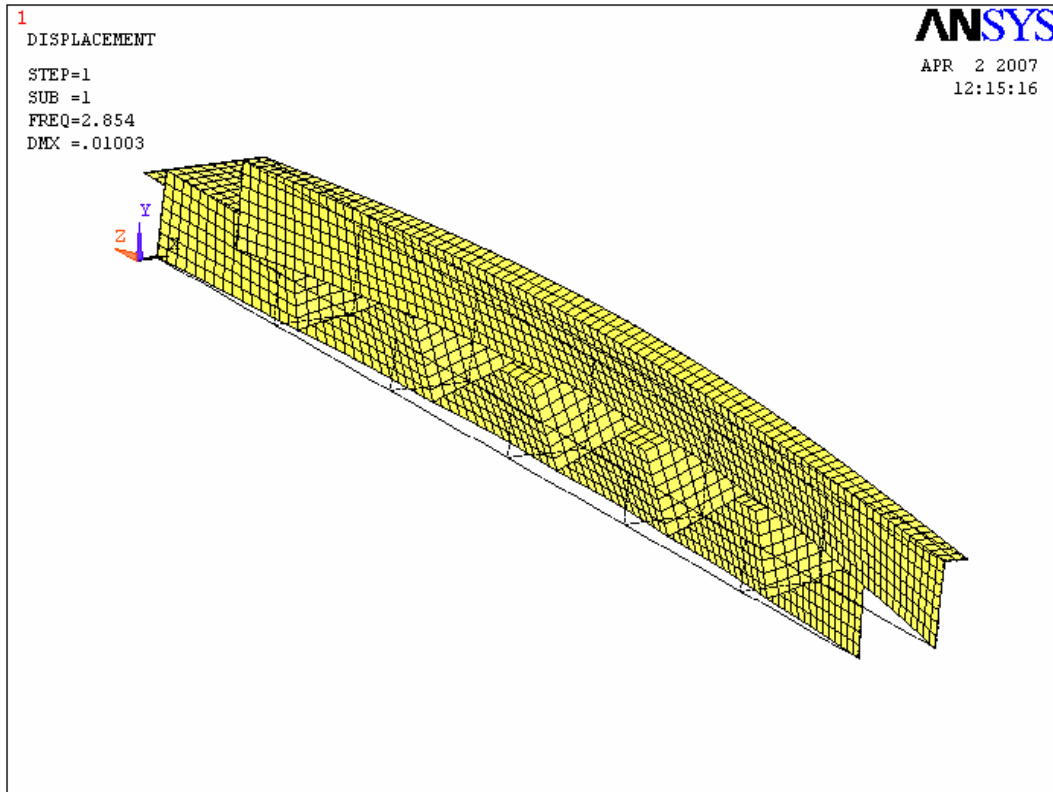
Obr. 3.9 Spôsob uloženia



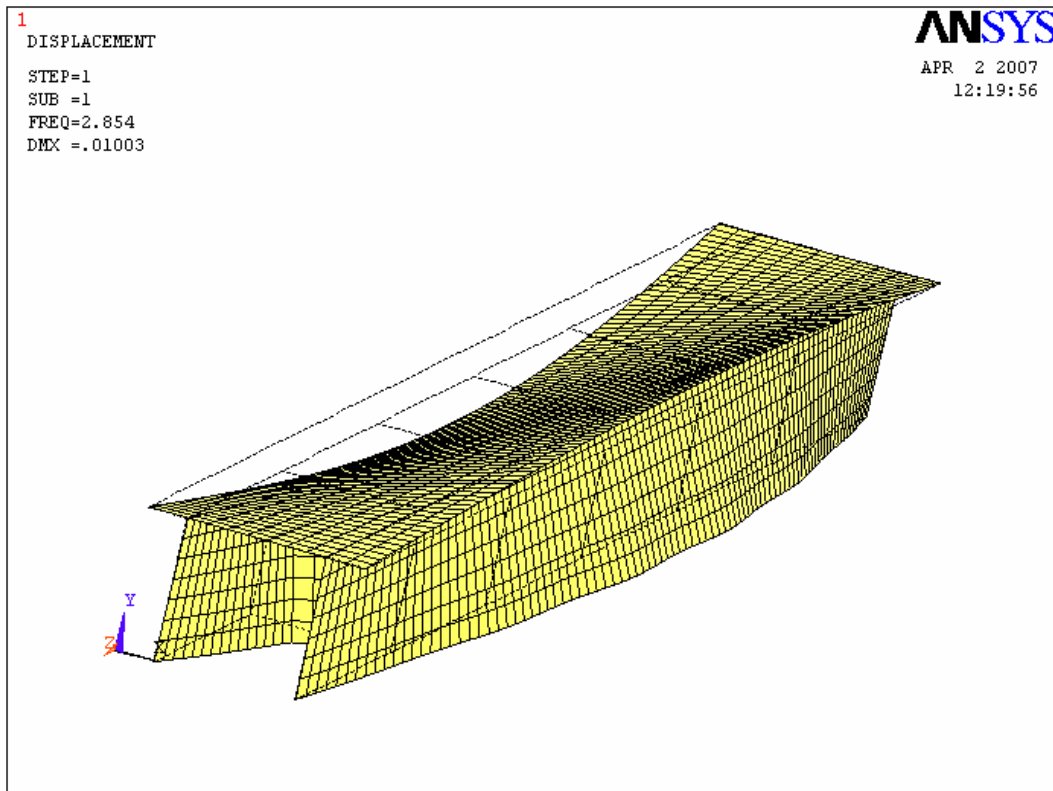
Obr. 3.10 Zaťaženie



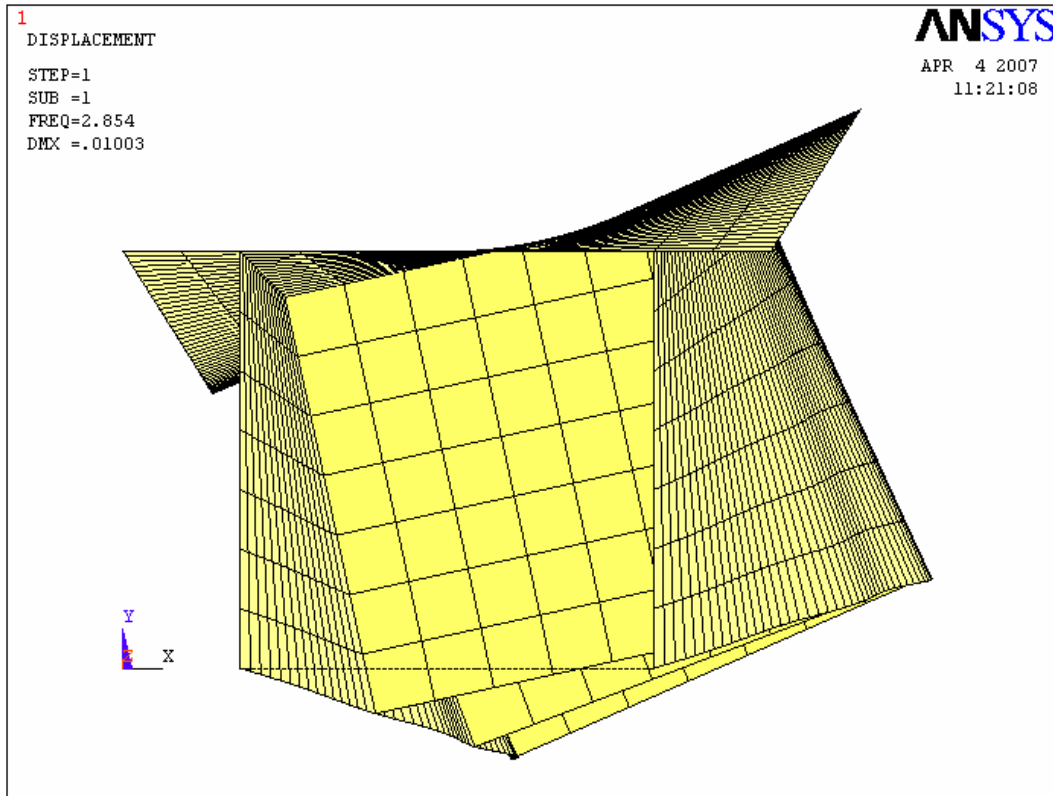
Obr. 3.11 Priebeg deformácie od osovej sily



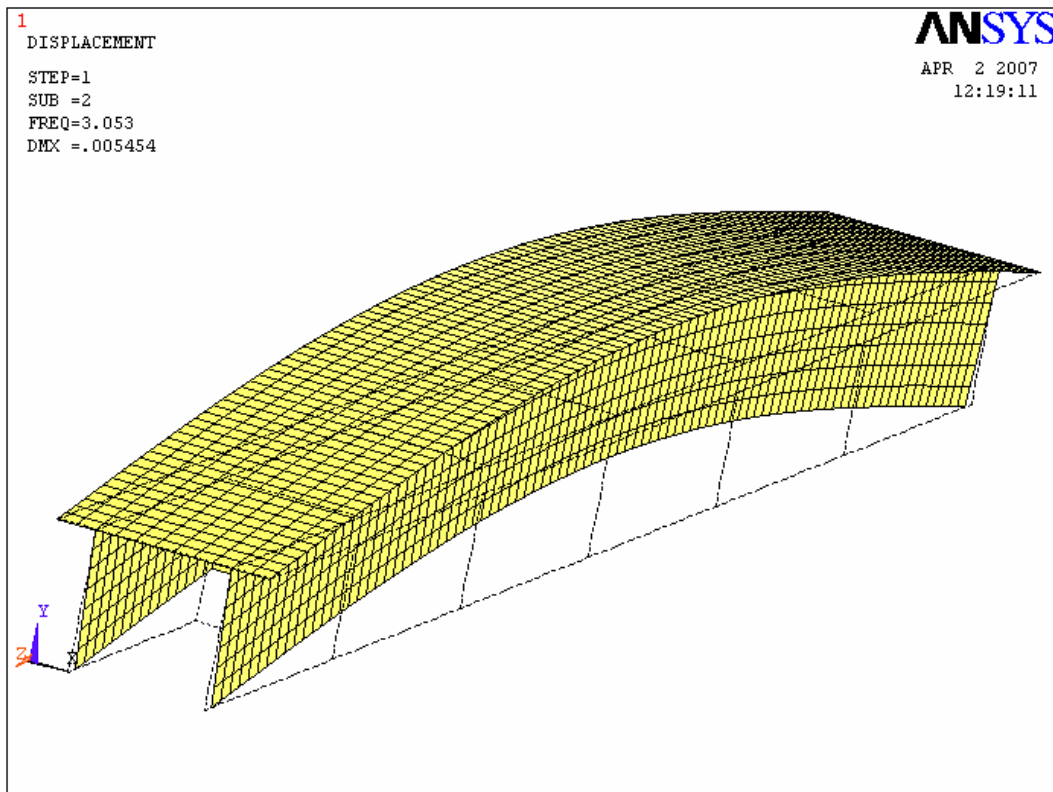
Obr. 3.12 1.vlastný tvar



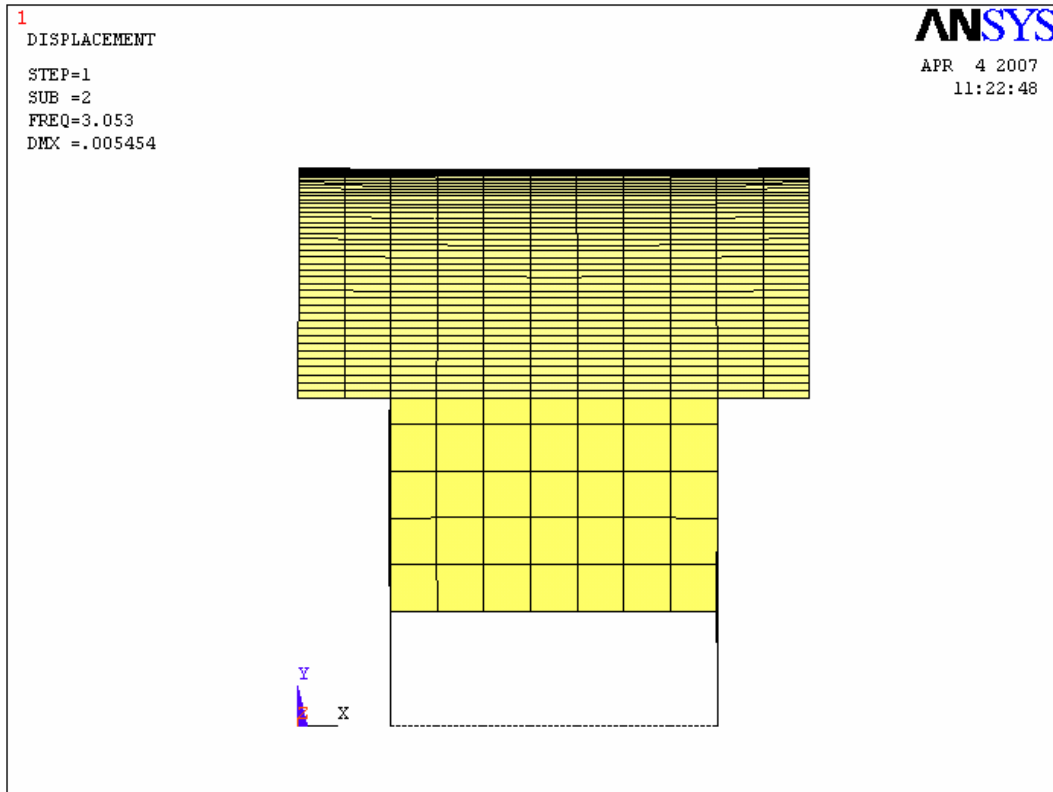
Obr. 3.13 1.vlastný tvar



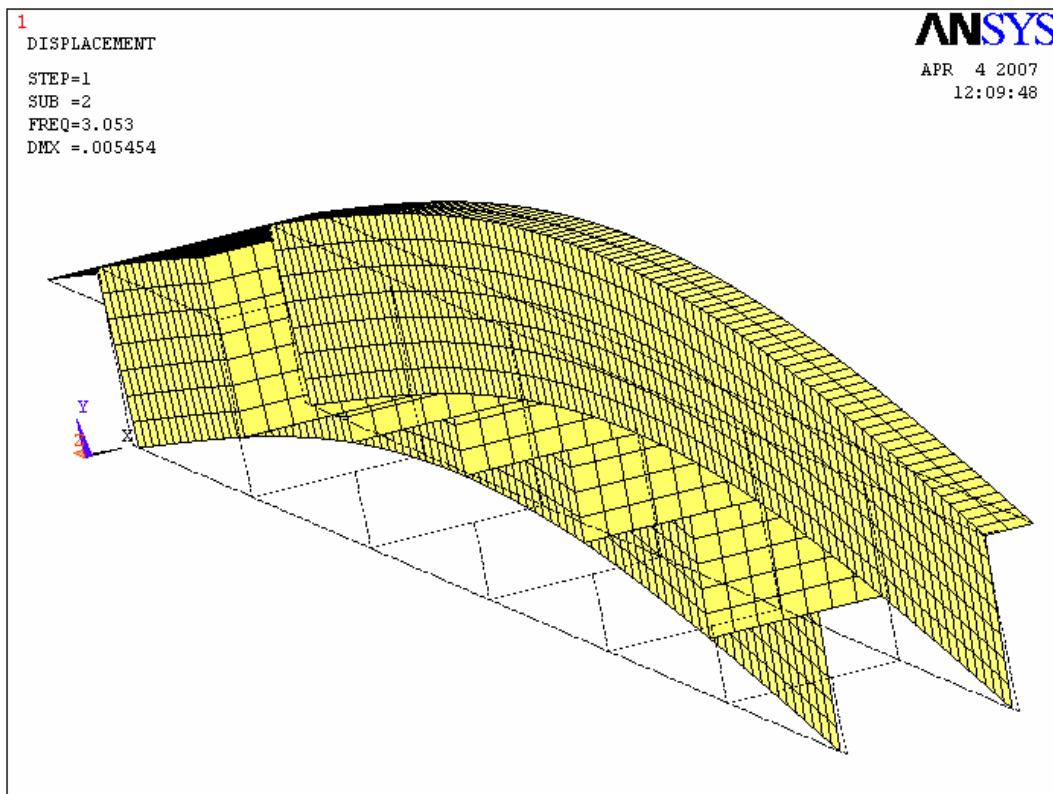
Obr. 3.14 1.vlastný tvar



Obr. 3.15 2.vlastný tvar



Obr. 3.16 2.vlastný tvar



Obr. 3.17 2.vlastný tvar

3.4 POROVNANIE RIEŠENIA MKP PRÚTOVÝM, ŠKRUPINOVÝM MODELOM A PRIBLIŽNOU METÓDOU

Prút má tvar prierezu a okrajové podmienky podľa obr. 3.7. Daný príklad bol vypočítaný MKP prútoým modelom najskôr manuálne pre 4 elementy, potom aj za pomoci programu napísanom vo VBA pre EXCEL pre 10 elementov. Výpočet kritických síl a tvaru vybočenia pomocou MKP prútoým modelom je uvedený v prílohe 3 spolu s jednotlivými maticami. V prílohe 4 je zobrazené aspoň grafické rozhranie spomínaného programu napísaného vo VBA v Exceli.

Vzhľadom na rozsiahlosť matic a manuálny výpočet zatiaľ stačí delenie na štyri elementy o rovnakej dĺžke 1,125m. Prút je nahradený nehmotnou osou a tvar prierezu je zohľadnený prierezovými charakteristikami vypočítanými v prílohe 2. Na zostrojenie všetkých matic je použitý program MS EXCEL. Na riešenie vlastných čísel a vlastných vektorov je použitý program MathCAD. Na obr. 3.18. je uvedený vektor vlastných čísel $\{\lambda\}$, ktorý po prenasobení jednotkou $[kN]$ (keďže moduly pružnosti boli zadané v $[kPa]$) dáva hodnoty kritických síl. Minimálna absolútna hodnota je v 21. riadku, ktorej prináleží vlastný vektor δ_{21} a vlastný tvar vykreslený na obr. 3.20, ktorý zodpovedá vybočeniu v smere osi y pri súčasnom skrútení. Druhá najmenšia hodnota je v 8. riadku, ktorej prináleží vlastný vektor δ_8 a vlastný tvar vykreslený na obr. 3.21, ktorý zodpovedá ohybovému vybočeniu v rovine symetrie.

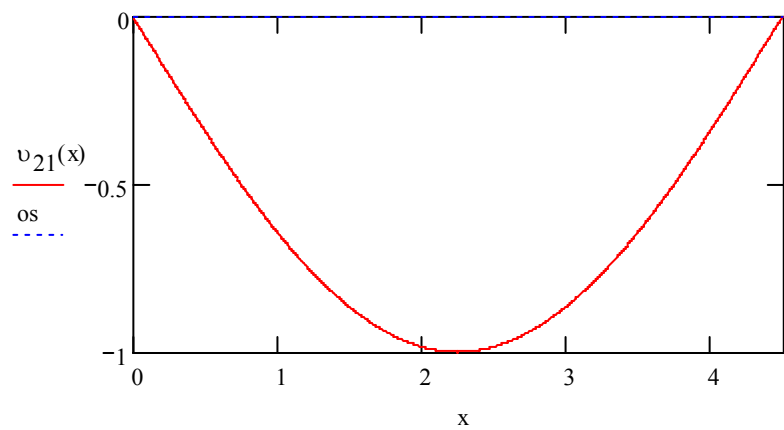
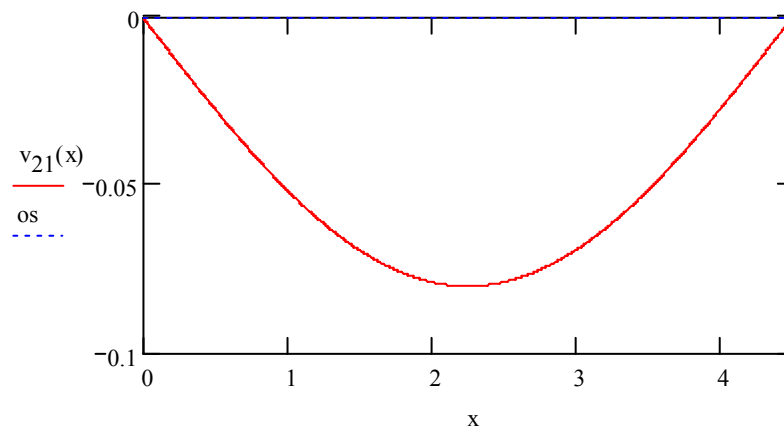
	1		1		1				
$\lambda =$	1	-3.08·10 ⁶	$\delta_{21} =$	1	0	$\delta_8 =$	1	-0.698	φ_{w1}
	2	-2.55·10 ⁶		2	0		2	-0.707	φ_{w2} W ₂
	3	-1.652·10 ⁶		3	0		3	-0.494	φ_{w3} W ₃
	4	-9.891·10 ⁵		4	0		4	-1	φ_{w4} W ₄
	5	-6.161·10 ⁵		5	0		5	-3.095·10 ⁻¹⁵	φ_{w5}
	6	-2.945·10 ⁵		6	0		6	-0.707	φ_{v1} V ₂
	7	-1.276·10 ⁵		7	0		7	0.494	φ_{v2} V ₃
	8	-3.169·10 ⁴		8	0		8	0.698	φ_{v3} V ₄
	9	-1.232·10 ⁷		9	-0.059		9	0	φ_{v4} V ₅
	10	-1.02·10 ⁷		10	-0.06		10	0	φ_{v1} v ₂
	11	-6.613·10 ⁶		11	-0.042		11	0	φ_{v2} v ₃
	12	-3.965·10 ⁶		12	-0.084		12	0	φ_{v3} v ₄
	13	-2.475·10 ⁶		13	0		13	0	φ_{v4} v ₅
	14	-1.37·10 ⁶		14	-0.06		14	0	φ_{v1} v ₂
	15	-1.191·10 ⁶		15	0.042		15	0	φ_{v2} v ₃
	16	-1.137·10 ⁶		16	0.059		16	0	φ_{v3} v ₄
	17	-7.425·10 ⁵		17	-0.698		17	0	φ_{v4} v ₅
	18	-5.247·10 ⁵		18	-0.707		18	0	φ_{v1} v ₂
	19	-4.511·10 ⁵		19	-0.494		19	0	φ_{v2} v ₃
	20	-2.872·10 ⁵		20	-1		20	0	φ_{v3} v ₄
	21	-2.836·10 ⁴		21	1.711·10 ⁻¹⁴		21	0	φ_{v4} v ₅
	22	-7.211·10 ⁴		22	-0.707		22	0	
	23	-1.457·10 ⁵		23	0.494		23	0	
	24	-1.431·10 ⁵		24	0.698		24	0	

Obr. 3.18 Vektor vlastných čísel, prvé dva vlastné vektory (reprezentujúce vlastné tvary) popis neznámych deformácií (sekundárnych a primárnych) pre vlastné vektory

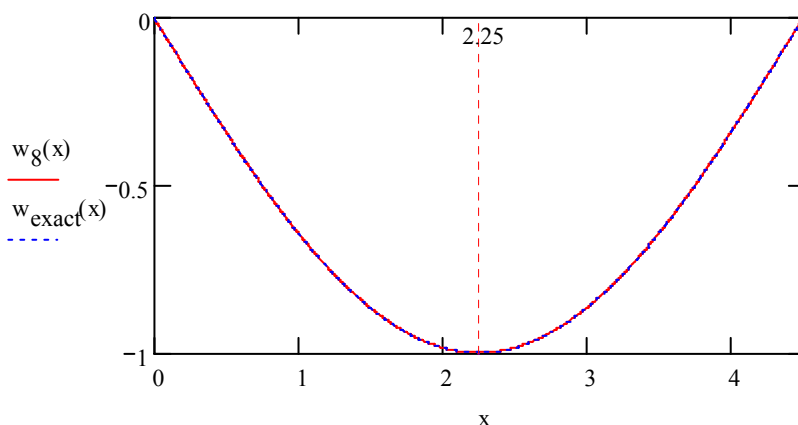
$W_1=0$	W_2	W_3	W_4	$W_5=0$
φ_{w1}	φ_{w2}	φ_{w3}	φ_{w4}	φ_{w5}
$V_1=0$	V_2	V_3	V_4	$V_5=0$
φ_{v1}	φ_{v2}	φ_{v3}	φ_{v4}	φ_{v5}
$\vartheta_1=0$	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4	$\vartheta_5=0$
$\varphi_{\vartheta1}$	$\varphi_{\vartheta2}$	$\varphi_{\vartheta3}$	$\varphi_{\vartheta4}$	$\varphi_{\vartheta5}$

Obr. 3.19 Delenie prútu, primárne a sekundárne neznáme

Po dosadení primárnych a sekundárnych neznámych z vlastných vektorov do aproximačných polynómov dostávame spojitý priebeh tvarov vybočení (príloha 3).



Obr. 3.20 Priebeh vybočenia pri prvom vlastnom tvare –
vybočenie kolmo na os symetrie $v_{21}(x)$
a súčasné skrútenie $\vartheta_{21}(x)$



Obr. 3.21 Priebeh vybočenia pri druhom vlastnom tvare-
vybočenie ohybom v rovine symetrie $w_g(x)$,
exaktný priebeh vybočenia (sínusoida) pri rovinnom vzpere $w_{exact}(x)$

Pre porovnanie sú uvedené aj výsledné hodnoty kritických síl vypočítané približným postupom podrobne popísaným v kapitole 3.2. Hodnota kritickej sily pri rovinnom vybočení je určená z Eulerovho vzorca. Výsledné hodnoty kritických síl sú uvedené v tab. 3.5. Percentuálny rozdiel medzi hodnotami kritických síl vypočítaných MKP prúťovým a škrupinovým modelom, rovinným vzperom Eulerovým riešením a priestorovým vzperom približným Goľdenvejzerovým riešením (upraveným Vlasovom) je zhodnotený v tab. 3.6.

Tab. 3.5 Výsledné hodnoty kritických síl

metóda výpočtu	rovinný vzper $N_{cr,y}$ [MN]	priestorový vzper $N_{cr,zw}$ [MN]
MKP - škrupinový model - ANSYS	30,53	28,54
MKP - prúťový model	31,69	28,36
rovinný vzper - Eulerova kritická sila	31,67	—
priestorový vzper - približná met. podľa Goľdenvejzera (Vlasova)	—	28,35

Tab. 3.6 Percentuálny rozdiel

rozdiel [%]	rovinný vzper			priestorový vzper		
	MKP pr.	MKP škr.	Euler	MKP pr.	MKP škr.	Goľdenvejzer
MKP pr.	0	3,8	0,06	0	0,63	0,04
MKP škr.- ANSYS	—	0	3,7	—	0	0,67
Euler/Goľdenvejzer	—	—	0	—	—	0

Z percentuálneho rozdielu v tab. 3.6 vyplýva, že pri rovinnom vzpere je medzi MKP prúťovým modelom a Eulerovým analytickým riešením zanedbateľný rozdiel. Podobne pri priestorovom vzpere je medzi MKP prúťovým modelom a Goľdenvejzerovým (Vlasovovým) približným riešením priestorového vzperu zanedbateľný rozdiel. Avšak medzi MKP prúťovým a škrupinovým modelom sú rozdiely viditeľné hlavne pri rovinnom (viac ako 3%) menej pri priestorovom vzpere (menej ako 1%).

To môže byť zapríčinené asi z najväčšej časti nemožnosťou zabezpečiť predpoklad tuhého priečného rezu, na základe ktorého je založená prúťová teória. V škrupinovom modeli sme tento predpoklad zabezpečovali diafragmami, ktoré však zabraňujú voľnému priebehu deplanácie, čo následne vplýva na hodnotu kritickkej sily. Na obr. 3.13 a 3.14 je vidieť mierne postranné vybočenie stien medzi výstuhami, s čím však prúťový model tiež neuvažuje. Vôbec vplyv lokálnej straty stability tvoriacich prvkov prierezu medzi diafragmami nie je v prúťovom modeli zahrnutý. Čím hustejšie by sme diafragmy navrhovali, tým väčšími by sme bránili voľnému priebehu deplanácie. Podobne to platí, ak by sme menili hrúbky stien diafragmami. V bežnej praxi sa do podobných prúťov (napríklad horný pás priehradového hlavného nosníka mostov) diafragmy navrhujú v hustote, aká bola zvolená v danom príklade. Preto je v tomto aspekte prúťový model vzdialenejší od skutočnosti. Vzhľadom na to, že prúť je vždy súčasťou konštrukcie, je ťažké odhadnúť, nakoľko je ktorá metóda presnejšia, či prúťová alebo škrupinová.

Treba poznamenať, že pomer najväčšieho rozmeru priečného rezu ku dĺžke prúťu je o niečo väčší ako $1/10$, čo je na hranici teórie prúťového modelu. Pri väčšine prúťov oceľových konštrukcií je tento pomer väčší. Pri väčšej dĺžke prúťu by bol nepriaznivý vplyv lokálneho vydúvania stien prúťu menší, čím by bola zhoda medzi prúťovým a škrupinovým modelom väčšia.

Ďalším možným dôvodom je, že pri prúťovom modeli bol zvolený aproximačný polynóm iba tretieho stupňa (kubický priebeh). Napriek tomu z obr. 3.21 je zrejmé, že výsledný 2. vlastný tvar vybočenia "leží" na presnom priebehu vybočenia analytického riešenia (ktorý je zhodný s polovlnou sínusoidy) a chyba MKP prúťovým modelom v porovnaní s exaktným Eulerovým riešením je 0,06%. Pre presnejšie riešenie postačuje zväčšiť počet elementov. Napríklad pri počte 10 elementov chyba klesla na 0,0013%. Pri použití aproximačného polynóma s vyšším stupňom by boli dosiahnuté podobné rozdiely už pri menšom počte elementov. Avšak v tomto prípade by museli byť elementy s viac ako dvomi uzlami podľa stupňa polynómu.

3.5 POROVNANIE KRITICKÝCH SÍL PRÚTOV PRE VYBRANÉ KOMBINÁCIE OKRAJOVÝCH PODMIENOK VYPOČÍTANÝCH MKP PRÚTOVÝM MODELOM A PŘIBLIŽNOU METÓDOU

Pre potrebu porovnania väčšieho množstva kritických síl by nebolo možné v prípade MKP prútoým modelom postupovať manuálnym spôsobom (podobne ako v kapitole 3.4, druhá časť prílohy 3) pri zostavovaní jednotlivých matíc, či už z hľadiska časovej náročnosti alebo vysokej pravdepodobnosti výskytu chýb. Preto bol vytvorený už spomínaný program vo VBA pre EXCEL založený na MKP prostredníctvom prútového modelu podľa postupu uvedeného v kapitole 3.3.1.

Vráťme sa k súčiniteľom v tab. 3.1 a 3.2 a približnej metóde výpočtu kritickej sily priestorovej straty stability prúta s jednoosovo symetrickým prierezom (3.20), keď os z je osou symetrie. Pre tie prúty s kombináciami okrajových podmienok v ohybe a krútení, ktorým prináleží záporný súčiniteľ z tab. 3.1 a 3.2 vychádzajú hodnoty kritických síl priestorovej straty stability väčšie ako sú hodnoty kritických síl prislúchajúcich jednotlivým zložkám straty stability, z ktorých priestorový tvar straty stability pozostáva, teda neplatí (3.22). Okrem toho v týchto prípadoch môže často nastať, že v (3.20) sa pod odmocninou vyskytne záporné číslo a riešenie preto vedie na komplexné číslo. Zaujímavý je aj fakt, že pri prúte s takouto kombináciou okrajových podmienok závisí aj od vzájomného pomeru veľkostí kritických síl $N_{cr,z}$ a $N_{cr,T}$, či bude hodnota kritickej sily z (3.20) reálne alebo komplexné číslo. Napríklad pre T prierez s dimenziami pásnice 300x20mm a steny 300x20mm pre okrajové podmienky, ktorým odpovedá súčiniteľ rovný -0,36 z tab. 3.1, keď budeme meniť dĺžku prúta v intervale 0,5~5m zistíme, že pri dĺžkach približne v intervale 1,5m~2,5m bude pre kritickú silu vychádzať komplexné číslo, zatiaľ čo pri dĺžkach mimo tohto intervalu bude vychádzať reálne číslo. Treba podotknúť, že komplexné číslo vychádza práve pre také dĺžky prúta, kedy približne platí: $N_{cr,z} \cong N_{cr,T}$. Preto je možné usudzovať, že vzájomný pomer kritických síl prislúchajúcich jednotlivým separovaným zložkám priestorového tvaru straty stability (ohybovej $N_{cr,z}$ a skrútení $N_{cr,T}$) bude mať významný vplyv na výslednú hodnotu kritickej sily priestorovej straty stability.

Na lepšiu predstavu vplyvu vzájomného pomeru kritických síl prislúchajúcich dvom zložkám priestorového tvaru straty stability na výsledný priestorový tvar straty stability a príslušnú kritickú silu je pre prút s prierezom (prevzatým z príkladu 6.4 str.130 komentára k ČSN 731401 [5]) a s okrajovými podmienkami zobrazenými na obr. 3.22 zostrojený graf závislosti jednotlivých kritických síl od dĺžky prúta (výpočet je uvedený v prílohe 2). Pre v tomto prípade prierez s jednou osou symetrie (osou z) môže nastať priestorový vzper, ktorý sa skladá z ohybovej zložky v rovine kolmej na os symetrie (os z) a súčasne zo skrútenia. Samotnej ohybovej zložke v rovine kolmej na os z (ktorá v tomto prípade bez súčasného skrútenia nastať nemôže) prislúcha kritická sila:

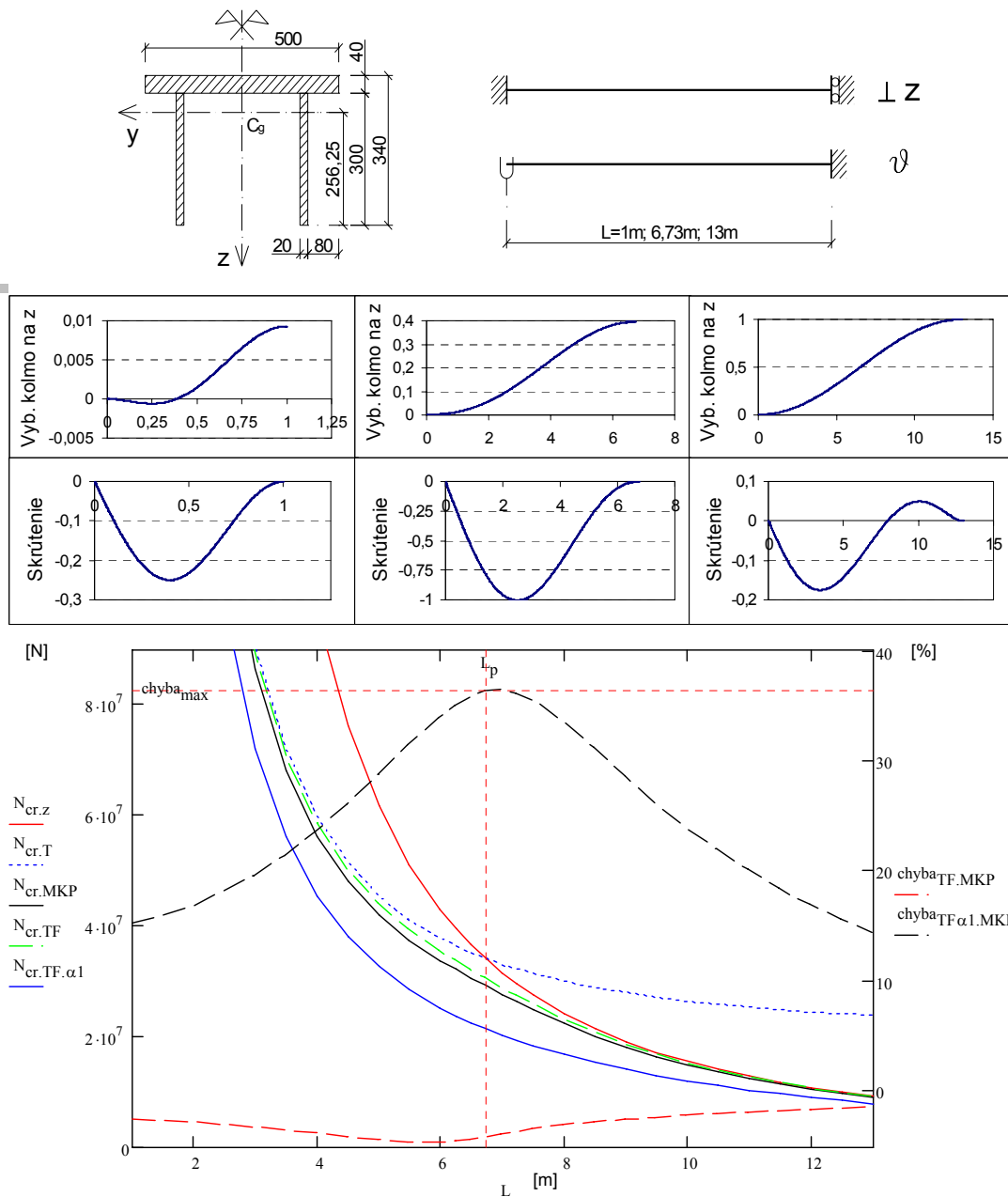
$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 EI_z}{k_z^2 L^2}. \quad (3.39)$$

Samotnému skrúteniu prúta prislúcha kritická sila:

$$N_{cr,T} = \frac{1}{i_s^2} \left(GI_t + \frac{\pi^2 EI_\omega}{k_w^2 L^2} \right) \quad (3.40)$$

Na obr. 3.22 sú na grafe vynesené kritické sily (3.39), (3.40), kritická sila priestorovej straty stability podľa približnej metódy $N_{cr,TF}$ z (3.20) pre súčiniteľ $\alpha_{zw} = 0,042$ prislúchajúci

daným okrajovým podmienkam a $N_{cr,TF\alpha 1}$ pre súčiniteľ položený $\alpha_{zw} = 1$, ďalej kritická sila priestorovej straty stability $N_{cr,MKP}$ vypočítaná MKP prúťovým modelom pomocou zhotoveného programu vo VBA EXCEL a nakoniec percentuálne vyjadrené chyby približnej metódy v porovnaní s výsledkami $N_{cr,MKP}$ v závislosti od dĺžky prúta 1m~13m. V prípade, že chyba je na strane nebezpečnej potom je vynesená zápornou hodnotou. Chyba približnej metódy v porovnaní s MKP je označená na grafe ako $chyba_{TF,MKP}$, chyba približnej metódy pri položení koeficienta $\alpha_{zw} = 1$ (bez ohľadu na okrajové podmienky) v porovnaní s MKP ako $chyba_{TF\alpha 1,MKP}$.



Obr. 3.22 Prierez prúta a okrajové podmienky (OP)
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 1m; 6,73m; a 13m (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 0,042$ odpovedajúce konkrétnej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

Kritická sila pri skrútení (3.40) sa mení s dĺžkou prúta menej (vzhl'adom na prvý člen v zátvorke) ako kritická sila ohybovej straty stability (3.39). Dĺžkou L_p je označená dĺžka prúta, pri ktorej sa tieto kritické sily presne rovnajú:

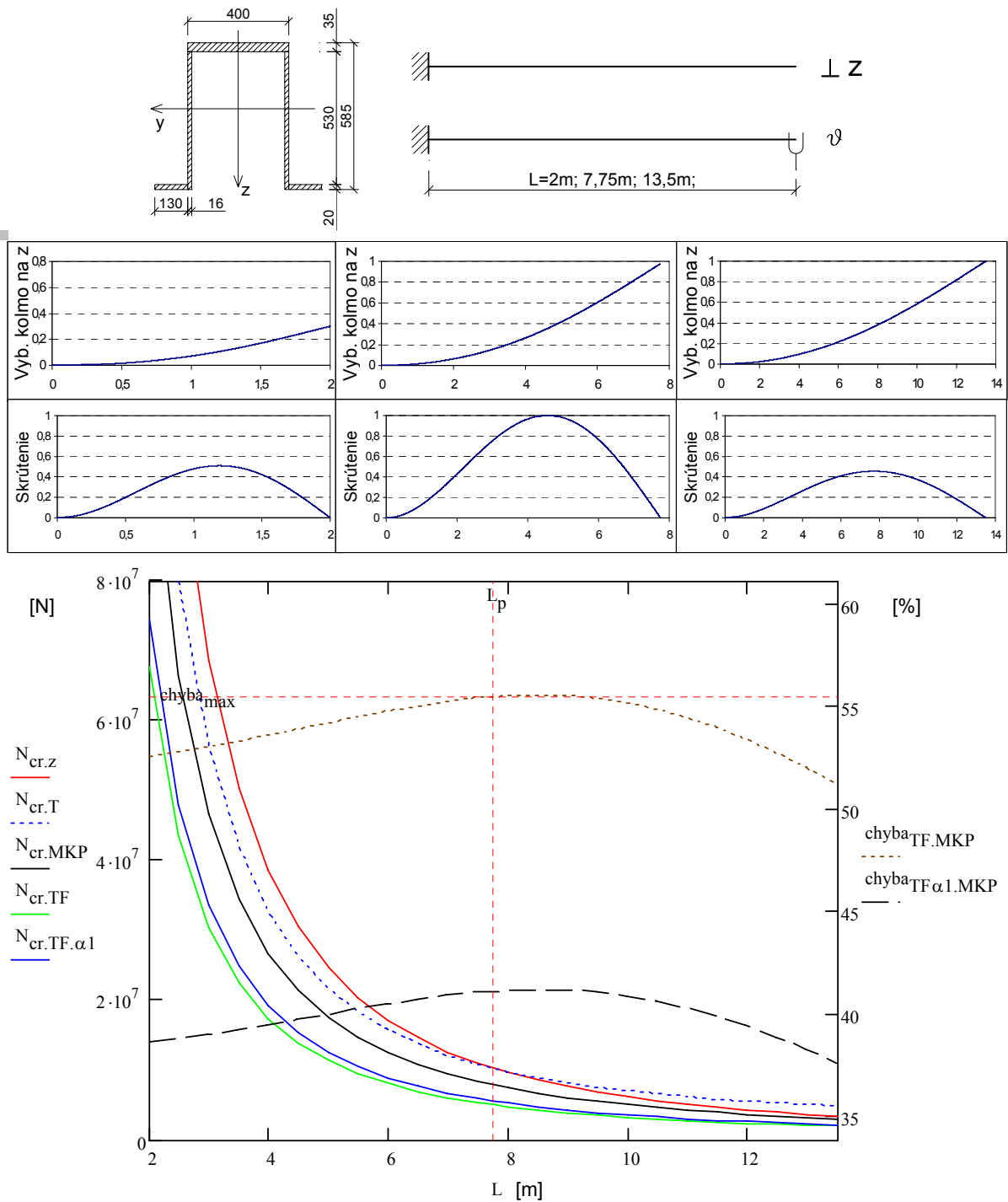
$$L_p = \pi \sqrt{\frac{EI_z k_w^2 i_s^2 - EI_\omega k_z^2}{GI_t k_z^2 k_w^2}}. \quad (3.41)$$

Nad grafom sú vykreslené priebehy deformácií (vybočenie kolmo na os symetrie a súčasné skrútenie) pri priestorovej strate stability prúta s dĺžkami $L = 1m$; $L = L_p = 6,73m$; a $L = 13m$.

Vzhl'adom na to, že princíp približnej metódy (popísanej v 3.2) spočíva v tom, že sa vopred volia aproximácie zložiek vybočenia (ohybovej zložky v rovine kolmej na os symetrie a tvar skrútenia) pomocou priebehov vlastných tvarov straty stability prútov (Vlasov volil vlastné tvary priečného kmitania prútov) tak, aby tieto vyhovovali reálnym okrajovým podmienkam danej zložky priestorového vybočenia vyšetrovaného prúta a potom sa kritická sila vyjadruje z podmienky existencie netriviálneho riešenia, by sa dalo očakávať, že v prípadoch, kedy je skutočný tvar priestorovej straty stability dobre vystihnutý volenými vlastnými tvarmi, bude chyba približnej metódy minimálna. Avšak z grafu na obr. 3.22 je zreteľné, že pri dĺžke prúta L_p , kedy bol dobre vystihnutý priestorový tvar straty stability prúta (ohybová zložka vybočenia v rovine kolmej na os symetrie aj tvar skrútenia), bola dosiahnutá najväčšia chyba približnej metódy v porovnaní s MKP, zatiaľ čo pri dĺžkach 1m a 13m kedy v prvom prípade nesedel tvar vybočenia kolmo na os z a v druhom nesedel tvar skrútenia s volenými vlastnými tvarmi (či už riešenia vlastných tvarov straty stability alebo vlastného priečného kmitania prútov), bola dosiahnutá minimálna chyba. Všimnime si na grafe na obr. 3.22, že kritické sily priestorovej straty stability $N_{cr,TF}$ (približnou metódou) a $N_{cr,MKP}$ (MKP) sa v okrajových častiach blížia: ku kritickej sile straty stability skrútením (na ľavej strane) a ku kritickej sile ohybovej straty stability kolmo na os symetrie (na pravej strane). Ak jedna zo zložiek priestorového vybočenia (ohybová zložka alebo skrútenie) výrazne prevláda nad druhou, potom hodnota kritickej sily priestorovej straty stability sa blíži hodnote tej kritickej sily, ktorá prislúcha dominantnej zložke vybočenia. To je aj dôvodom prečo v okrajových častiach, kde bola dominantná jedna zložka priestorového tvaru straty stability, ktorá bola v približnej metóde dobre vystihnutá voleným tvarom vybočenia, bola aj napriek nevystihnútiu druhej zložky chyba približnej metódy pomerne malá (menšia ako v oblasti dĺžok $\sim L_p$). Z toho vyplýva, že pri hodnotení približnej metódy je potrebné porovnávať práve pri dĺžkach prútov, pri ktorých sa kritické sily jednotlivých zložiek priestorového tvaru straty stability približne rovnajú a to je pri dĺžkach približne L_p . V tomto prípade pre súčiniteľ α_{zw} odčítaný z tab. 3.1 na základe príslušných okrajových podmienok bola chyba približnej metódy 4,7% na strane nebezpečnej a pri položení $\alpha_{zw} = 1$ bola chyba 36,5% na strane bezpečnej.

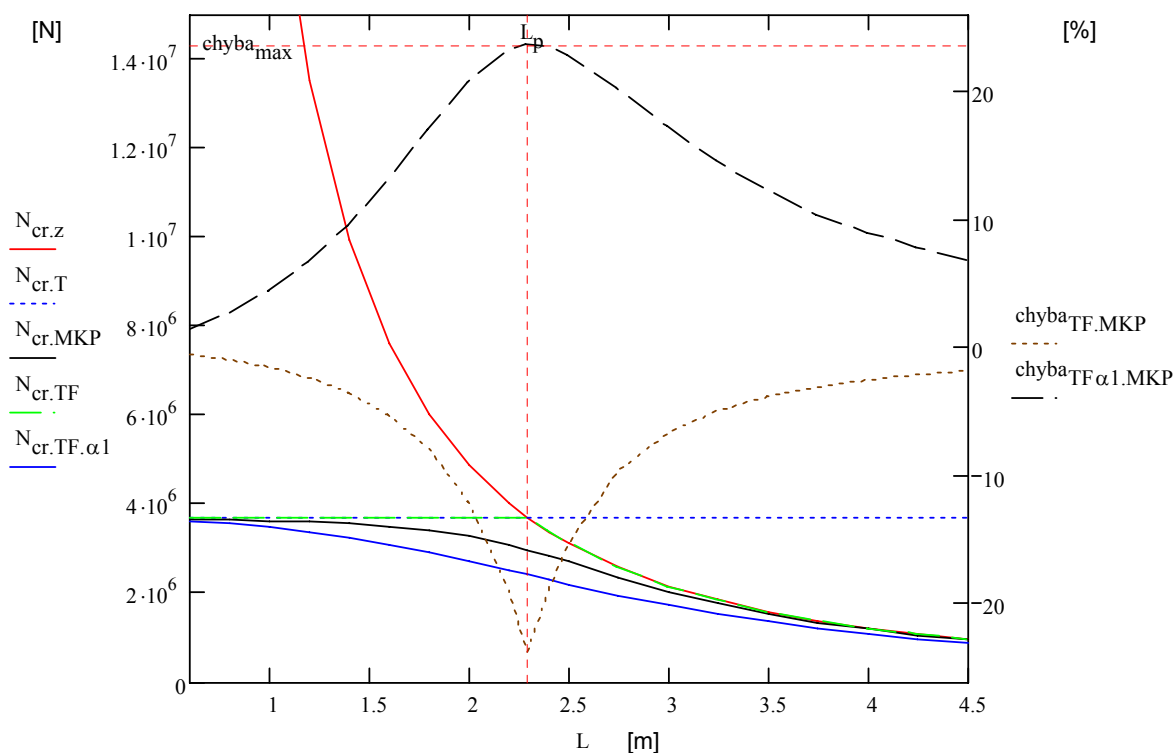
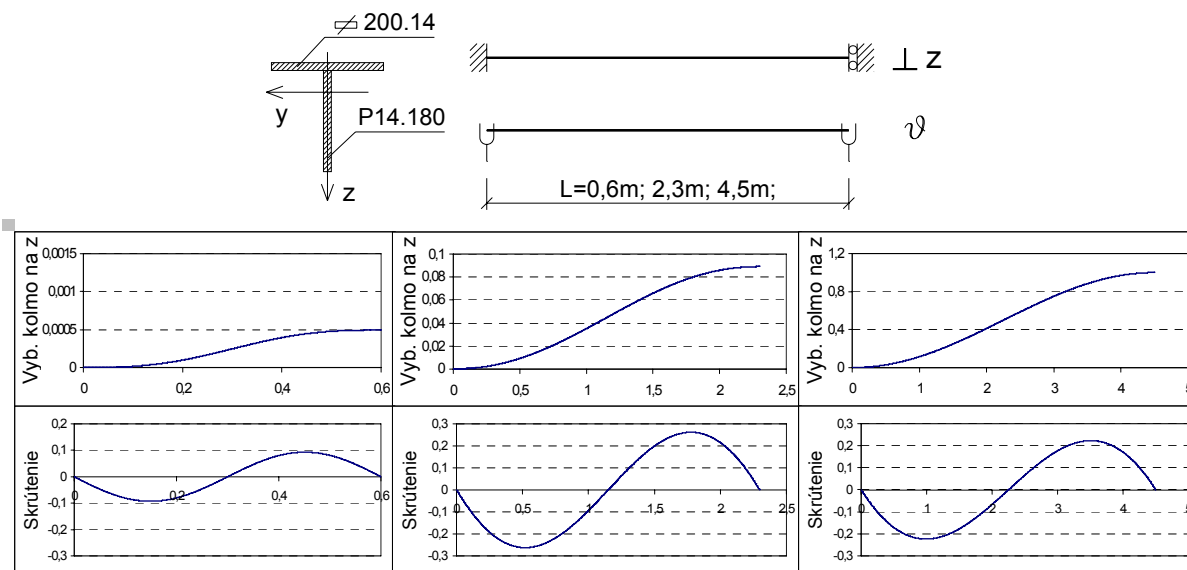
Tu sú uvedené prípady s inými prierezmi s jednou osou symetrie (osou z) a rôznym uložením prúta. Pre každý tu uvedený prípad sú na obrázku znázornené: tvar prierezu a okrajové podmienky prúta a na príslušnom grafe vynesené jednotlivé kritické sily (podobne ako na obr. 3.22) a chyby približnej metódy so súčiniteľom α_{zw} odčítaným z tab. 3.1 ($chyba_{TF,MKP}$) a tiež pre $\alpha_{zw} = 1$ ($chyba_{TF\alpha 1,MKP}$) v závislosti od dĺžky prúta s vynesenu dĺžkou L_p . Nad grafom sú vykreslené tvary vybočenia pre krajné hodnoty dĺžok prúta a pre L_p .

Ako už bolo spomenuté v predposlednom odseku v 3.2.2 ak súčiniteľ, ktorý je $\alpha_{zw} > 1$ položíme $\alpha_{zw} = 1$, potom sa hodnoty kritických síl približnou metódou zväčšia, ale v prípade



Obr. 3.23 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 2m; 7,75m; a 13,5m (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 1,494$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

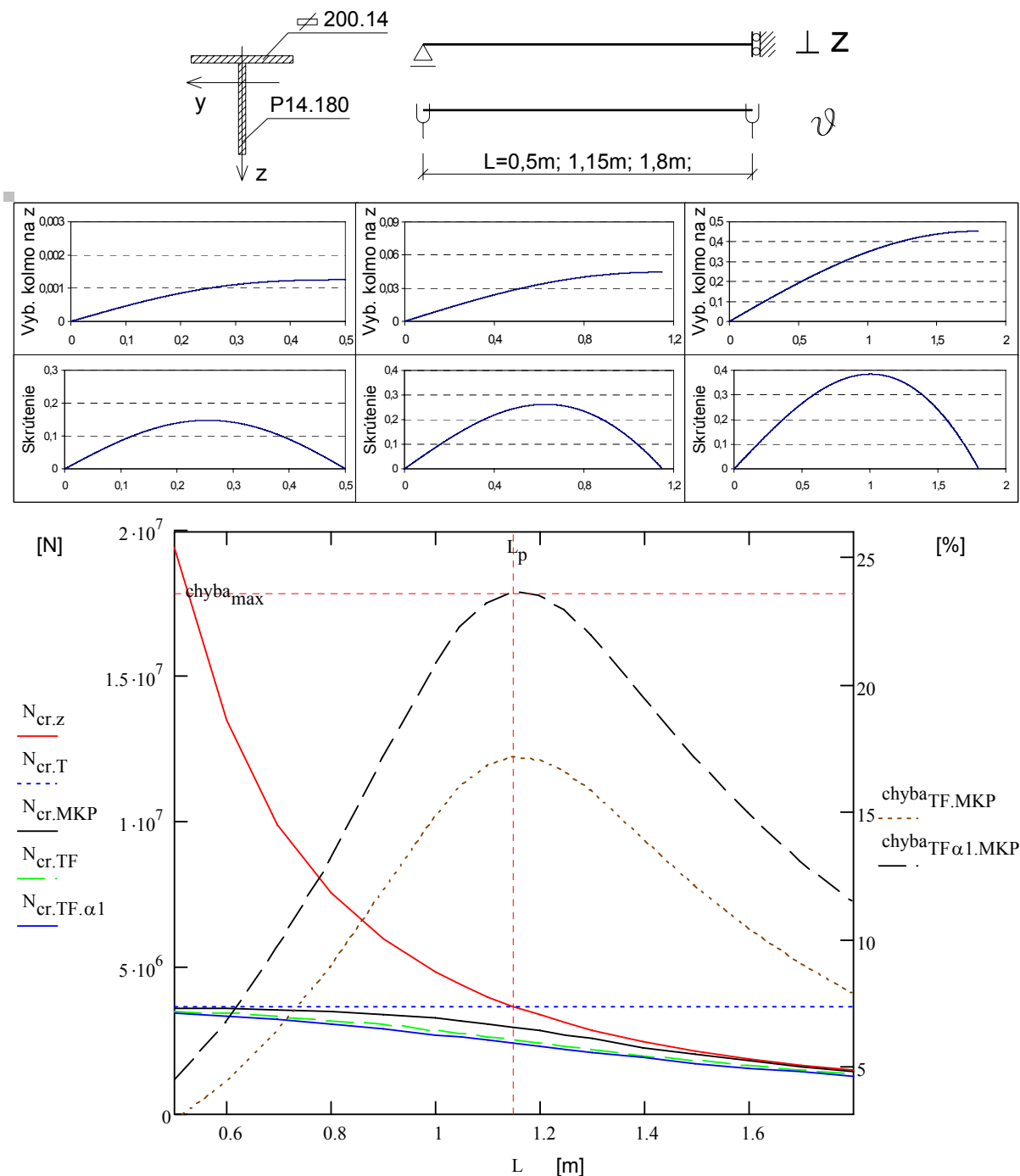
prúta na obr. 3.23 s klobúkovým prierezom je to napriek tomu na strane bezpečnej, keďže pre všetky dĺžky prúta je kritická sila vypočítaná MKP stále väčšia ako sila vypočítaná približnou metódou. Vzhľadom na to, že v tomto prípade tu nie je taký výrazný nepomer medzi hodnotami kritických síl prislúchajúcich jednotlivým zložkám priestorového vybočenia ako v predošlom príklade (ani jedna zo zložiek vybočenia nie je dominantnou), je tvar vybočenia dobre vystihnúť pri všetkých vyšetrovaných dĺžkach prúta a chyby pre tu uvedené rozmedzie



Obr. 3.24 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 0,6m; 2,3m; a 4,5m (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 0$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

dĺžok prúta sa pohybujú v užšom intervale. Napriek tomu aj tu je dosiahnutá najväčšia chyba približne v oblasti dĺžok $\sim L_p$.

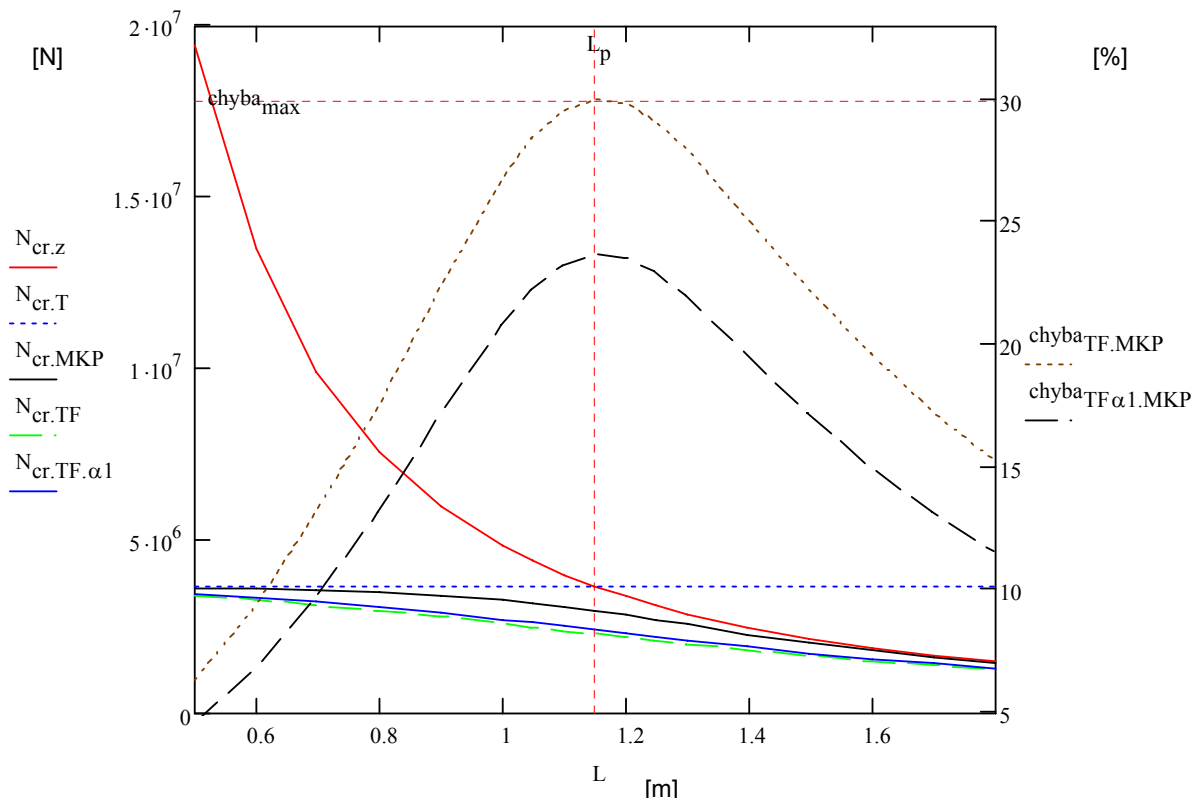
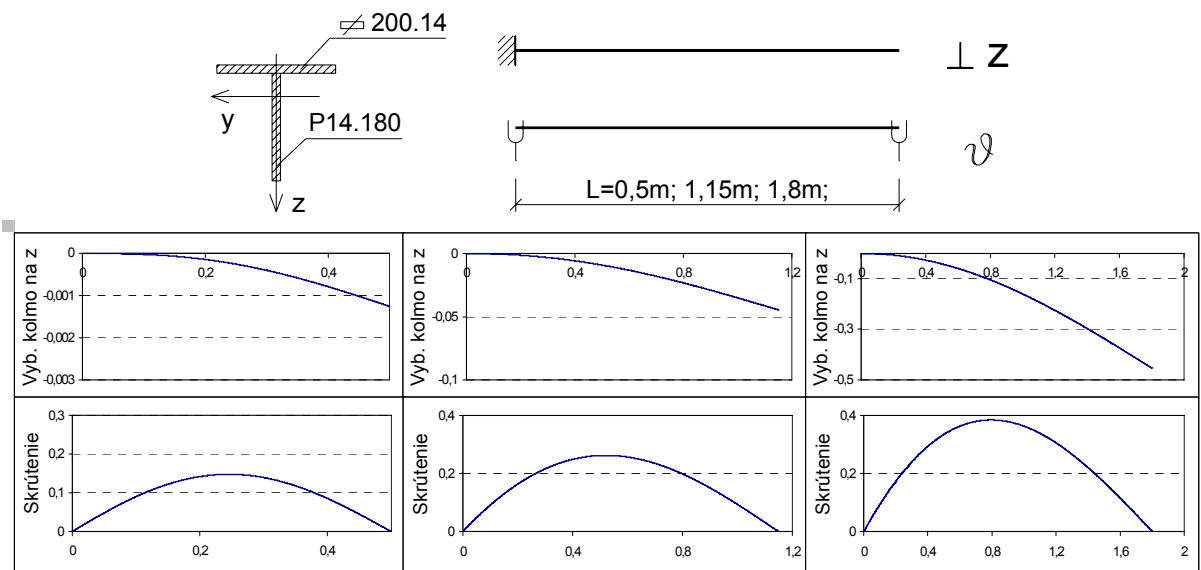
Príklad prúta na obr. 3.24 s príslušnými okrajovými podmienkami bol zvolený z dôvodu, že mu odpovedá súčiniteľ z tab. 3.1 rovný nule. To sa v približnej metóde prejavilo tak, že kritická sila priestorovej straty stability vypočítaná z (3.20) bola pre všetky dĺžky prúta presne rovná menšej z kritických síl prislúchajúcich zložkám priestorového vzperu (ohybovej zložky v rovine a skrúteniu). Vzhľadom na to, že kritická sila vypočítaná MKP je menšia ako



Obr. 3.25 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 0,5m; 1,15m; a 1,8m (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 0,721$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

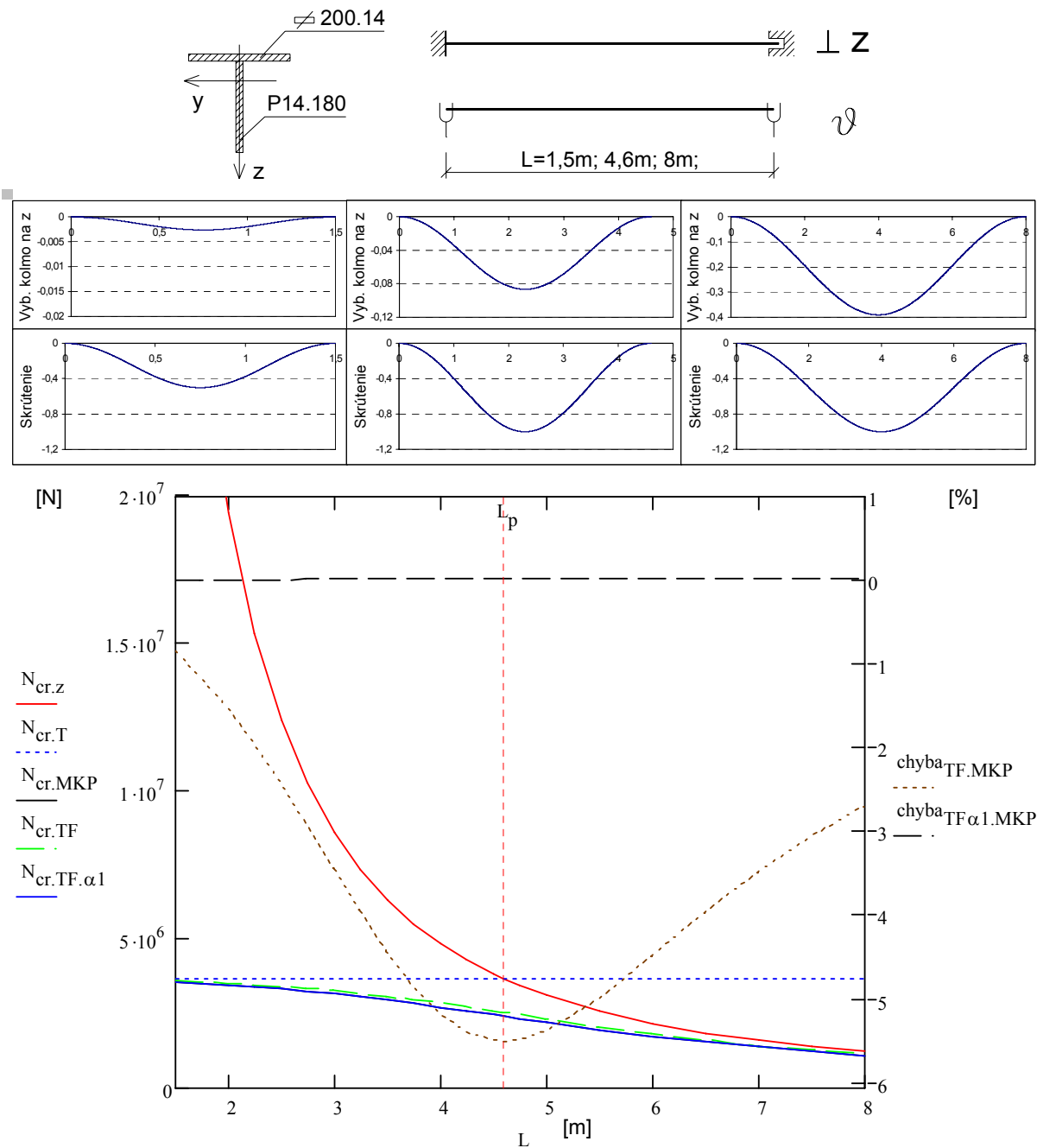
minimálna z nich, je chyba približnej metódy na strane nebezpečnej, avšak po položení $\alpha_{zw} = 1$ je chyba na strane bezpečnej. V okrajových častiach dĺžok je jedna zo zložiek priestorového vzperu natoľko dominantná, že kritická sila priestorovej straty stability vypočítaná MKP je takmer rovná kritickému sile prislúchajúcej tejto dominantnej zložke.

Prúty s "T" prierezmi na obr. 3.24~3.27 alebo s "L" prierezom na obr. 3.28 majú nulový výškový moment zotrvačnosti, čo spôsobilo, že kritická sila pri strate stability



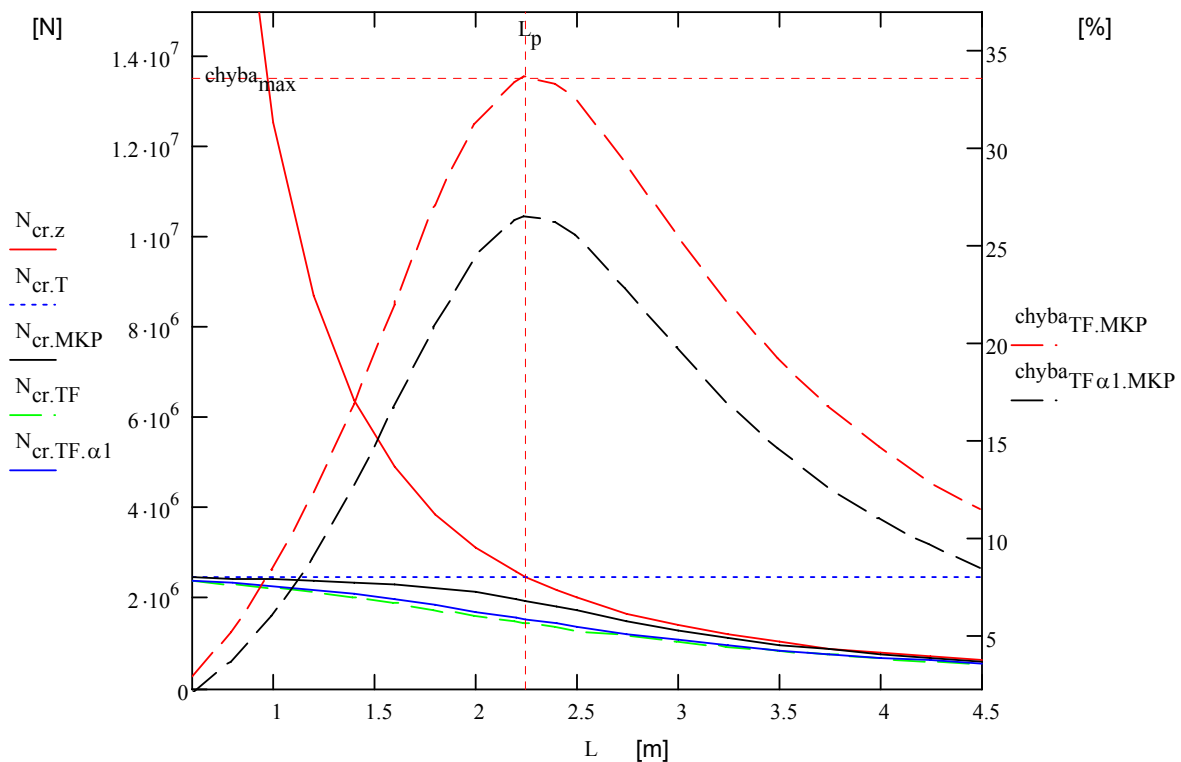
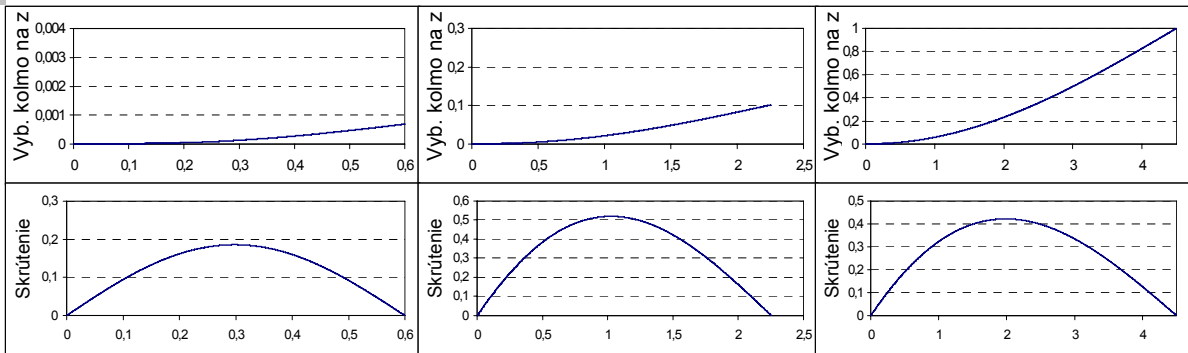
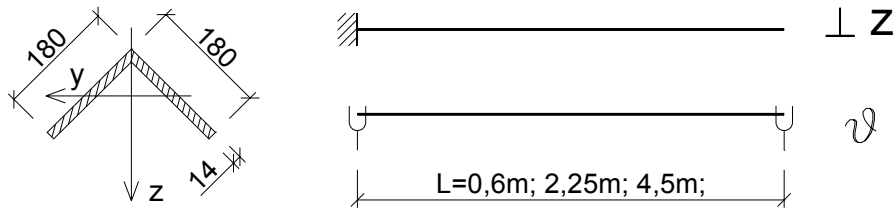
Obr. 3.26 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 0,5m; 1,15m; a 1,8m (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 1,318$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

skrútením nie je závislá od dĺžky prúta. To má za následok, že kritické sily zložiek priestorového vzperu sú v okrajových častiach vo výraznejšom vzájomnom nepomere ako pri iných typoch prierezov, a preto je krivka kritickej sily priestorovej straty stability MKP v okrajových častiach bližšie ku krivkám kritických síl jednotlivých zložiek ako pri prierezoch s nenulovým výsekovým momentom zotrvačnosti.



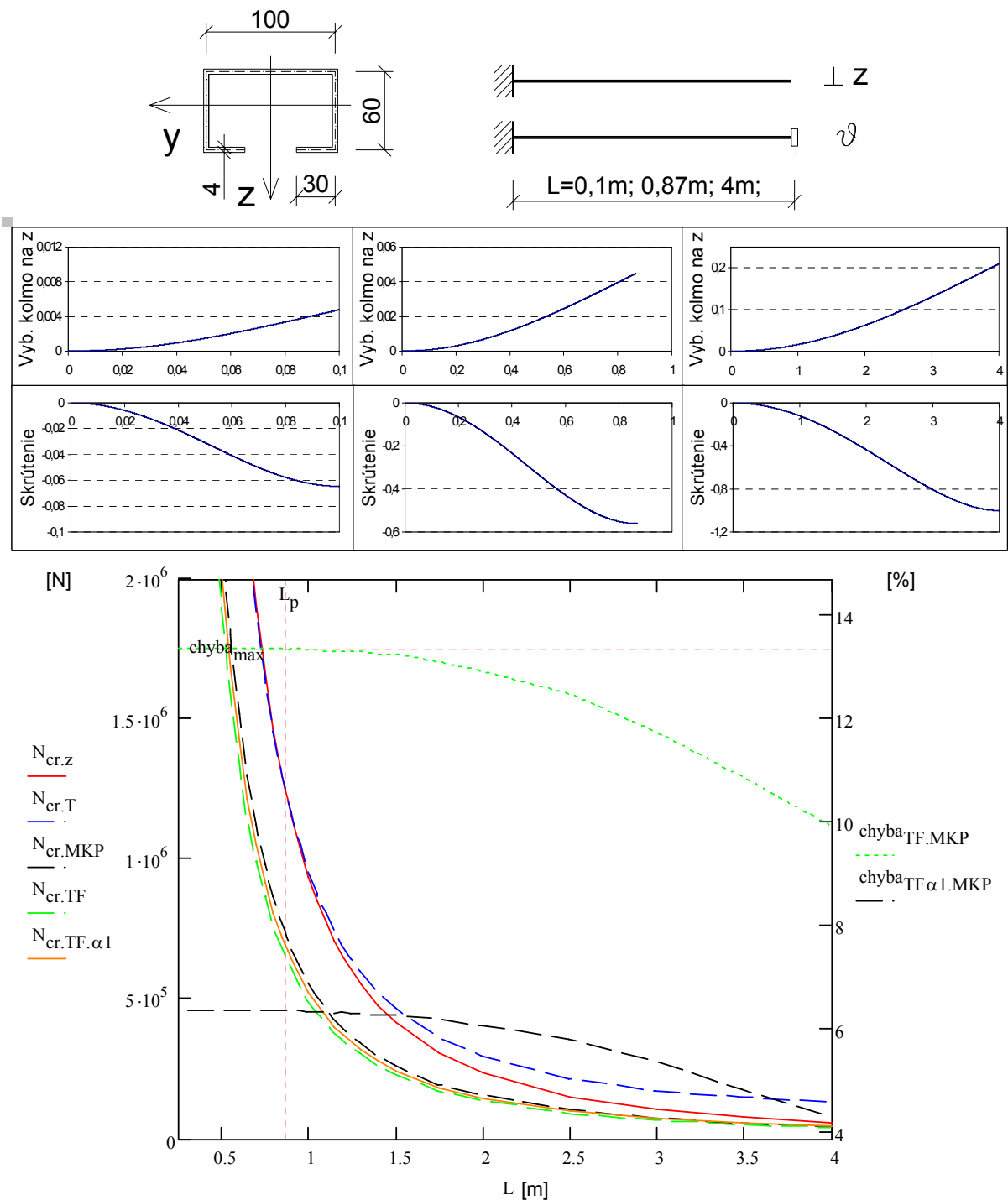
Obr. 3.27 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 1,5m; 4,6m; a 8m (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 0,721$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

V príklade na obr. 3.27 je chyba približnej metódy pre súčiniteľ odčítaný pre príslušnú kombináciu okrajových podmienok (OP) (z tab. 3.1) na strane nebezpečnej a po položení $\alpha_{zw} = 1$ je na strane bezpečnej s takmer nulovou chybou. Pre súčiniteľ $\alpha_{zw} = 0,78$ vypočítaný Vlasovom (v tab. 3.2) je chyba na strane nebezpečnej. Výsledný tvar skrútenia podľa MKP sa pre všetky dĺžky riešených prútov nezhoduje s (iba podľa OP) voleným tvarom fundamentálnej funkcie pre skrútenie v približnej metóde. To bolo pravdepodobne spôsobené vzájomným vplyvom ohybu a skrútenia v spojení s faktom, že prút má prierez s nulovou výsekovou súradnicou (skrútenia prierezov nespôsobujú normálové napätia).



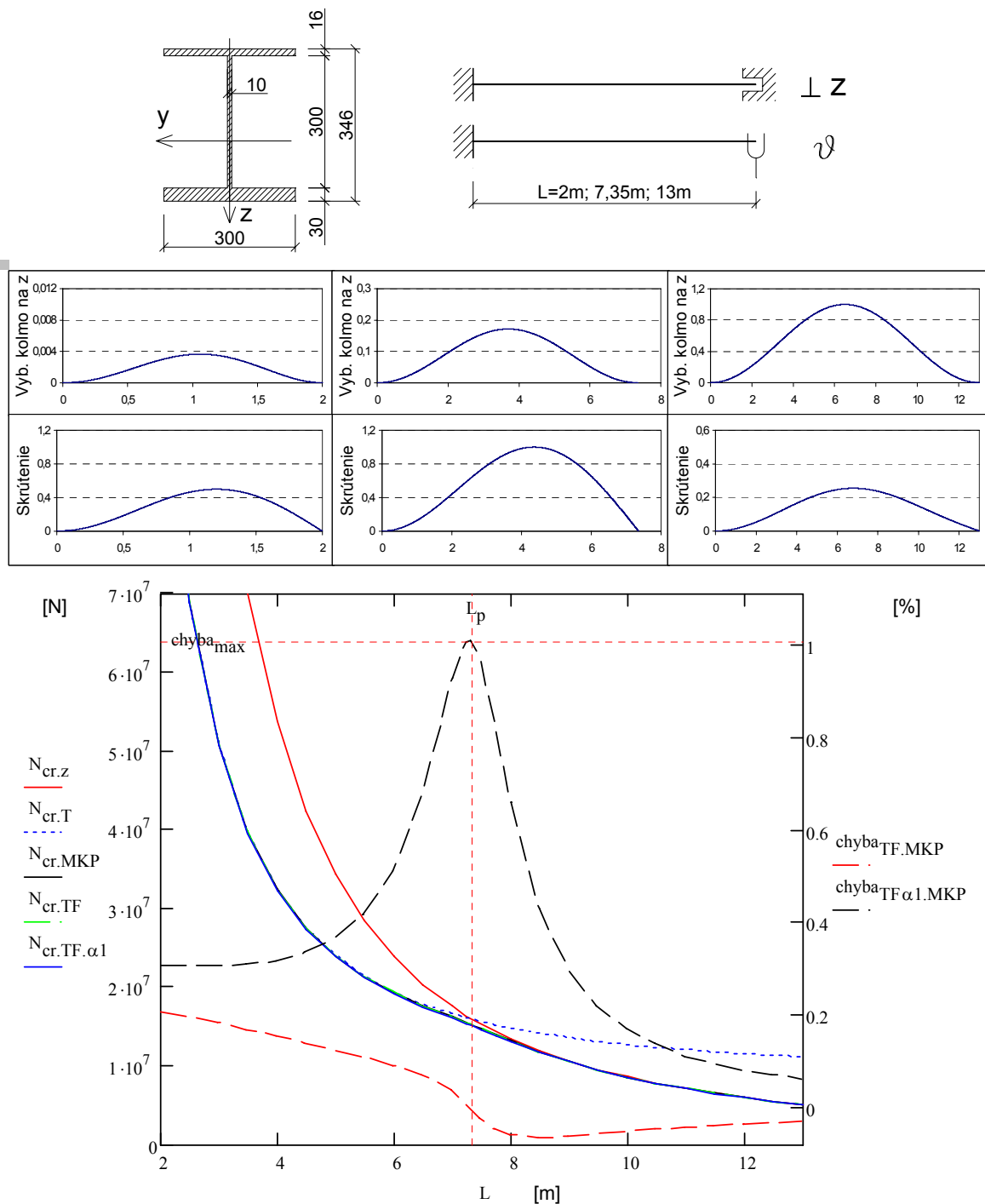
Obr. 3.28 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 0,6m; 2,25m a 4,5m; (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 1,318$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

Pre príklad na obr. 3.28 pre príslušné okrajové podmienky prináleží súčiniteľ väčší ako 1 (pozri predposledný odsek v 3.2.2). Po položení $\alpha_{zw} = 1$ (podobne ako v príklade na obr. 3.23) kritická sila približnou metódou nestúpila natoľko, aby bola na strane nebezpečnej pri porovnaní s MKP. Pri dĺžkach prúta väčších ako L_p je dominantnou zložkou priestorového vybočenia ohyb v rovine kolmej na os symetrie a minoritnou zložkou je skrútenie. Preto pri dĺžke prúta 4,5m došlo k posunu maximálnej poradnice priebehu skrútenia bližšie ľavému koncu prúta.



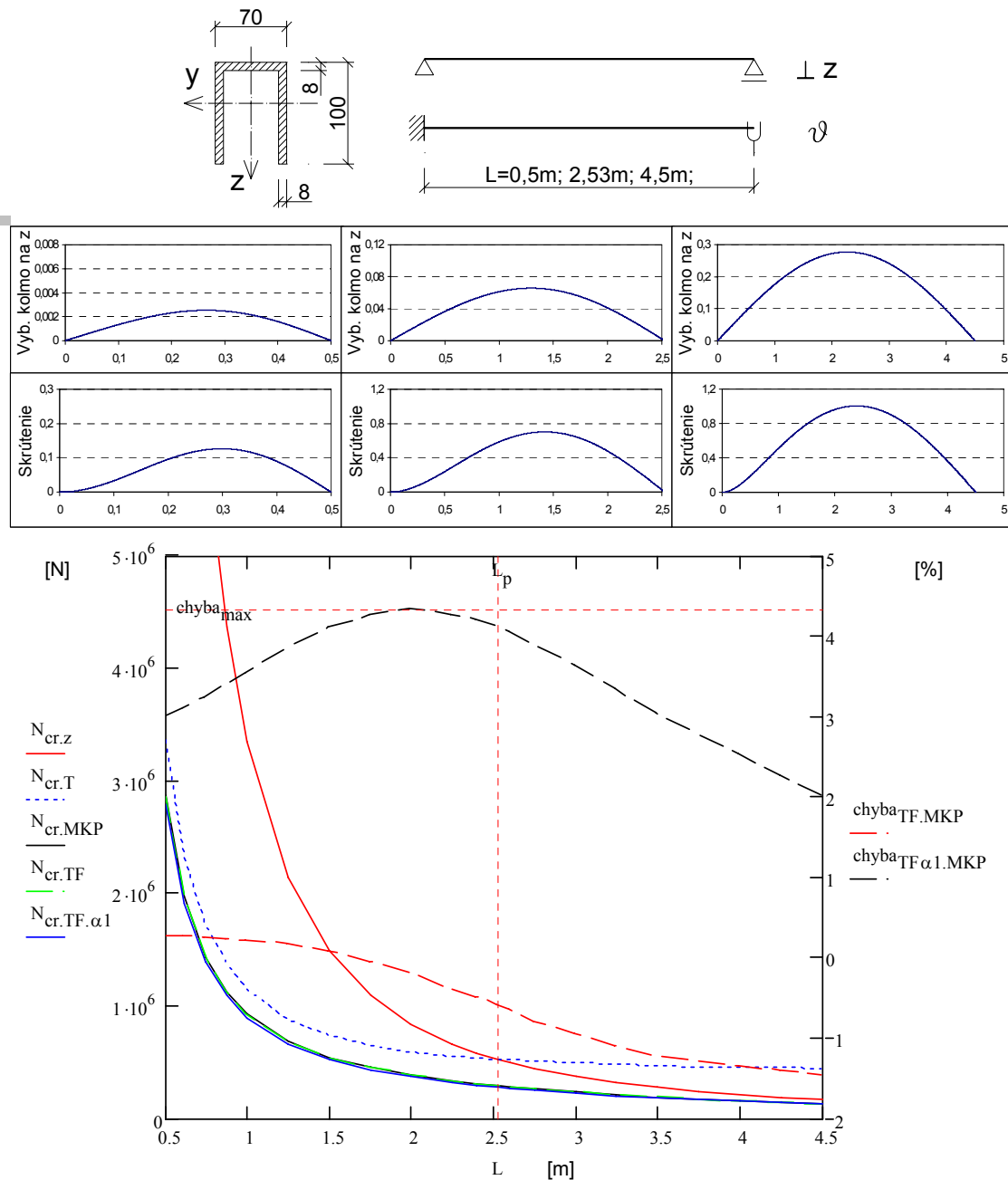
Obr. 3.29 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 0,1m; 0,87m a 4m; (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 1,318$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

V príklade na obr. 3.29 sú hodnoty kritických síl prislúchajúcich jednotlivým zložkám rádoovo rovnaké a z toho titulu sa chyby približnej metódy pohybujú v užšom intervale. Na lepšie vystihnutie vlastností priestorového vzperu podobne ako na obr. 3.24~3.28 by musel byť na grafe zobrazený širší interval dĺžok prúta, avšak tie by už boli mimo reálne používaných dĺžok v konštrukciách, či už z titulu veľkých štíhlostí prútov alebo veľmi krátkych prútov, pri ktorých už nie je prútový model dostatočne výstižný.



Obr. 3.30 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 2m; 7,35m a 13m; (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 0,66$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

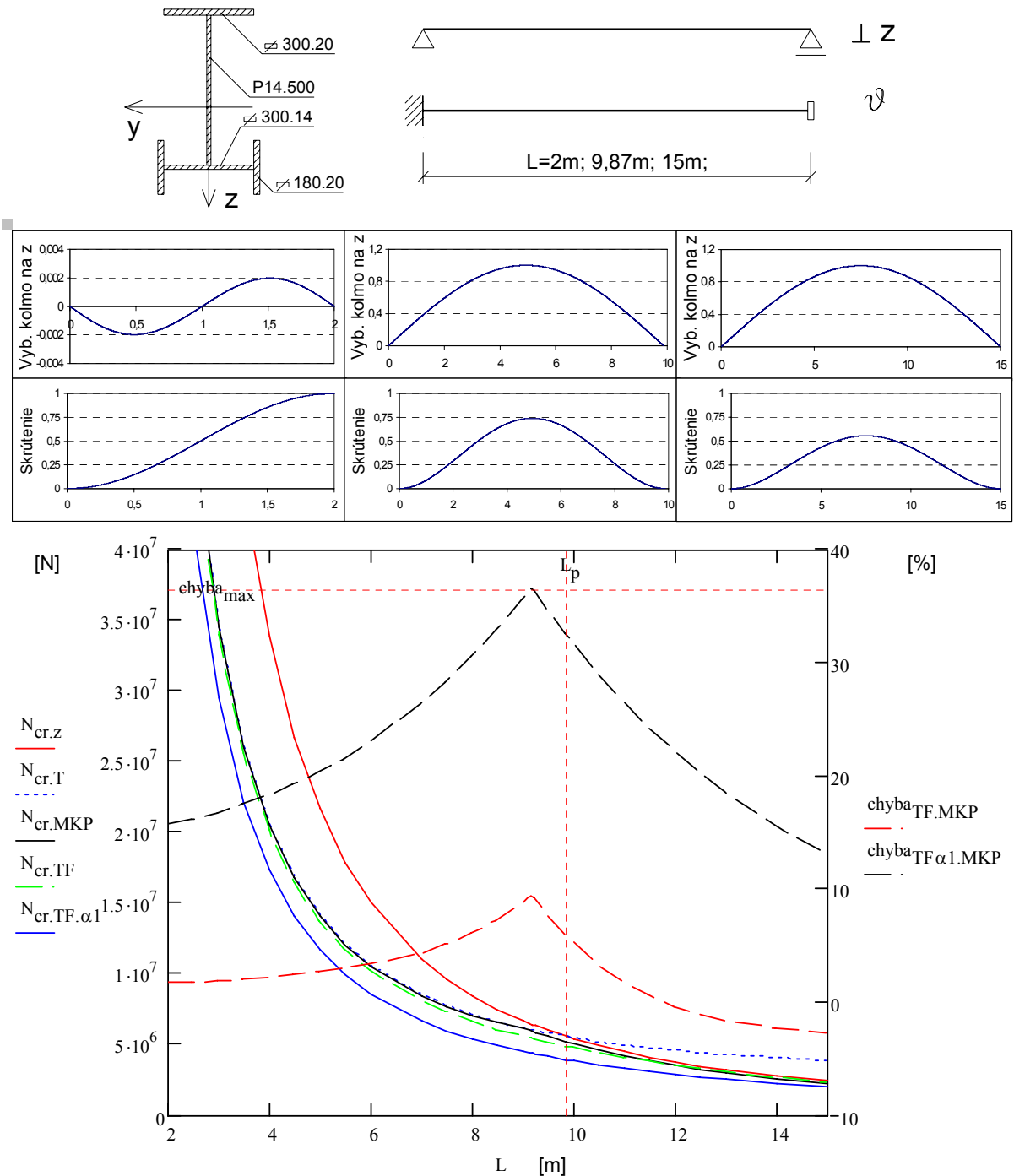
V príklade na obr. 3.30 napriek tomu, že súčiniteľ nie je rovný nule, je kritická sila priestorovej straty stability vypočítaná približnou metódou takmer rovná menšej z kritických síl prislúchajúcich jednotlivým zložkám priestorového tvaru vybočenia pre všetky vyšetřované dĺžky prúta okrem úzkej oblasti dĺžok blízkyh dĺžke L_p . V tejto oblasti dochádza k vzájomnej interakcii medzi zložkami priestorového tvaru vybočenia v najväčšej miere a teda je tu najväčší pokles kritickej sily priestorového vybočenia.



Obr. 3.31 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 0,5m; 2,53m a 4,5m; (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 0,817$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

V príklade na obr. 3.31 dochádza k poklesu kritickej sily priestorovej straty stability v celom spektre vyšetovaných dĺžok prúta v porovnaní s minimálnou z kritických síl $N_{cr,z}$ a $N_{cr,T}$, čo je dôsledkom toho, že k vzájomnej interakcii tu dochádza v podstate v celom spektre vyšetovaných dĺžok.

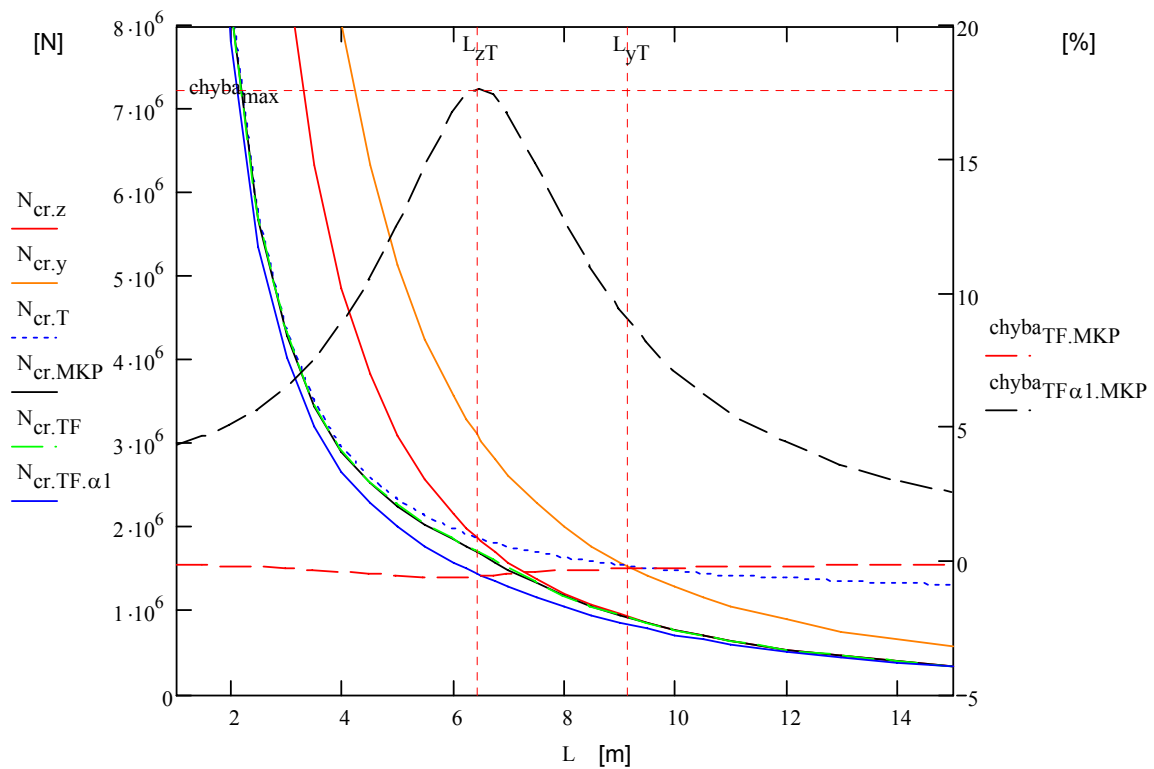
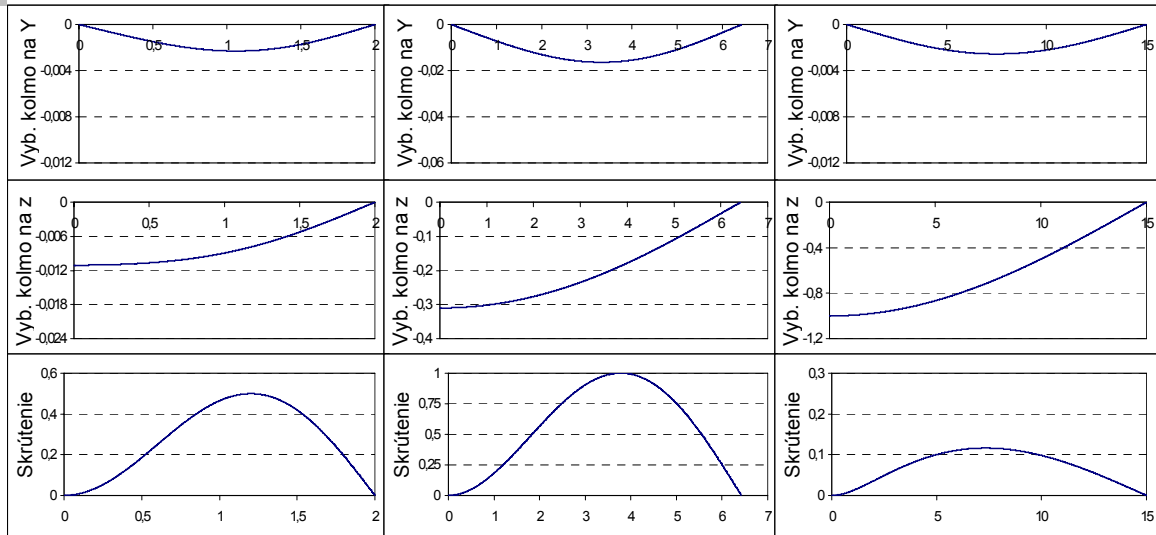
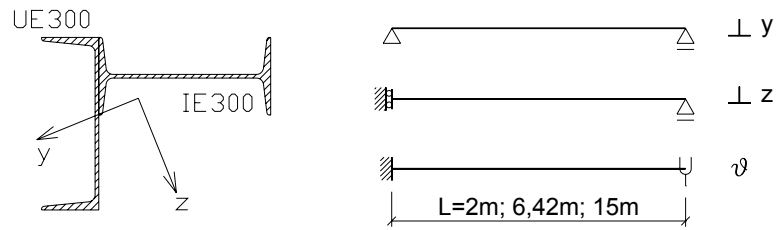
V príklade na obr. 3.32 je najväčšia chyba dosiahnutá pri dĺžke, pri ktorej zložka priestorového vlastného tvaru vybočenia - vybočenie kolmo na os z prierezu sa mení z jednej polovny na dve polovny. Preto je táto poloha maximálnej chyby posunutá od dĺžky L_p .



Obr. 3.32 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 2m; 9,87m a 15m; (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 0,106$ odpovedajúce danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = 1$

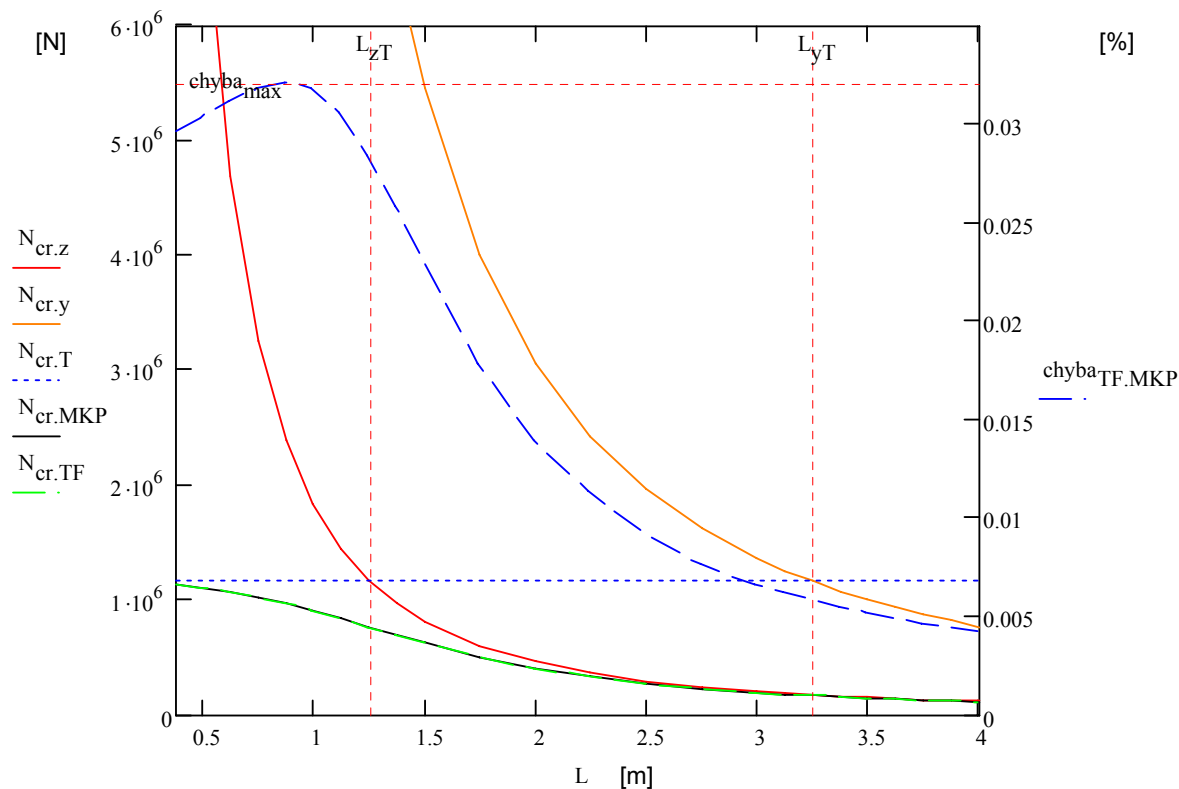
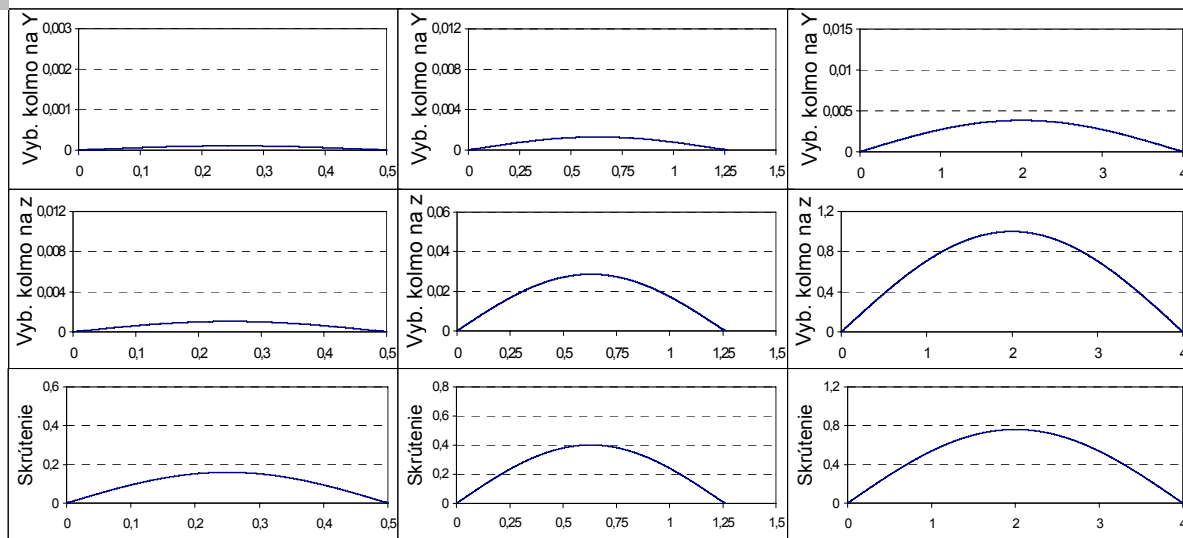
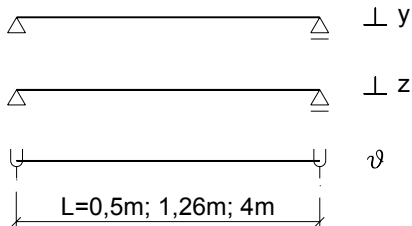
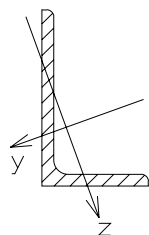
Dominantné zložky priestorového tvaru vybočenia sú v zhode s volenými tvarmi podľa okrajových podmienok (menovite pri dĺžkach menších dĺžke L_p ide o skrútenie, pri väčších dĺžkach ide o vybočenie kolmo na os z prierezu), čo pre minoritné zložky neplatí.

V nasledujúcich príkladoch sa vyšetrujú prúty s nesymetrickým prierezom, pre ktoré priestorový tvar vybočenia sa skladá z troch zložiek a kritická sila približnou metódou sa určuje z (3.18a).



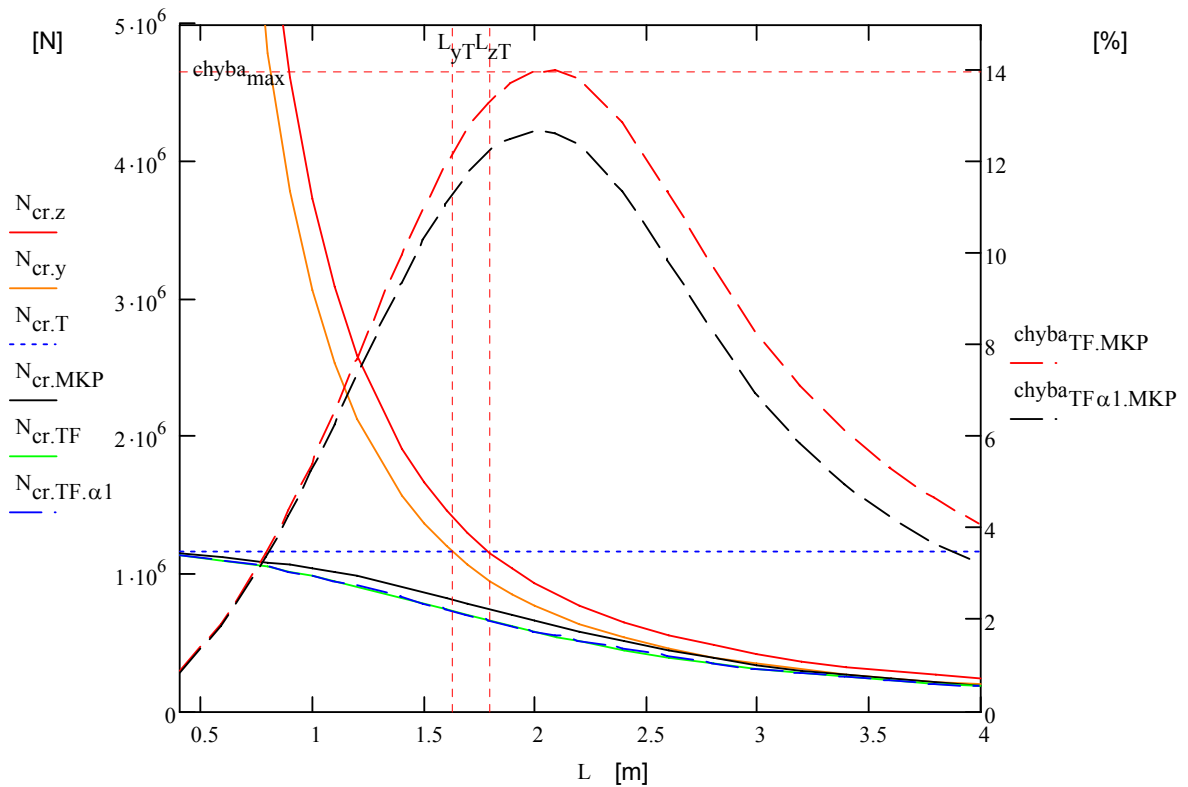
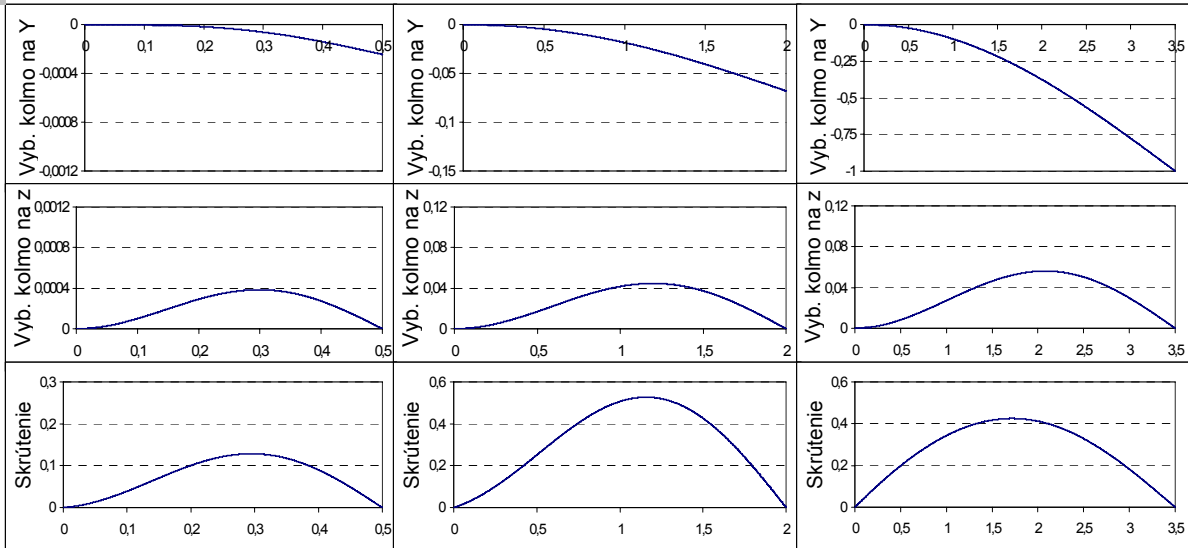
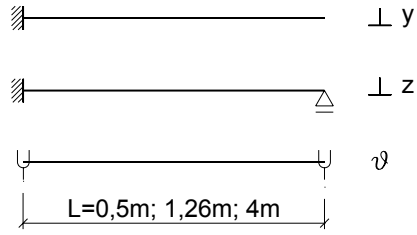
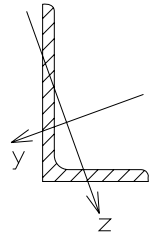
Obr. 3.33 Nesymetrickým prierez a okrajové podmienky prúta
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 2m; 6,42m a 15m; (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = 0,104$, $\alpha_{yw} = 0,758$ odpovedajúcich danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$

L 150×90×10



Obr. 3.34 Prierez prúta a okrajové podmienky
 Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 0,5m; 1,26m a 4m; (MKP)
 Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyba približnej metódy
 pre $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$ odpovedajúcich danej kombinácii OP

L 150×90×10



Obr. 3.35 Prierez a okrajové podmienky prúta

Vlastné tvary priestorovej straty stability prúta s dĺžkou 0,5m; 2m a 3,5m; (MKP)

Graf závislosti kritických síl od dĺžky prúta a chyby približnej metódy

pre $\alpha_{zw} = 0,758$, $\alpha_{yw} = 1,318$ odpovedajúcich danej kombinácii OP a pre $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$

V posledných troch príkladoch na obr. 3.33~3.35 sú vyšetované prúty s nesymetrickými prierezmi. V týchto prípadoch priestorový tvar vybočenia pri strate stability pozostáva z troch zložiek, dvoch ohybov v rovinách hlavných osí prierezu a skrútenia. Jednotlivým separovaným zložkám priestorového tvaru vybočenia prislúchajú kritické sily (3.39), (3.40) a:

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 EI_y}{k_y^2 L^2}. \quad (3.42)$$

Kritická sila priestorovej straty stability podľa približnej metódy sa vypočíta riešením kubickej rovnice (3.18a), v ktorej vystupujú súčinitele (3.18b), zohľadňujúce vplyv rôznych okrajových podmienok v príslušnom ohybe a v krútení. Na grafoch na obr. 3.33~3.35 sú vynesené závislosti kritických síl (3.39), (3.40), (3.42), kritických síl $N_{cr,MKP}$ vypočítaných MKP a kritických síl $N_{cr,TF}$ vypočítaných približnou metódou z (3.18a) pre súčinitele (3.18b) odčítané z tab. 3.1 resp. 3.2 pre príslušnú kombináciu okrajových podmienok a $N_{cr,TF,\alpha 1}$ pre súčinitele $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$ v závislosti od dĺžky prúta. Tiež sú tu vynesené aj chyby približnej metódy pre súčiniteľ odčítaný z tab. 3.1 resp. 3.2 v porovnaní s MKP označené ako $chyba_{TF,MKP}$ a chyby približnej metódy pre súčinitele $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$ v porovnaní s MKP označené ako $chyba_{TF\alpha 1,MKP}$. Dĺžka prúta, pri ktorej kritická sila príslušná separovanému ohybovému vybočeniu v rovine kolmej na os z je rovná kritickej sile príslušnej separovanému skrúteniu, je označená ako L_{zT} a vypočítaná je z (3.41). Dĺžka prúta, pri ktorej kritická sila (3.42) príslušná separovanému ohybovému vybočeniu v rovine kolmej na os y je rovná kritickej sile (3.40) príslušnej separovanému skrúteniu, je označená ako L_{yT} a vypočítaná je z:

$$L_{yT} = \pi \sqrt{\frac{EI_y k_w^2 i_s^2 - EI_\omega k_y^2}{GI_t k_y^2 k_w^2}}. \quad (3.43)$$

Pre prút na obr. 3.33 je pre celé spektrum vyšetovaných dĺžok kritická sila $N_{cr,z}$ menšia ako kritická sila $N_{cr,y}$, teda v tomto prípade bol z hľadiska veľkosti chyby približnej metódy rozhodujúci vzájomný pomer kritických síl $N_{cr,z}$ a $N_{cr,T}$. Tam kde boli hodnoty týchto síl rovnaké, bola dosiahnutá najväčšia chyba. Pri malých dĺžkach prútov bolo skrútenie dominantnou zložkou priestorového vybočenia a pri veľkých dĺžkach bol ňou ohyb v rovine kolmo na os z. Tieto dominantné zložky vybočenia boli v okrajových častiach vyšetovaných dĺžok dobre vystihnuté v približnej metóde volenými fundamentálnymi funkciami a preto sa tu chyba pohybovala okolo 5%. V oblasti dĺžok L_{zT} dosiahla chyba okolo 18%. To bolo pre prípad súčiniteľov položených $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$ na strane bezpečnej, ak však boli súčinitele odčítané pre príslušnú kombináciu okrajových podmienok, potom sa chyba pohybovala na strane nebezpečnej aj keď iba s malou hodnotou menej ako 1%. V prípade na obr. 3.34 je zvolená kombinácia zhodných okrajových podmienok pre ohyb v dvoch hlavných rovinách a pre skrútenie, čomu odpovedali hodnoty súčiniteľov $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$ a chyba približnej metódy bola zanedbateľná. V oblasti okolo dĺžky 1m bol dosiahnutý najväčší pokles kritickej sily priestorovej straty stability vzhľadom na minimálnu hodnotu z kritických síl prislúchajúcich separovaným zložkám (pri tejto dĺžke ňou bola zložka skrútenia). Pri posudzovaní napríklad členených prútov zložených z takýchto prútov sa volia väčšinou dĺžky čiastkového prúta práve okolo 1m medzi spojkami, kedy ako sa ukázalo nie je zanedbateľný pokles kritickej sily priestorovej straty stability v porovnaní s používanými hodnotami kritickej sily iba ohybovej straty stability okolo osí najmenšieho momentu zotrvačnosti prierezu. Pokles bol na úrovni približne 50%.

3.6 ZÁVER

Približná metóda bola zahrnutá do predbežného návrhu normy pre navrhovanie hliníkových konštrukcií [3] a je zahrnutá aj vo finálnej verzii [11]. Je ju možné použiť aj pri ocelových prútoch, preto sa nachádza aj v národnej prílohe [13]. Vzhľadom na veľký počet možných kombinácií okrajových podmienok v ohybe a v krútení prúta spolu s rôznymi typmi prierezo prútov nebolo možné všetky tieto prípady vyšetriť. Preto boli v predchádzajúcej kapitole porovnané výsledky približnej metódy pre vybrané prípady prierezo prútov a pre vybrané kombinácie okrajových podmienok. Ukázalo sa, že výsledky približnej metódy pre mnohé súčinitele uvedené v tab. 3.1 a 3.2 ale tiež aj pre súčinitele uvádzané Březinom, ktoré boli prebraté do [3] sú nekorektné. Chyby sú dokonca aj na strane nebezpečnej. Avšak pre v predchádzajúcej časti vyšetované prípady okrajových podmienok, keď súčinitele boli položené $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$, potom sa výsledok vždy nachádzal na strane bezpečnej, viac či menej konzervatívnej s chybou do 45%.

Z jednotlivých grafov na obr. 3.22~3.32 pre prúty s prierezom s jednou osou symetrie vyplýva, že najväčšie chyby nastávajú pri približne takej dĺžke prúta, pri ktorej vychádza kritická sila ohybovej zložky priestorového vzperu rovná kritickej sile straty stability skrútením. Túto dĺžku je možné vypočítať pomocou (3.41). Preto pri požiadavke na presnú hodnotu kritickej sily priestorového vzperu (teda ekonomickejšieho návrhu) a prút sa nachádza práve v tejto oblasti dĺžok, sa odporúča použiť MKP alebo komerčný software na nej založený. V prípade prútov s nesymetrickým prierezom (príklady na obr. 3.33~3.35) sa dosahujú najväčšie chyby približnej metódy v oblasti dĺžok, pre ktoré je menšia z kritických síl prislúchajúcich ohybovým zložkám priestorového vybočenia približne rovná kritickej sile prislúchajúcej strate stability skrútením.

Chalupa v [6] uvádza, že pre prúty s okrajovými podmienkami, ktoré nie sú zhodné pre ohyb a krútenie (súčinitele α_{zw} a α_{yw} mimo diagonálu v tab. 3.1 a 3.2), sa súčinitele pohybujú v intervale (0;1), čo potvrdzuje aj fakt, že pre záporné súčinitele metóda môže viesť na komplexné čísla a pri nulovom súčinitele dáva presne hodnotu menšej z kritických síl prislúchajúcich jednotlivým zložkám priestorového tvaru straty stability (ktorými sa pri jednoosovo symetrickom priereze myslia: kritická sila vybočenia ohybom v rovine kolmej na rovinu symetrie prierezu a kritická sila pri strate stability skrútením a pri nesymetrickom priereze: kritické sily prislúchajúce vybočeniam ohybom v rovinách hlavných osí prierezu a kritická sila pri skrútení). Ďalej uvádza, že je možné na strane bezpečnej pre tieto kombinácie okrajových podmienok položiť súčinitele rovné 1,0. To sa pre uvedené prípady jednoosovo-symetrických a nesymetrických prierezo v predchádzajúcej kapitole potvrdilo. Aj pre tie kombinácie okrajových podmienok (obr. 3.23, 3.26, 3.28, 3.29), ktorým odpovedal súčiniteľ $\alpha_{zw} > 1$ z tab. 3.1, ak sa položil súčiniteľ $\alpha_{zw} = 1$ potom aj napriek tomu, že kritická sila približnej metódy sa tým zväčšila, bola ešte stále na strane bezpečnej (pri porovnaní s výsledkami MKP).

V poslednom vydaní normy pre hliníkové konštrukcie [11] a v národnej prílohe [13] sú ponechané pôvodné súčinitele vypočítané Goľdenvejzerom v oblasti prvých štyroch riadkov a stĺpcov tab. 3.2 a ostatné súčinitele sa neuvádzajú s poznámkou, že je možné na strane konzervatívnej brať hodnotu 1,0. Treba pripomenúť, že aj pri okrajových podmienkach spadajúcich do oblasti prvých 4 riadkov a stĺpcov tab. 3.2, v ktorých boli súčinitele ponechané od Goľdenvejzera môže pri použití týchto súčiniteľov nastať prípad (ako v príklade na obr. 3.27), že približná metóda bude na strane nebezpečnej. Preto by bolo vhodné aj pre tieto prípady okrajových podmienok odporučiť hodnoty súčiniteľov $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$.

Z predchádzajúcich príkladov sa dá usudzovať, že priestorový tvar vybočenia je výsledkom interakcie medzi zložkami ohybovými v rovinách hlavných osí prierezu a zložkou

skrútenia. Čím je kritická sila prislúchajúca ktorejkoľvek separovanej zložke menšia v porovnaní s ostatnými, tým sa zväčšuje vplyv tejto zložky a tá potom predstavuje dominantnú zložku v priestorovom tvare vybočenia. Potom výsledná kritická sila priestorovej straty stability sa blížila hodnote minimálnej kritickej sile. Ak je dominantná zložka vybočenia dobre vystihnúť volenou fundamentálnou funkciou, potom je chyba približnej metódy nízka aj napriek nevystihnútiu ostatných minoritných zložiek priestorového vzperu príslušnými fundamentálnymi funkciami. V prípadoch, kedy sa kritické sily jednotlivých separovaných zložiek priestorového tvaru vybočenia pohybovali v rádo vo rovnakých hodnotách, potom nebolo možné určiť dominantnú zložku vybočenia, keďže všetky sa významnou mierou podieľali na výslednom tvare vybočenia. V týchto prípadoch bol pokles kritickej sily priestorového vybočenia najväčší a približná metóda pri položení $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$ bola stále na strane bezpečnej. V prípadoch väčších rozdielov medzi hodnotami jednotlivých kritických síl sa ukázalo, že interakcia bola na nižšej úrovni ako v prípadoch alebo v oblastiach dĺžok prútov, kedy boli tieto sily približne rovnaké a kedy dochádzalo k väčšej interakcií a teda aj väčšiemu poklesu kritickej sily priestorového tvaru vybočenia v porovnaní s minimálnou z kritických síl jednotlivých separovaných zložiek.

Na výpočet prútov s jednou osou symetrie je možné použiť napr. program DRILL, v ktorom je možné zadať akékoľvek okrajové podmienky a ktorý bol použitý na kontrolu správnosti tu riešených kritických síl MKP prútovým modelom pomocou zostrojeného programu vo VBA EXCEL a čiastočne v programe MathCAD. Pre výpočet prútov aj s nesymetrickými prierezmi je možné použiť program ANSYS. Riešenie kritických síl a tvarov vybočenia pomocou MKP v programe ANSYS je však pre prax pomerne zdĺhavé. Pomocou programu ANSYS pri použití dosko-stenových elementov je problematické modelovať určité kombinácie okrajových podmienok. Napríklad pri okrajových podmienkach, kedy má byť umožnená deplanácia konca prúta, pričom má byť zabránené pootočeniu v ohybe. Naopak MKP s prútovým modelom umožňuje modelovať akékoľvek kombinácie okrajových podmienok, dokonca aj tie prípady, ktoré nie sú prakticky zhotoviteľné alebo sú len ťažko zhotoviteľné. Norma nerieši problematiku zhotoviteľnosti tej-ktorej kombinácie okrajových podmienok a približnú metódu umožňuje použiť pri akejkoľvek kombinácii okrajových podmienok (s výnimkou pružných podopretí rôzneho druhu). Preto sa ani v predošlej časti nevenuje pozornosť tejto časti problematiky. Napriek tomu bolo snahou vyberať vo vyšetrovaných príkladoch reálne zhotoviteľné kombinácie okrajových podmienok v ohybe a v krútení.

Pokiaľ projektant nemá k dispozícii komerčný software umožňujúci presnejší výpočet pomocou MKP, tak približná metóda poskytuje rýchly spôsob, ako kritickú silu priestorovej straty stability vypočítať. Pre súčinitele $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$ bude výsledok viac či menej na strane konzervatívnej. Výhodné je aj to, že pri približnej metóde je projektant nútený vypočítať kritické sily prislúchajúce jednotlivým zložkám, z ktorých sa priestorový vzper skladá a tým získa dobrú predstavu, ktorá zo zložiek priestorového tvaru vybočenia bude dominantnou (tá ktorej prislúcha minimálna z vypočítaných kritických síl) a ktorá minoritnou, a tiež predstavu približne aká hodnota kritickej sily priestorového vzperu je adekvátna. Z predošlých grafov je evidentné, že minimum z týchto kritických síl predstavuje hornú hranicu pre hodnotu kritickej sily priestorovej straty stability. Preto má približná metóda zavedená Gol'denvejzerom a Vlasovom a doplnená Březinom opodstatnenosť.

4. ODOLNOSŤ TLAČENÝCH PRÚTOV Z HLINÍKOVÝCH ZLIATIN SO ZVARMÍ

4.1 VZPERNÁ ODOLNOSŤ PRÚTOV Z HLINÍKOVÝCH ZLIATIN PODĽA [11]

Stabilita prútoV vyrobených z rôznych hliníkových zliatin podľa [11] sa posudzuje na základe pevnostného prístupu podobne ako pri oceľových prútoch. Napätie (vyplývajúce z analýzy teórie II. rádu s vplyvom imperfekcií, ktoré sú zohľadnené v súčiniteli vzperu) v krajnom vlákne prierezu v strede rozpätia náhradného prúta nesmie presiahnuť návrhovú pevnosť Al. zliatiny f_o/γ_{M1} . Podľa čl. 6.3.1.1 [11] je možné použiť metódu náhradného prúta podobne ako pri oceľových prútoch. Vzperná odolnosť Al. prúta sa určí zo vzorca:

$$N_{b,Rd} = \kappa \cdot \chi \cdot A_{eff} \cdot f_o / \gamma_{M1}, \quad (4.1)$$

kde:

- κ je súčiniteľ zohľadňujúci vplyv zvarov
- χ je súčiniteľ vzperu
- A_{eff} je efektívna plocha zohľadňujúca vplyv lokálneho vydúvania pri prierezoch triedy 4 a vplyv oslabenia účinkom pozdĺžneho zvarania
- f_o je charakteristická hodnota dohovorenej medze klzu pre Al. zliatinu
- γ_{M1} je parciálny súčiniteľ spoľahlivosti pre odolnosť prútoV pri posudzovaní straty stability prúta.

Pre prút namáhaný osoVým tlakom sa súčiniteľ vzperu pre príslušnú hodnotu pomernej štíhlosti vypočíta zo vzorca analogicky ako pri oceľových prútoch:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}, \quad (4.2)$$

avšak kde:

$$\phi = 0,5(1 + \alpha(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) + \bar{\lambda}^2), \quad (4.3)$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff} \cdot f_o}{N_{cr}}}, \quad (4.4)$$

v ktorých miera imperfekcie α a dĺžka vodorovnej časti $\bar{\lambda}_0$ v grafe závislosti $\chi - \bar{\lambda}$ sú závisle od príslušnosti do dvoch vzperných tried materiálu A, B a N_{cr} je kritická sila ohybovej straty stability v pružnej oblasti. Vzhľadom na 3-násobne menší modul pružnosti hliníka v porovnaní s oceľou je kritická sila straty stability hliníkového prúta 3-krát menšia. Z toho vyplýva jeho väčšia citlivosť na stabilitné javy. Hliníkové prúty pretláčaných profilov majú malé reziduálne napätia, z čoho vyplýva, že vzperné krivky nie sú závislé od tvaru prierezu ako pri oceli. Pri hliníkových prútoch vzperné krivky závisia od typu zliatiny a od prítomnosti pozdĺžnych zvarov.

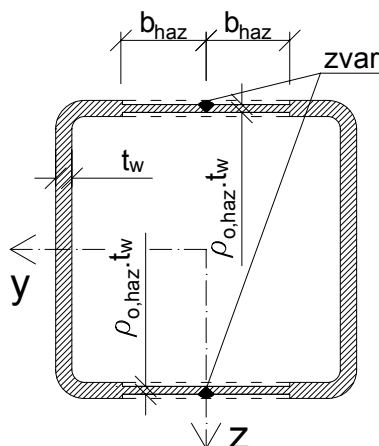
Zohľadnenie lokálneho vydúvania v A_{eff} je realizované zavedením efektívnej hrúbky prvku na rozdiel od oceľových prútoV, pri ktorých sa uvažuje s efektívnou šírkou. To je praktickejšie z hľadiska výpočtu prierezových charakteristík. Efektívna hrúbka $t_{eff} = \rho_c t$ časti prierezu triedy 4 je závislá od štíhlosti prvku $\beta = b/t$, vzpernej triedy a prítomnosti pozdĺžnych zvarov.

4.2 POZDĹŽNE ZVARY

Znížená pevnosť materiálu vplyvom zvarovania v teplom ovplyvnenej oblasti (Heat Affected Zone - HAZ) je zohľadnená redukciou hrúbky súčiniteľom:

$$\rho_{o,haz} = f_{o,haz} / f_o, \quad (4.5)$$

kde $f_{o,haz}$ je charakteristická hodnota dohovorenej medze klzu v HAZ, ktorá je pre rôzne Al. zliatiny uvedená v tab. 3.2 a)~c) [11].



Obr. 4.1 Efektívna plocha prierezu s ohľadom na HAZ

Redukovaná hrúbka $\rho_{o,haz}t$ sa nachádza vo vzdialenosti b_{haz} na obe strany zvaru. Kde b_{haz} závisí od metódy zvarovania (MIG, TIG), hrúbky zvaraného plechu a od dosiahnutej teploty pri zvarovaní v oblasti HAZ. Ak oblasť HAZ zasahuje do časti prierezu triedy 4, potom v časti prelnania sa platí menšia z redukcii z titulu HAZ alebo z titulu lokálneho vydúvania:

$$t_{eff,haz} = \min(\rho_{o,haz}t, \rho_c t). \quad (4.6)$$

Ak sa pozdĺžny zvar nachádza k okraju výstuhu bližšie ako $3b_{haz}$, potom celá šírka výstuhu sa redukuje. Faktor κ zohľadňujúci oslabenie pri zvarovaní pre vzpernú triedu A sa určí zo vzorca:

$$\kappa = 1 - \left(1 - \frac{A_1}{A}\right) 10^{-\bar{\lambda}} - \left(0,05 + 0,1 \frac{A_1}{A}\right) \bar{\lambda}^{1,3(1-\bar{\lambda})}, \quad (4.7)$$

kde:

$$A_1 = A - A_{haz}(1 - \rho_{o,haz}) \quad (4.8)$$

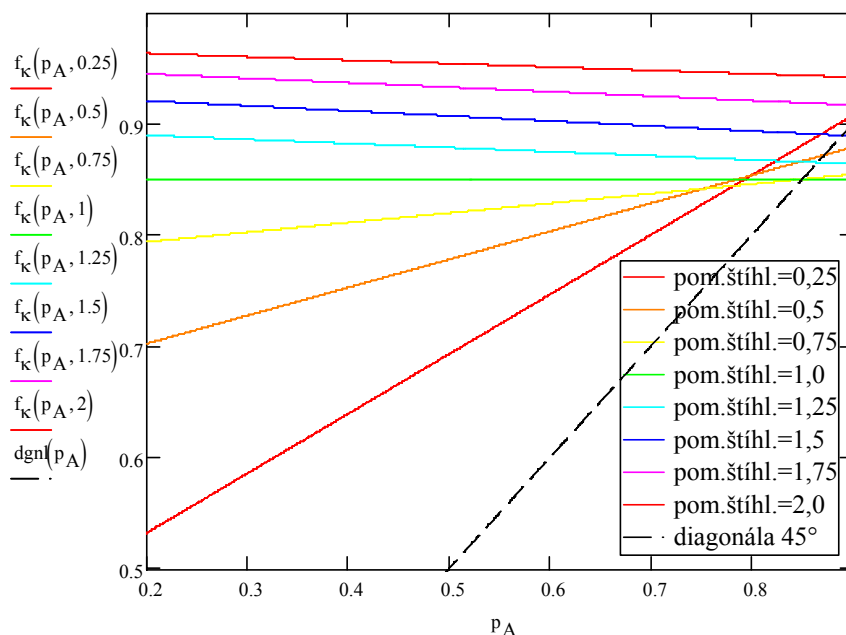
vyplýva z nasledovnej podmienky:

$$A_1 f_o = (A - A_{haz}) f_o + A_{haz} f_{o,haz}, \quad (4.9)$$

kde A_{haz} je plocha HAZ.

Na grafe 4.1 je znázornená závislosť faktora κ (4.7) od pomeru $p_A = A_1/A$ pre rôzne hodnoty pomerných štíhlostí. Pomer p_A nadobúda hodnoty v intervale $\langle 1; \rho_{o,haz} \rangle$, pričom

krajnú hodnotu $\rho_{o, haz}$ nadobúda pre prípad celého prierezu spadajúceho pod HAZ a hodnotu 1 ak sa v priereze nenachádza HAZ.



Graf 4.1 Faktor κ (4.7)

Z grafu 4.1 vyplýva, že pri pomernej štihlости rovnjej a väčšej ako 1,0 nie je faktor závislý alebo len málo závislý od pomeru A_1/A . Ak by iba faktor κ (4.7) v (4.1) mal zohľadňovať vplyv mäknutia v HAZ od pozdĺžnych zvarov, potom by musel nadobúdať hodnoty menšie nanajvýš rovné $\kappa = A_1/A$. Hraničné hodnoty v grafe predstavuje diagonála (čiarkovaná). Vzhľadom na to, že všetky faktory κ sú nad touto diagonálou, by mala plocha A_{eff} v čl. 6.3.1.1 (2) [11] už zahŕňať okrem vplyvu lokálnej straty stability aj redukciu hrúbky stien v oblastiach HAZ pri pozdĺžnych zvaroch. Táto skutočnosť v článku nie je zohľadnená. Naproti tomu v článkoch 6.2.3 (2) c) [11] (ťahové porušenie v priereze s HAZ) a čl. 6.2.4 (2) b) [11] (prostý tlak) je v ploche A_{eff} zahrnuté aj mäknutie v oblastiach HAZ.

Faktor κ pre triedu B nie je vôbec závislý od pomeru A_1/A ; pre pomernú štihlость $\bar{\lambda} \leq 0,2$ je $\kappa = 1,0$ a pre pomernú štihlость $\bar{\lambda} > 0,2$ sa určí zo vzorca:

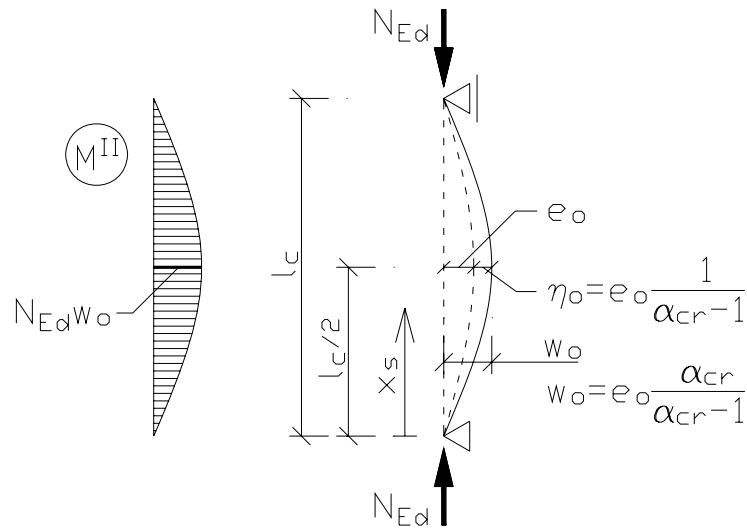
$$\kappa = 1 + 0,04(4\bar{\lambda})^{(0,5-\bar{\lambda})} - 0,22\bar{\lambda}^{1,4(1-\bar{\lambda})}. \quad (4.10)$$

4.3 PRIEČNE ZVARY

Ak položíme napätie v krajnom vlákne prierezu v strede vzpernej dĺžky prúta zaťaženého centrickou silou rovné návrhovej pevnosti hliníku, pri uvážení momentu teórie II. rádu s vplyvom začiatočných imperfekcií, dostaneme:

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{Ed}}{A_{eff}} + \frac{N_{Ed}W_0}{W} = \frac{f_o}{\gamma_{M1}}, \quad (4.11)$$

kde w_0 je amplitúda priebehu celkového priehybu, ktorá je súčtom amplitúdy začiatočnej imperfekcie e_0 afinnej vlastnému tvaru vybočenia a amplitúdy prídavného priehybu η_0 vyplývajúceho z teórie II. rádu v zhode s obr. 4.2.



Obr. 4.2 Priebeh momentov teórie II. rádu na prúte s amplitúdou začiatočnej imperfekcie e_0

Ak za silu N_{Ed} v (4.11) dosadíme odolnosť prúta $N_{b,Rd}$ (4.1) pre $\kappa = 1$, po úprave dostaneme výraz pre amplitúdu celkového priehybu w_0 :

$$w_0 = (1 - \chi) \frac{W}{\chi \cdot A_{eff}}. \quad (4.12)$$

Pre náhradný prút (prút prosto podopretý s rovnakou hodnotou kritickej sily a prierezom ako vyšetovaný prút), ktorý má vlastný tvar vybočenia v tvare polovlny sínusoidy, a priebeh začiatočnej imperfekcie je afinity polovlny sínusoidy, bude potom priebeh celkového priehybu:

$$w(x) = (1 - \chi) \frac{W}{\chi \cdot A_{eff}} \sin\left(\frac{\pi \cdot x_s}{l_c}\right). \quad (4.13)$$

Ak výraz (4.13) dosadíme do (4.11) za w_0 a rovnosť zmeníme na nerovnosť, dostaneme podmienku odolnosti prúta na základe vyhodnotenia v jednotlivých prierezoch x_s :

$$\frac{N_{Ed}}{A_{eff}} + \frac{N_{Ed}}{W} (1 - \chi) \frac{W}{\chi \cdot A_{eff}} \sin\left(\frac{\pi \cdot x_s}{l_c}\right) \leq \frac{f_o}{\gamma_{M1}}. \quad (4.14)$$

Po úprave dostaneme:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi \cdot A_{eff}} \left(\chi + (1 - \chi) \sin\left(\frac{\pi \cdot x_s}{l_c}\right) \right) \leq \frac{f_o}{\gamma_{M1}}. \quad (4.15)$$

Prút vyhovuje, ak v každom reze x_s je splnená podmienka (4.15), pričom x_s je vzdialenosť meraná od inflexného bodu vlastného tvaru vybočenia (začiatku náhradného

prúta). Rozhodujúca podmienka v prípade prosto uloženého prúta bude prislúchať prierezu v strede prúta.

Ak v mieste x_s sa nachádza priečny zvar, potom v podmienke (4.15) sa zmení návrhová pevnosť f_o/γ_{M1} na návrhovú pevnosť $f_{u,haz}/\gamma_{M2}$ v oblasti HAZ. Preto sa zavádza podiel týchto pevností:

$$\omega_0 = \frac{\rho_{u,haz} f_u/\gamma_{M2}}{f_o/\gamma_{M1}} \quad \text{ale } \omega_0 \leq 1,0 \quad \text{a} \quad \rho_{u,haz} = \frac{f_{u,haz}}{f_u} \quad (4.16)$$

Po úprave (4.15) a zohľadnení ω_0 dostávame podmienku spoľahlivosti prúta na základe posúdenia prierezu s priečnym zvarom:

$$\frac{N_{Ed}}{\omega_x \chi A_{eff} f_o/\gamma_{M1}} \leq 1, \quad (4.17)$$

kde:

$$\omega_x = \frac{\omega_0}{\chi + (1 - \chi) \sin \frac{\pi \cdot x_s}{l_c}}. \quad (4.18)$$

Menovateľ výrazu na ľavej strane (4.17) predstavuje normový vzorec pre výpočet vzpernej odolnosti prúta (4.1), v ktorej pre prúty s priečnymi zvarmi je $\kappa = \omega_x$. Vzhľadom na zníženú pevnosť v oblasti HAZ, sa súčiniteľ vzperu χ vypočíta pre upravenú pomernú štíhlosť:

$$\bar{\lambda}_{haz} = \bar{\lambda} \sqrt{\omega_0}. \quad (4.19)$$

Po dosadení ω_0 dostávame:

$$\bar{\lambda}_{haz} = \sqrt{\frac{A_{eff} f_{u,haz}}{N_{cr}}} \sqrt{\frac{\gamma_{M1}}{\gamma_{M2}}}. \quad (4.20)$$

Overenie odolnosti prúta s priečnym zvarom v mieste x_s , pozostáva z dvoch krokov (posúdenia v dvoch rezoch a) a b), vid' obr. 4.3):

a) Overenie ako pri prútoch bez priečného zvaru s použitím (4.1) kde χ je určené pre pomernú štíhlosť (4.4) a $\kappa = 1$. Ide vlastne o posúdenie prúta, ktoré je totožné s posúdením podľa (4.15) v priereze $x_s = l_c/2$, pričom l_c je kritická dĺžka prúta.

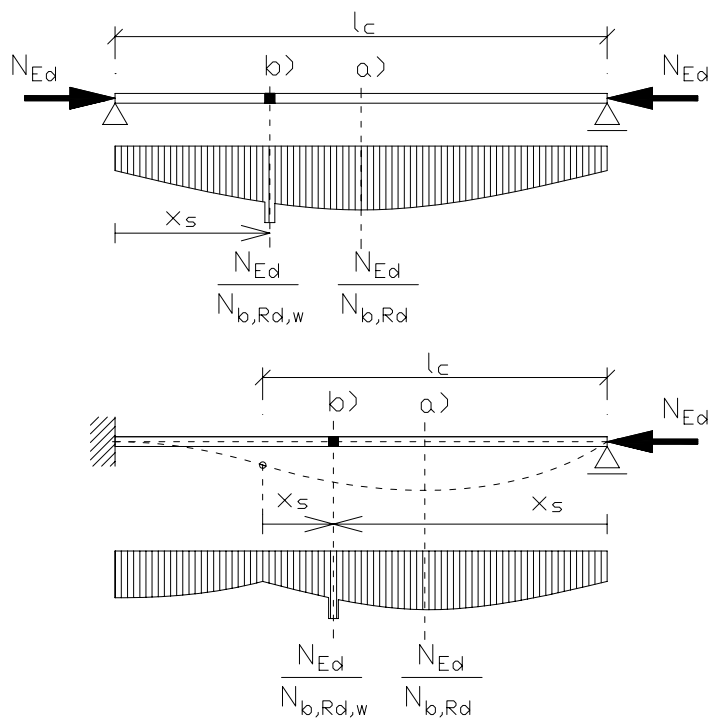
b) Overenie odolnosti prúta v mieste priečného zvaru x_s s použitím (4.1) kde χ je určené pre pomernú štíhlosť $\bar{\lambda}_{haz}$ (4.19) (čl. 6.3.3.3 (3) [11]) a $\kappa = \omega_x$ (4.18) (čl. 6.3.3.3 (2) [11]). Tu ide o posúdenie (4.17).

Ak vyjadríme vzpernú odolnosť prúta s priečnym zvarom na základe prierezu so zvarom, teda do (4.1) dosadíme (4.18) a (4.16) dostaneme:

$$N_{b,Rd,w}(x_s) = \frac{\chi}{\chi + (1 - \chi) \sin \frac{\pi \cdot x_s}{l_c}} A_{eff} \frac{f_{u,haz}}{\gamma_{M2}} = f(\chi, x_s) A_{eff} \frac{f_{u,haz}}{\gamma_{M2}} = f(\chi, x_s) N_{c,Rd,w}, \quad (4.21)$$

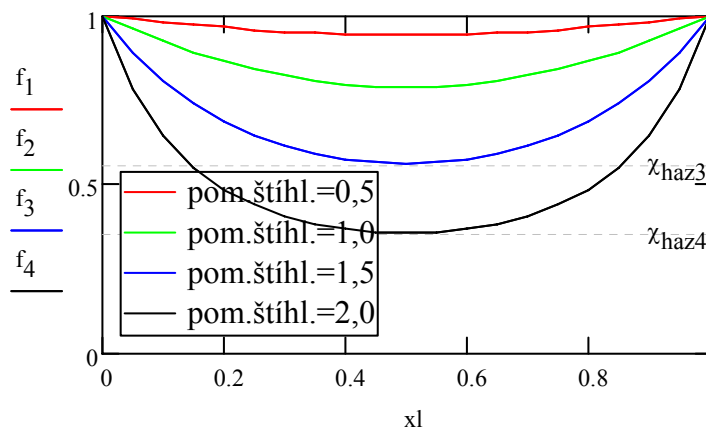
kde: $N_{c,Rd,w}$ je odolnosť prierezu v mieste priečného zvaru,

$f(\chi, x_s)$ nazveme interpolačnou funkciou, ktorá zohľadňuje tu skutočnosť, že pre prierezy, ktoré sa nachádzajú mimo stredu vzpernej dĺžky je hodnota momentu teórie II. rádu menšia ako v priereze v strede vzpernej dĺžky, a preto v týchto prierezoch je menšie využitie. Vzhľadom na zníženú pevnosť $f_{u,haz}/\gamma_{M2}$ v priereze s priečnym zvarom by bolo nevýhodné, ak by sa ten nachádzal v blízkosti stredu náhradného prúta, v ktorom je moment najväčší.



Obr. 4.3 Využitie v jednotlivých rezoach

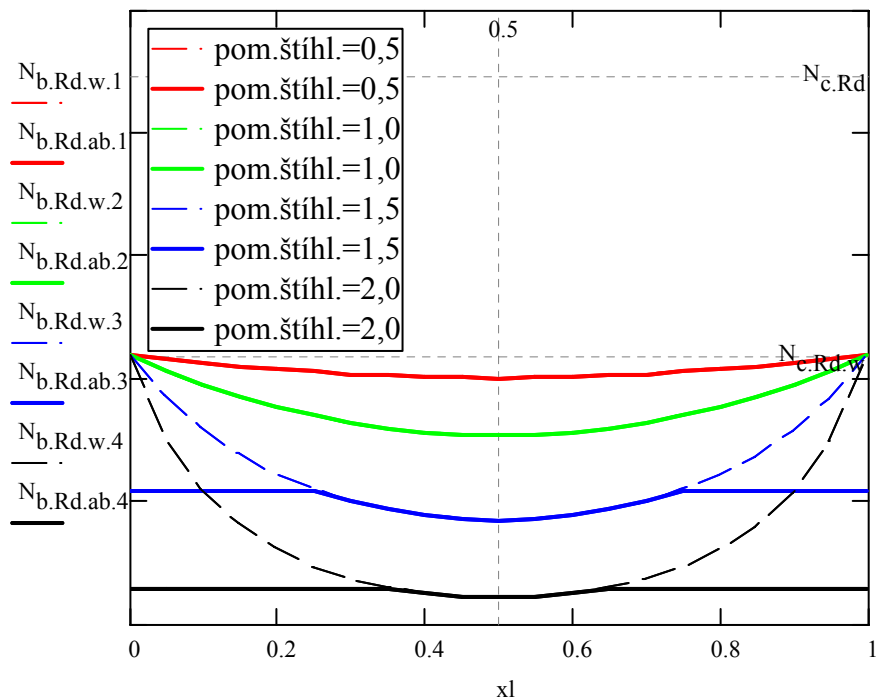
Najideálnejšie je umiestnenie priečných zvarov v miestach inflexných bodov priebehu vlastného tvaru vybočenia prúta, v ktorých je moment teórie II. rádu nulový. Na grafe 4.2 je vyneseny priebeh interpolačnej funkcie $f(\chi, x_s)$ pre prúty s pomernou štihlou 0,5; 1,0; 1,5 a 2,0 v závislosti od pomeru $xl = x_s/l_c$. Ak sa zvar nachádza v strede vzpernej dĺžky, potom funkcia $f(\chi, x_s)$ nadobúda hodnotu χ ale vypočítanú pre upravenú pomernú štihlosť $\bar{\lambda}_{haz}$, v grafe vyznačenú ako χ_{haz3} .



Graf 4.2 Interpolačná funkcia $f(\chi, x_s)$ pre rôzne pomerné štihlости prúta

Treba poznamenať, že súčiniteľ vzperu χ pre prierez s priečnym zvarom je väčší alebo najmenej rovný χ pre prierez mimo priečného zvaru, čo vyplýva z (4.16) vzhľadom na to, že je počítaný pre upravenú pomernú štihlosť $\bar{\lambda}_{haz} = \bar{\lambda} \sqrt{\omega_0}$, ktorá je menšia nanajvýš rovná $\bar{\lambda}$.

Na grafe 4.3 sú znázornené: závislosti odolností prútov $N_{b,Rd,w}$ podľa posúdenia b) s ohľadom na priečny zvar v mieste x_s a závislosti celkových odolností prútov $N_{b,Rd,ab}(x_s) = \min(N_{b,Rd}; N_{b,Rd,w}(x_s))$ s priečnym zvarom s ohľadom na posúdenia a) aj b) od polohy priečného zvaru (od pomeru $x_l = x_s/l_c$) pre prúty s pomernými štihlosťami 0,5; 1,0; 1,5 a 2,0. V okrajových (priamych) častiach lomených kriviek $N_{b,Rd,ab}$ (v danom príklade pre pomerné štihlosti 1,5 a 2,0) rozhoduje odolnosť prúta $N_{b,Rd}$ odvodená pre prierez v strede vzpernej dĺžky, ak sa teda zvar nachádza v týchto oblastiach nevplyva na celkovú odolnosť prúta. V stredných častiach rozhoduje odolnosť $N_{b,Rd,w}$ s ohľadom na prierez s priečnym zvarom. $N_{c,Rd}$ je odolnosť prierezu mimo miesta zvaru a $N_{c,Rd,w}$ je odolnosť prierezu v mieste zvaru. Pri prútoch s väčšími štihlosťami (v danom príklade pre pomernú štihlosť 1,5 a 2,0), pri ktorých je vzperná odolnosť $N_{b,Rd}$ výrazne nižšia ako odolnosť prierezu $N_{c,Rd}$ sa oblasť zakrivenej časti krivky znižuje smerom ku stredu, čiže vplyv priečného zvaru sa znižuje, respektíve vplyva na celkovú odolnosť prúta len ak sa nachádza v blízkosti stredu. Naopak pri prútoch s menšími štihlosťami (v danom príklade pre pomernú štihlosť 0,5 a 1,0) väčšinou rozhoduje prierez so zvarom nech sa nachádza kdekoľvek. Čím sa bude hodnota ω_0 podľa (4.16) znižovať, tým pravdepodobnejšie bude rozhodovať prierez so zvarom pri stále väčších pomerných štihlostiach prúta.



Graf 4.3 Odolnosti prútov s ohľadom na posúdenia a) a b) s rôznymi pomernými štihlosťami

Ak sa priečny zvar nachádza v strede vzpernej dĺžky l_c , nie je nutné posúdenie a), posúdi sa iba podľa b) s $x_s = l_c/2$. V ostatných prípadoch nie je isté, či rozhodne posúdenie a) alebo b).

Preto je nutné overiť oboje. Pri posúdení prútov bez zvarov norma [11] neuvádza, že v tomto prípade je $\kappa = 1$. Pri prútoch s priečnym zvarom norma [11] nezdôrazňuje, že je nutné aj posúdenie a), čo je pravdepodobne dôsledkom snahy zjednotiť posúdenia a) a b).

4.4 ZÁVER

V norme [11] je uvádzaný súčiniteľ κ ako jediný člen v (4.1) zohľadňujúci vplyv zvarov, či už pozdĺžnych alebo priečných.

Pri pozdĺžnych zvaroch je súčiniteľ v prípade vzpernej triedy A závislý od pomeru A_1/A , čo by mohlo budiť dojem, že úplne zohľadňuje vplyv, aká veľká je plocha HAZ z celkovej plochy prierezu. To by však jeho hodnota nesmela presiahnuť pomer A_1/A , čo je v rozpore s hodnotami podľa normového vzťahu (4.7) vyneseními na grafe 4.1. Táto okolnosť spolu s ohľadom na to, že pri posudzovaní odolností prierezov (ťahovej a tlakovej) je v ploche A_{eff} zohľadnený aj vplyv nižšej pevnosti v HAZ, poukazuje na to, aby aj v čl. 6.3.1.1 [11] vo vzorci (6.49) pre vzpernú odolnosť bola v ploche A_{eff} zahrnutá efektívna hrúbka $t_{eff,haz}$ (4.6) nielen s ohľadom na lokálnu stratu stability, ale aj s ohľadom na zníženú pevnosť v HAZ od pozdĺžnych zvarov. Preto v prílohe 5 vypočítaný vzorový príklad posúdenia hliníkového prúta s pozdĺžnymi zvarmi už danú skutočnosť zohľadňuje.

V prípade priečných zvarov je súčiniteľ κ rovný (4.18) a zohľadňuje polohu priečného zvaru vzhľadom na inflexný bod vlastného tvaru vybočenia náhradného prúta. V prípade posudzovania prúta s priečnym zvarom norma odvoláva projektanta na posúdenie práve v tomto reze. Ako z grafu 3 vyplýva, že v prípadoch, keď sú zvary lokalizované v blízkosti inflexných bodov (oblasti priamych častí závislostí $N_{b,Rd,ab}(x_s)$ na grafe (4.3), bude vzperná odolnosť počítaná pre prierez v strede náhradného prúta nižšia ako vzperná odolnosť počítaná v priereze so zvarom. V týchto prípadoch vzhľadom na to, že norma zvlášť neupozorňuje projektanta na nutnosť overenia aj "klasickej" vzpernej odolnosti (akoby prúta bez zvaru) je tu riziko opomenutia aj tohto posúdenia a tým nadhodnotenia vzpernej odolnosti prúta. Nutné je preto obe posúdenia vykonať. V prílohe 5 sú preto v príklade prúta s priečnym zvarom vypočítané obe odolnosti a prút je posúdený s minimálnou z týchto odolností.

V tab. 4.1 sú uvedené navrhované korekcie predbežnej normy [11] zaslané komisií CEN TC 250/SC9. V prvom stĺpci je uvedené umiestnenie v norme, v druhom navrhované korekcie a v poslednom presné znenie vo forme v akom boli korekcie akceptované komisiou CEN, keďže to sa formulačne líšilo od návrhu. Korektúry č. 2 a 3 boli tiež akceptované, ale vzhľadom na to, že boli zaslané neskôr, budú zohľadnené v nasledovnom korigendu.

Tab. 4.1 Navrhované korektúry normy [11]

Por. č.	Miesto	Na základe predošlej štúdie navrhujem nasledovné korekcie	CEN TC 250/SC9 akceptovala môj návrh v oficiálnom Corrigendu AC: 2009 takto upravenou formuláciou
1	6.3.1.1 (2)	Vo vysvetlivke ku κ nahradiť "...weakening effects of welding. For longitudinally welded member..." s "... weakening effects of welding. For unwelded member is $\kappa = 1$. For longitudinally welded member..."	Vo vysvetlivke ku κ nahradiť "...according to 6.3.3.3. " s "...according to 6.3.3.3. $\kappa = 1$ if there are no welds." *
2	6.3.1.1 (2)	Vo vysvetlivke ku A_{eff} nahradiť " A_{eff} is the effective area allowing for local buckling for class 4 cross-section." s " A_{eff} is the effective area allowing for local buckling for class 4 cross-section and also allowing for HAZ softening due to longitudinal welds." **	**
3	6.3.1.1 (2)	Vo vysvetlivke ku A_{eff} nahradiť " $A_{eff} = A$ for class 1,2 or 3 cross-section" s " $A_{eff} = A$ for class 1,2 or 3 cross-section of members without longitudinal welds." **	**
4	6.3.1.2	Pridať poznámku na koniec článku "(5) In case of verifying a members in cross-section with a cross weld see note 6.3.3.3 (3) ."	Pridať poznámku na koniec článku "NOTE In a members with a local weld the slenderness parameter $\bar{\lambda}_{haz}$ according to 6.3.3.3 (3) should be used for the section with the weld." *

* korekcia bola zohľadnená v Corrigendu ver. 2009-03-02 ; **korekcie boli akceptované a budú zohľadnené v nasledovnom Corrigendu

5. VZPERNÁ ODOLNOSŤ RÁMOV A PRÚTOV S NEKONŠTANTNÝM PRIEBEHOM OSOVEJ SILY A/ALEBO S PREMENNÝM PRIEREZOM

5.1 PRÚTY S NEKONŠTANTNÝM PRIEBEHOM OSOVEJ SILY A/ALEBO OHYBOVEJ TUHOSŤI (PREMENNÝM PRIEREZOM)

Podmienka rovnováhy ideálneho prúta s nekonštantným priebehom osovej sily $N(x)$ a/alebo ohybovej tuhosti $EI(x)$ v rovine osi symetrie prierezu je vyjadrená nasledovnou diferenciálnou rovnicou s nekonštantnými koeficientmi:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI(x) \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \frac{d}{dx} w(x) + N(x) \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0. \quad (5.1)$$

Ak prút má konštantnú osovú silu a ohybovú tuhosť potom sa rovnica (5.1) zjednoduší na diferenciálnu rovnicu s konštantnými koeficientmi:

$$EI \frac{d^4}{dx^4} w(x) + N \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0. \quad (5.2)$$

Zatiaľ čo rovnicu (5.2) je možné riešiť analyticky, rovnicu (5.1) pre niektoré priebehy $N(x)$ a/alebo $EI(x)$ je možné riešiť iba numericky, napr. diferenčnou metódou. Obidve rovnice týkajúce sa ideálnych prútoch (bez imperfekcií), majú nulovú pravú stranu. Spolu s homogénnymi okrajovými podmienkami vedú na riešenie sústavy lineárnych homogénnych rovníc. Vzhľadom na to nie je možné vypočítať konkrétne hodnoty priehybov $w(x)$, ale iba riešiť problém vlastných čísel a k nim prislúchajúcich vlastných tvarov. Pri použití numerických metód vlastné čísla riešenia (5.1) predstavujú násobitele α síl $N_{Ed}(x)$, ktorými sú definované stavy rozdvojenia rovnováhy. Najmenší násobiteľ α_{cr} umožňuje určiť kritickú silu $N_{cr}(x)$. K nemu prislúchajúci vlastný tvar rovnováhy prúta označený $\eta_{cr}(x)$ vyhovuje riešeniu diferenciálnej rovnice (5.1).

Pre skutočný prút, v ktorom materiálové a geometrické odchýlky nahradzame funkčne zadanou ekvivalentnou geometrickou začiatočnou imperfekciou $w_0(x)$, platí nasledujúca diferenciálna rovnica:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI(x) \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \frac{d}{dx} (w_0(x) + w(x)) + N(x) \frac{d^2}{dx^2} (w_0(x) + w(x)) = 0. \quad (5.3)$$

Teraz známe členy $w_0(x)$ po roznásobení môžeme previesť na pravú stranu, preto rovnica (5.3) je nehomogénna a má jednoznačné riešenie. Jej riešením dostávame konkrétny priebeh prídavného priehybu prúta $w(x)$ pre zvolený priebeh začiatočnej imperfekcie a daný priebeh osovej sily $N(x)$ a ohybovej tuhosti $EI(x)$. Na začiatku zaťažovania prúta, ktorý je „vyrobený“ v tvare $w_0(x)$ sú napätia nulové. Ohybový moment teórie II. rádu vzniká od prídavného priehybu $w(x)$ a je určený rovnicou:

$$M_{II}(x) = -EI(x) \frac{d^2}{dx^2} w(x). \quad (5.4)$$

Ak za priebeh začiatočnej imperfekcie $w_0(x)$ v (5.3) vhodne zvolíme C -násobok priebehu vlastného tvaru rovnice (5.1) pre prút s rovnakým priebehom $EI(x)$ a $N(x)$ bez imperfekcií a rovnakými okrajovými podmienkami, teda položíme:

$$w_0(x) = C \cdot \eta_{cr}(x), \quad (5.5)$$

potom prídavný priebeh $w(x)$ bude afinný k priebehu samotnej imperfekcie a tým aj k vlastnému tvaru:

$$K \cdot w(x) = w_0(x) = C \cdot \eta_{cr}(x). \quad (5.6)$$

Potom výrazy $(w_0(x)+w(x))$ v (5.3) po dosadení (5.6) nadobúdajú tvar $(K+1)w(x)$ a zohľadnením že K je konštanta dostávame:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI(x) \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + (K+1) \frac{d}{dx} N(x) \frac{d}{dx} w(x) + (K+1) N(x) \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0. \quad (5.7)$$

Rovnica (5.7) je formálne zhodná s (5.1) s tým, že členy $N(x)$ a $dN(x)/dx$ sú prenasobené konštantou $(K+1)$. Z riešenia vlastných tvarov je známe, že tvar straty stability nie je závislý od konkrétnych hodnôt osových síl $N(x)$ ale iba od ich tvaru. Riešením (5.1) teraz dostávame vlastný tvar, ktorého C -násobok sme predtým použili ako začiatočnú imperfekciu. To je vlastnosť, ktorá platí bez ohľadu na to, či $N(x)$ a $EI(x)$ sú alebo nie sú konštantné, ak za imperfekciu zvolíme ktorýkoľvek vlastný tvar prúta.

Ďalšou vlastnosťou charakteristickou pre prídavnú deformáciu $w(x)$ v rovnici (5.3) ak za začiatočnú imperfekciu zvolíme vlastný tvar prúta je, že konštantu K je možné vyjadriť pomocou vlastného čísla α_{cr} prislúchajúceho k zvolenému vlastnému tvaru:

$$w(x) = \frac{1}{\alpha_{cr} - 1} w_0(x). \quad (5.8)$$

Predošlý vzťah je možné odvodiť, ak v diferenciálnej rovnici stability skutočného prúta so začiatočnou imperfekciou s konštantným prierezom namáhaného konštantnou osovou silou a obojstranne klbovo uloženého za priebeh aj imperfekciu dosadíme vlastný tvar vybočenia (polovlnu sínusoidy). Platnosť vzťahu (5.8) bola overená aj pre rovnicu (5.3) s nekonštantnými koeficientmi (vid' príloha 6 a kapitola 5.3).

Popísané dve charakteristické vlastnosti sú výhodne použité v nasledujúcej metóde posudzovania rámov alebo prútov s nekonštantným priebehom osovej sily a/alebo ohybovej tuhosti.

5.2 VZPERNÁ ODOLNOSŤ RÁMOV S PRÚTMI S PREMENNOU OSOVOU SILOU A/ALEBO OHYBOVOU TUHOSŤOU (PREMENNÝM PRIEREZOM)

Pri globálnej analýze rámu zohľadňujúcej účinky teórie II. rádu a imperfekcií norma STN EN 1993-1-1 [10] v článku 5.3.2(11) umožňuje imperfekciu odvodiť z vlastného tvaru $\eta_{cr}(x)$ straty stability konštrukcie v pružnom stave, ktorý predstavuje súčasne globálnu i lokálnu imperfekciu. Článok je obmedzený na posudzovanie rámov s prútmi s konštantným prierezom a osovou silou. Prof. Chladný zovšeobecnil tento postup pre použitie aj pri rámových konštrukciách zložených z prútov s nekonštantným priebehom osovej sily a/alebo s nekonštantným prierezom (pozri napr. [15]). Postup sa nachádza v NB.5.2 národnej prílohy [13] a v článku 5.3.2(11) normy [11]. Nasledujúce riadky sa budú týkať tohto zovšeobecného postupu aj pre rámy z prútov s nekonštantným prierezom a/alebo s nekonštantnou osovou silou s úpravami podľa prof. Baláža z článku [14].

Pre rámy s prútmi namáhanými len osovými silami $N_{Ed}(x)$ a so zadaným priebehom imperfekcie $\eta_{init}(x)$ sa vypočíta analýzou II. rádu priebeh prídavnej deformácie a prislúchajúce priebehy vnútorných síl či už komerčným programom alebo iným spôsobom. Pri známych priebehoch vnútorných síl je možné takýto rám posúdiť v jednotlivých rezoch x . Podmienka odolnosti bude znieť nasledovne:

$$\left(\frac{N_{Ed}(x)}{N_{Rd}(x)} + \frac{M_{Ed,init}^{II}(x)}{M_{Rd}(x)} \right)_{\max} \leq 1, \quad (5.9)$$

v ktorej: $N_{Ed}(x)$ je priebeh osových síl

$M_{Ed,init}^{II}(x)$ je priebeh ohybových momentov vznikajúcich od prídavného priehybu od osových síl pôsobiacich na prúte s imperfekciou $\eta_{init}(x)$ určený teóriou II. rádu

$N_{Rd}(x) = N_{Rk}(x)/\gamma_{M1}$, $M_{Rd}(x) = M_{Rk}(x)/\gamma_{M1}$ sú návrhové odolnosti prierezu v tlaku a v ohybe v reze x .

Prierez, v ktorom sa dosahuje najväčšie napätie od kombinácie osovej sily $N_{Ed}(x)$ a momentov $M_{Ed,init}^{II}(x)$ vznikajúcich v dôsledku imperfekcií, t.j. tam, kde výraz v zátvorke na ľavej strane podmienky (5.9) pre vyššie definovaný rám dosahuje svoje maximum, je rozhodujúcim rezom z hľadiska jeho vzpernej odolnosti a označuje sa indexom m . Jednotlivé veličiny v tomto reze potom sú nasledovné: EI_m ; $N_{Ed,m}$; $N_{Rd,m}$; $M_{Ed,init,m}^{II}$; $M_{Rd,m}$.

Priebeh začiatočnej imperfekcie sa zadefinuje za pomoci vlastného tvaru vybočenia prúta/rámu nasledovne:

$$\eta_{init}(x) = \eta_{0,init} \eta_{cr}(x), \quad (5.10)$$

kde $\eta_{0,init}$ je amplitúda imperfekcie a $\eta_{cr}(x)$ je normovaný vlastný tvar (s maximálnou poradnicou rovnou 1). Neexistujú štatisticky spracované výsledky odolností rámov s premennými prierezmi a osovými silami, z ktorých by bolo možné stanoviť amplitúdu imperfekcie. Preto amplitúda imperfekcie $\eta_{0,init}$ je určená z podmienky (pozri [15]), aby ten prút rámu, ktorý je rozhodujúci z hľadiska vzpernej odolnosti celého rámu, mal rovnakú vzpernú odolnosť ako jeho náhradný prút. Termínom náhradný prút (viď obr. 5.1) sa tu rozumie prút, ktorý má konštantný prierez s ohybovou tuhosťou rovnou EI_m vyšetřovaného (rozhodujúceho) prúta v rozhodujúcom reze x_m , konštantnú osovú silu rovnú osovej sile $N_{Ed,m}$

vyšetřovaného prúta v rozhodujúcom reze x_m a kritickú silu rovnú kritickú sile $N_{cr,m}$ vyšetřovaného prúta v rozhodujúcom reze x_m a je prsto uložený. Ak vyšetřovaný prút má mať rovnakú vzpernú odolnosť ako jeho náhradný prút, potom ohybový moment vyšetřovaného prúta od imperfekcií v rozhodujúcom priereze x_m má byť rovný ohybovému momentu v strede náhradného prúta (vid' obr. 5.1). Táto podmienka je matematicky zapísaná nasledovne:

$$M_{Ed,init,m}^{II}(x_m) = M_{Ed,nahr.p}^{II}(L_n/2). \quad (5.11)$$

Podmienku (5.11) môžeme rozpísať. Moment na vyšetřovanom prúte v reze x_m (ľavá strana v (5.11)) vyjadríme z (5.4), v ktorom za prídavnú deformáciu $w(x)$ dosadíme prídavnú deformáciu vznikajúcu na vyšetřovanom prúte so začiatočnou imperfekciou (5.10), pričom použijeme (5.8) vzhľadom na to, že $\eta_{init}(x)$ má tvar afinný vlastnému tvaru vyšetřovaného prúta. Moment v strede náhradného prúta (pravá strana v (5.11)) vyjadríme z vonkajšieho zaťaženia $N_{Ed,m}$ pričom použijeme opäť (5.8):

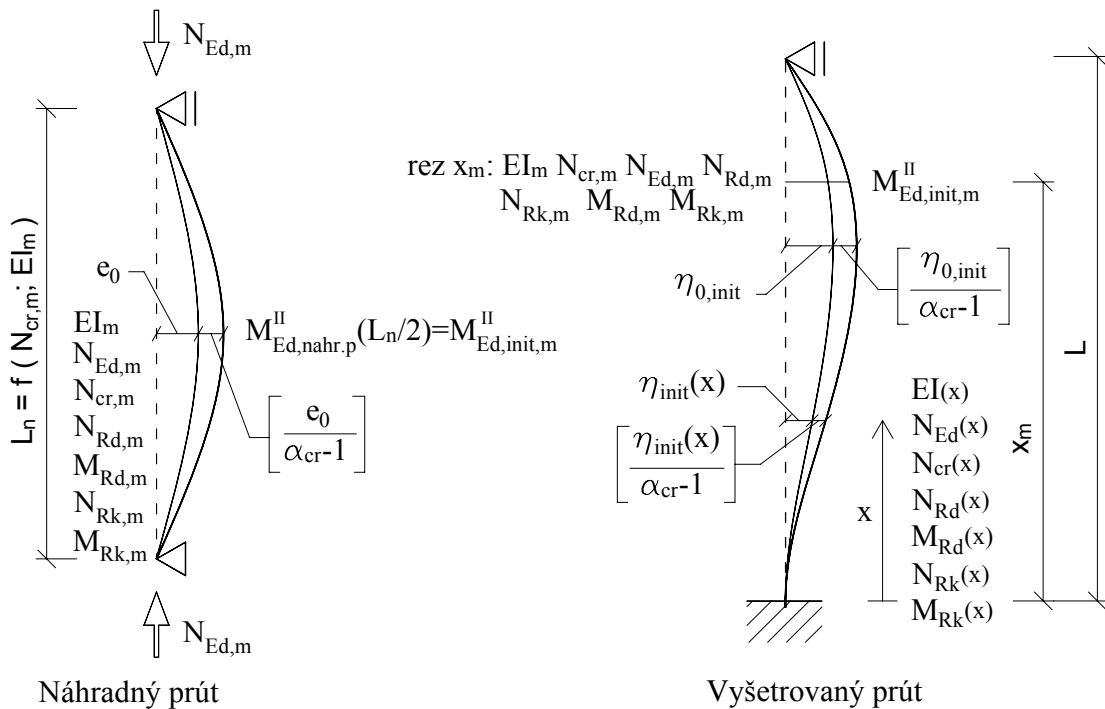
$$EI_m \frac{1}{\alpha_{cr} - 1} \eta_{0,init} |\eta_{cr}''(x_m)| = N_{Ed,m} \left(e_0 + \frac{1}{\alpha_{cr} - 1} e_0 \right). \quad (5.12)$$

Po úpravách dostávame výraz pre amplitúdu začiatočnej imperfekcie:

$$\eta_{0,init} = \frac{\alpha_{cr} N_{Ed,m} e_0}{EI_m |\eta_{cr}''(x_m)|} = \frac{\alpha_{cr} N_{Ed,m} e_0}{M_{\eta_{cr},m}}, \quad (5.13)$$

kde: $M_{\eta_{cr},m}$ je ohybový moment, ktorý by vznikol v priereze x_m pri zdeformovaní prúta do vlastného tvaru (s amplitúdou rovnou 1)

e_0 je amplitúda imperfekcie (v tvare polovlny sínusoidy) náhradného prúta



Obr. 5.1 Náhradný a vyšetřovaný prút s rovnakými vzpernými odolnosťami

Na obr. 5.1 sú zobrazené: vyšetrowaný a jeho náhradný prút v ich začiatočných tvaroch (tvaroch afinných ich vlastným tvarom vyplývajúcim z riešenia rovnice (5.1) alebo (5.2)) a ich prídavné deformácie vyplývajúce z pôsobenia osových síl na takto imperfektných prútoch, ktoré spĺňajú obe charakteristické vlastnosti uvedené v kapitole 5.1. Dĺžka náhradného prúta L_n je iná ako $0,7L$ vyšetrowaného prúta, pretože vzhľadom na nekonštantný priebeh $N_{Ed}(x)$ a $EI(x)$ na vyšetrowanom prúte to už neplatí. Veličinami EI_m , $N_{cr,m}$ vyšetrowaného prúta v reze x_m je možné vyjadriť dĺžku náhradného prúta:

$$L_n = \pi \sqrt{\frac{EI_m}{N_{cr,m}}}. \quad (5.14)$$

Pre prosto uložené prúty s konštantnými EI a N_{Ed} a pre vybrané typy prierezov boli vykonané experimenty vzperných odolností, na základe ktorých sa v koncepcii náhradného prúta určili miery imperfekcií α a odpovedajúce súčinitele vzperu χ . Metóda náhradného prúta bola zahrnutá aj v Eurokódoch. Pre amplitúdu imperfekcie e_0 náhradného prúta bol pritom použitý nasledovný výraz:

$$e_0 = \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) \frac{M_{Rk}}{N_{Rk}}, \text{ pre } \bar{\lambda} > 0,2, \quad (5.15)$$

kde: $\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_{Rk}}{N_{cr}}}$ je pomerná štíhlosť

N_{Rk} , M_{Rk} je charakteristická odolnosť prierezu v tlaku a ohybe

N_{cr} je kritická sila náhradného prúta pre 1. vlastný tvar

α je miera imperfekcie

Výpočtom náhradného prúta s amplitúdou imperfekcie e_0 (5.15) zaťaženého osovou silou jeho vzpernej odolnosti charakteristickej hodnoty a výpočtom na základe teórie II. rádu dospejeme k napätiu rovnému medze klzu v najviac namáhanom vlákne.

Podmienka rovnakej vzpernej odolnosti vyšetrowaného prúta rámu a jeho náhradného prúta spočíva v tom, že v oboch prípadoch pri namáhaní na úrovni charakteristickej vzpernej odolnosti bude v najviac namáhaných vláknach dosiahnutá medza klzu, preto je nasledujúce odvodenie vykonané s charakteristickými odolnosťami. Posúdenie náhradného prúta namáhaného na úrovni charakteristickej vzpernej odolnosti, kedy je v najviac namáhanom vlákne dosiahnutá medza klzu, znie:

$$\frac{N_{Ed,m}}{\chi \cdot N_{Rk,m}} = 1. \quad (5.16)$$

Ak napíšeme pre náhradný prút na obr. 5.1 podmienku odolnosti prierezu v strede prúta namáhaného na úrovni jeho charakteristickej vzpernej odolnosti s ohľadom na to, že osovú silu, odolnosť prierezu v tlaku, odolnosť prierezu v ohybe a ohybový moment teórie II rádu sme zobrali z rozhodujúceho prierezu vyšetrowaného prúta, dostaneme:

$$\frac{N_{Ed,m}}{N_{Rk,m}} + \frac{M_{Ed,init,m}^{II}}{M_{Rk,m}} = 1, \quad (5.17a)$$

ktorá je vlastne aj podmienkou odolnosti rozhodujúceho prúta v rozhodujúcom reze x_m vyššie definovaného rámu, kedy je tiež v najviac namáhanom vlákne rezu x_m dosiahnutá medza klzu. Ohybový moment v (5.17a) sa môže zapísať vzhľadom na (5.11) ako pravá strana rovnosti (5.12) a po úprave dostaneme podmienku:

$$\frac{N_{Ed,m}}{N_{Rk,m}} + \frac{k \cdot N_{Ed,m} \cdot e_0}{M_{Rk,m}} = 1, \quad (5.17b)$$

kde $k = \alpha_{cr}/(\alpha_{cr}-1)$ je pomer medzi momentom vypočítaným teóriou II. rádu a momentom teórie I. rádu, keďže sme za začiatočnú imperfekciu zvolili tvar afinný vlastnému tvaru.

Aby platilo (5.17b) (teda v najviac namáhanom vlákne prierezu x_m bola dosiahnutá medza klzu), je nutné použiť nasledovnú amplitúdu imperfekcie náhradného prúta:

$$e_0 = \alpha_m (\bar{\lambda}_m - 0,2) \frac{M_{Rk,m}}{N_{Rk,m}}; \text{ pre } \bar{\lambda}_m > 0,2, \quad (5.18)$$

$$\text{kde: } \bar{\lambda}_m = \sqrt{\frac{N_{Rk,m}}{N_{cr,m}}}, \quad (5.19)$$

$N_{cr,m}$ je kritická sila vyšetřovaného prúta v reze x_m

$N_{Rk,m}$, $M_{Rk,m}$ je charakteristická odolnosť prierezu v tlaku a v ohybe v reze x_m vyšetřovaného prúta

α_m je miera imperfekcie pre prierez v reze x_m

Začiatočná imperfekcia e_0 (5.18) je imperfekciou z (5.15) vyjadrenou pre parametre z prierezu x_m vyšetřovaného prúta. Ak dosadíme začiatočnú imperfekciu e_0 (5.18) a súčiniteľ vzperu vyjadrený z (5.16) $\chi = N_{Ed,m}/N_{Rk,m}$ (čo je v zhode s definíciou súčiniteľa vzperu) do posúdenia (5.17b) s aplikovaním (5.19) a po úprave, dostaneme kvadratickú rovnicu:

$$\bar{\lambda}_m^2 \cdot \chi^2 - \left[1 + \alpha_m (\bar{\lambda}_m - 0,2) + \bar{\lambda}_m^2 \right] \chi + 1 = 0, \quad (5.20a)$$

ktorej riešením dostaneme hodnotu súčiniteľa vzperu používaného v metóde náhradného prúta, určeného pre parametre z prierezu x_m vyšetřovaného prúta:

$$\chi = \chi_m = \frac{1}{\phi_m + \sqrt{\phi_m^2 - \bar{\lambda}_m^2}}, \text{ kde } \phi_m = 0,5 \left[1 + \alpha_m (\bar{\lambda}_m - 0,2) + \bar{\lambda}_m^2 \right], \quad (5.20b)$$

Ak vykonáme predchádzajúce odvodenie s použitím návrhových odolností prierezu potom aby sme dospeli ku výrazom (5.20b), musíme namiesto amplitúdy imperfekcie (5.18) použiť nasledovnú návrhovú hodnotu amplitúdy imperfekcie:

$$e_{0,d} = \alpha_m (\bar{\lambda}_m - 0,2) \frac{M_{Rk,m}}{N_{Rk,m}} \frac{1 - \chi_m \bar{\lambda}_m^2}{1 - \chi_m \bar{\lambda}_m^2}; \text{ pre } \bar{\lambda}_m > 0,2, \quad (5.20c)$$

kde $\bar{\lambda}_m$ sa určí tiež podľa (5.19), χ_m a ϕ_m podľa (5.20b). Potom do (5.13) sa dosadzuje za e_0 návrhová hodnota $e_{0,d}$ (5.20c). Pri konštrukciách, pre ktoré je $\gamma_{M1} = 1$, je hodnota (5.20c) totožná s (5.18).

Teraz sú známe všetky členy v (5.13) a je zadefinovaná začiatočná imperfekcia (5.10). Vo výrazoch (5.20c), (5.20b), (5.19) a (5.13) sú veličiny závislé od polohy rozhodujúceho prierezu x_m , ktorá je v mieste polohy maxima výrazu v zátvorke na ľavej strane (5.9). Preto je nutné použiť iteračný postup:

- 1) Výpočet vlastného tvaru $\eta_{cr}(x)$ a druhej derivácie $\eta_{cr}''(x)$ rámu pomocou komerčného programu alebo v prípade prúta je možné aj riešením diferenciálnej rovnice (5.1) pre zadané priebehy $EI(x)$ a $N_{Ed}(x)$ napríklad numerickou metódou použitou v nasledujúcej kapitole.
- 2) Odhad polohy rozhodujúceho prierezu x_m . Približne je možné predpokladať polohu rezu medzi miestom maximálneho napätia od osovej sily a maximálneho napätia od momentu.
- 3) Výpočet pomernej štíhlosti $\bar{\lambda}_m$ z (5.19) náhradného prúta a z (5.20c) určenie návrhovej hodnoty amplitúdy začiatočnej imperfekcie náhradného prúta.
- 4) Určenie amplitúdy začiatočnej imperfekcie (5.13) vyšetrovaného prúta (rozhodujúceho prúta rámu) pre $e_0 = e_{0,d}$ a zadefinovanie začiatočnej imperfekcie (5.10) vyšetrovaného prúta.
- 5) Výpočet prídavnej deformácie $\eta(x)$ vznikajúcej na prúte so začiatočnou imperfekciou (5.10). Pri zohľadnení (5.8) platí :

$$\eta(x) = \frac{1}{\alpha_{cr} - 1} \eta_{init}(x) = \frac{1}{\alpha_{cr} - 1} \eta_{0,init} \eta_{cr}(x). \quad (5.21)$$

- 6) Určenie priebehu ohybových momentov teórie II. rádu (5.4) súvisiacich s imperfekciami z už známeho priebehu prídavnej deformácie:

$$M_{Ed,init}''(x) = -EI(x)\eta''(x). \quad (5.22)$$

- 7) Vyhodnotením výrazu v zátvorke na ľavej strane (5.9) po jednotlivých rezoch rozhodujúceho prúta rámu sa dospeje k miestu s najväčším využitím. Ak maximálne využitie nevychádza v mieste x_m je nutné vrátiť sa do bodu 2) a zmeniť odhad polohy x_m na polohu s maximálnym využitím. Takto je nutné iterovať až kým sa nestotožní odhad x_m s polohou maximálnej hodnoty výrazu v zátvorke na ľavej strane (5.9). Potom overíme odolnosť vyššie definovaného rámu pomocou podmienky (5.9) resp. (5.17a) v priereze x_m ale s návrhovými hodnotami odolností v menovateľoch.

Na začiatku state bolo pre zjednodušenie uvedené, že daná metóda sa týka rámov s prútmi namáhanými len osovými silami $N_{Ed}(x)$, čo by veľmi zužovalo možnosti jej použitia. Metódu je možné použiť aj pri posudzovaní rámov, ktoré sú namáhané ohybovými momentmi už od pôsobiacich vonkajších zaťažení nehl'adiac na momenty vznikajúce od osových síl pôsobiacich na imperfektnom prúte resp. ráme. V tomto prípade sa tiež hľadá poloha rozhodujúceho prierezu hore uvedeným postupom, až kým sa nedospeje k polohe maxima ľavej strany (5.9), v ktorom zatiaľ momenty od vonkajších síl nie sú zohľadnené. Preto sú

zohľadnené v nasledovných krokoch, ktoré sa vykonajú iba v prípade rámov namáhaných aj momentmi od vonkajších zaťažení:

- 8) Určenie priebehu súčtu momentov teórie II. rádu podľa (5.22), vznikajúcich od osových síl pôsobiacich na imperfektnom ráme a momentov $M_{Ed}''(x)$ od zaťaženia.
- 9) Posúdenie najviac namáhaného prierezu podľa:

$$\left(\frac{N_{Ed}(x)}{N_{Rd}(x)} + \frac{M_{Ed,init}''(x) + M_{Ed}''(x)}{M_{Rd}(x)} \right)_{\max} \leq 1. \quad (5.23)$$

Vzhľadom na to, že vo všeobecnosti poloha maxima momentov od vonkajších zaťažení $M_{Ed}(x)$ nekorešponduje s polohou rozhodujúceho prierezu x_m z hľadiska vzpernej odolnosti, je poloha maxima ľavej strany (5.23) tiež mimo polohy x_m .

5.3 RIEŠENIE VLASTNÝCH ČÍSIEL A TVAROV ROVNICE (5.1) S NEKONŠTANTNÝMI KOEFICIENTMI POMOCOU DIFERENČNEJ METÓDY

Vzhľadom na nekonštantné koeficienty diferenciálnej rovnice (5.1) nie je vo všeobecnosti možné nájsť riešenie v analytickom tvare podobne ako pri prútoch s konštantným prierezom a osovou silou pre rôzne okrajové podmienky. Možné je riešenie pomocou numerickej metódy napríklad diferenčnou metódou (metódou sietí).

Jednotlivé derivácie a to prvú a druhú aproximujeme nasledovnými diferenciami:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad (5.24a)$$

$$y''_i \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}, \quad (5.24b)$$

v ktorých h je dĺžka kroku pri ekvidistantnom delení (viď obr. 5.2). Prepíšme diferenciálnu rovnicu (5.1) do diferenčného tvaru. Najprv vyjadríme druhú deriváciu zátvorky prvého členu rovnice:

$$\frac{EI_{i-1}w''_{i-1}}{h^2} + \frac{-2EI_i w''_i}{h^2} + \frac{EI_{i+1}w''_{i+1}}{h^2} + dN_{dx,i}w'_i + N_i w''_i = 0, \quad (5.25)$$

kde $dN_{dx,i}$ je hodnota derivácie osovej sily v uzle "i", keďže priebeh osových síl poznáme môžeme hodnoty derivácií priamo zadávať bez toho aby sme ich vyjadrovali pomocou diferencií. Teraz môžeme vyjadriť prvé a druhé derivácie priehybu w v uzloch $i-1$, i , $i+1$:

$$\begin{aligned} & \frac{EI_{i-1}}{h^2} \left[\frac{w_{i-2} - 2w_{i-1} + w_i}{h^2} \right] + \frac{-2EI_i}{h^2} \left[\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2} \right] + \frac{EI_{i+1}}{h^2} \left[\frac{w_i - 2w_{i+1} + w_{i+2}}{h^2} \right] + \\ & + dN_{dx,i} \left[\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right] + N_i \left[\frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{h^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Po úprave dostávame rovnicu pre i -tý uzol prúta, v ktorej sú vzájomne zviazané hodnoty priehybu w v 5 susedných uzloch:

$$\begin{aligned}
 & w_{i-2} \underbrace{\left[\frac{EI_{i-1}}{h^4} \right]}_{a_{i-2}} + w_{i-1} \underbrace{\left[\frac{-2EI_{i-1} - 2EI_i}{h^4} \right]}_{a_{i-1}} + w_i \underbrace{\left[\frac{EI_{i-1} + 4EI_i + EI_{i+1}}{h^4} \right]}_{a_i} + w_{i+1} \underbrace{\left[\frac{-2EI_i - 2EI_{i+1}}{h^4} \right]}_{a_{i+1}} + w_{i+2} \underbrace{\left[\frac{EI_{i+1}}{h^4} \right]}_{a_{i+2}} + \\
 & + w_{i-1} \underbrace{\left[\frac{-dN_{dx,i}}{2h} \right]}_{b_{i-1}} + w_i \cdot \underbrace{0}_{b_i} + w_{i+1} \underbrace{\left[\frac{dN_{dx,i}}{2h} \right]}_{b_{i+1}} + w_{i-1} \underbrace{\left[\frac{N_i}{h^2} \right]}_{c_{i-1}} + w_i \underbrace{\left[\frac{-2N_i}{h^2} \right]}_{c_i} + w_{i+1} \underbrace{\left[\frac{N_i}{h^2} \right]}_{c_{i+1}} = 0
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Keď vypíšeme rovnicu pre každý z n uzlov prúta, v ktorých hľadáme hodnotu priehybu a po zohľadnení homogénnych okrajových podmienok, dostaneme sústavu homogénnych rovníc, ktorú môžeme zapísať:

$$[M]\{w\} = \{0\}. \tag{5.28}$$

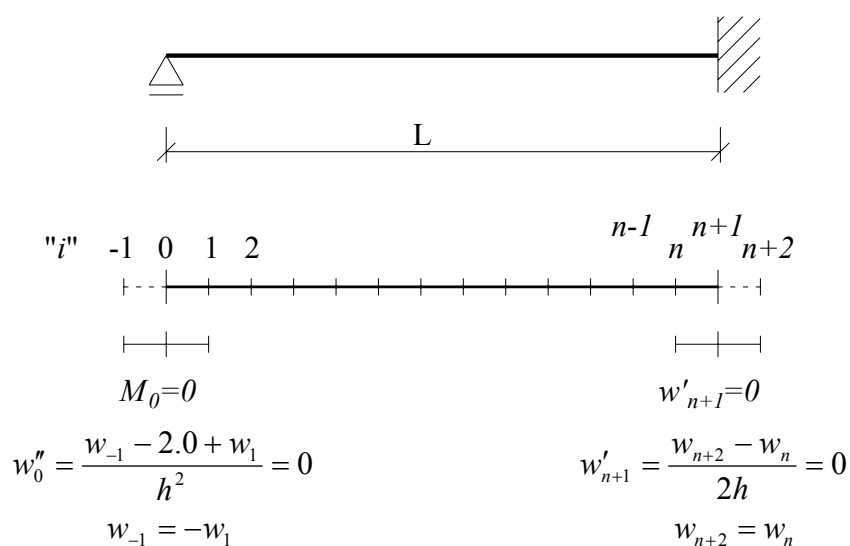
Je vhodnejšie, ak maticu $[M]$ rozložíme na 4 matice: 5-diagonálnu maticu $[M'_{EI}]$ s argumentmi a_i týkajúcich sa ohybových tuhostí EI_i , 2-diagonálnu (stredná diagonála je nulová) maticu $[M_{dN}]$ s argumentmi b_i týkajúcich sa derivácií osových síl $dN_{dx,i}$, 3-diagonálnu maticu $[M'_N]$ s argumentmi c_i týkajúcich sa osových síl N_i a maticu $[M_{okr.pod.}]$, ktorá bude zohľadňovať okrajové podmienky:

$$M'_{EI} = \begin{bmatrix} [a_1] & [a_2] & [a_3] & & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\ & & [a_{i-2}] & [a_{i-1}] & [a_i] & [a_{i+1}] & [a_{i+2}] & & & & \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & & & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & & & & & [a_{n-2}] & [a_{n-1}] & [a_n] & & \end{bmatrix}, \tag{5.29}$$

$$M_{dN} = \begin{bmatrix} & & [b_2] & & & & & & & & \\ \bullet & & & \bullet & & & & & & & \\ & \bullet & & & \bullet & & & & & & \\ & & [b_{i-1}] & & [b_{i+1}] & & & & & & \\ & & & \bullet & & \bullet & & & & & \\ & & & & \bullet & & \bullet & & & & \\ & & & & & \bullet & & \bullet & & & \\ & & & & & & [b_{n-1}] & & & & \end{bmatrix}, \tag{5.30}$$

$$M'_N = \begin{bmatrix} [c_1] & [c_2] & & & & & & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & & \\ & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & & & \\ & & [c_{i-1}] & [c_i] & [c_{i+1}] & & & & & & \\ & & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\ & & & & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\ & & & & & & & [c_{n-1}] & [c_n] & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

Pri vypisovaní rovnice (5.27) pre krajné z vnútorných uzlov $i=1$ a $i=n$ sa v rovniciach vyskytujú aj hodnoty priehybov v uzloch, ktoré sa nachádzajú mimo prúta. Tieto sa určujú z okrajových podmienok podľa obr. 5.2 pomocou priehybov w_1 a w_n krajných z vnútorných uzlov. Matica $[M_{okr.pod.}]$ má preto v ľavom hornom a pravom dolnom rohu nenulový člen.



Obr. 5.2 Delenie prúta a okrajové podmienky

Po zavedení matic:

$$[M_{EI}] = [M'_{EI}] + [M_{okr.pod.}], \quad [M_N] = [M'_N] + [M_{dN}] \quad (5.32)$$

môžeme rovnicu (5.28) zapísať:

$$[[M_{EI}] + [M_N]]\{w\} = 0. \quad (5.33)$$

Sústava rovníc (5.33) predstavuje sústavu homogénnych rovníc, pre nulovú pravú stranu nie je možné určiť konkrétne hodnoty priehybov v uzlových bodoch. Táto preto vedie na zovšeobecnený problém vlastných čísel $\{\alpha\}$ a vlastných vektorov $\{\eta\}$ matic M_{EI} a M_N . Pričom každé vlastné číslo α_i a jemu príslušný vlastný vektor $\{\eta\}_i$ vyhovujú nasledovnej rovnici:

$$[M_{EI}]\{\eta\}_i = \alpha_i [M_N]\{\eta\}_i. \quad (5.34)$$

Ak osovú silu majú kladné znamienka, ako bolo predpokladané pri odvodzovaní rovnice (5.1), potom aby platila rovnica (5.34), musia byť vlastné čísla záporné. Potom do rovnice (5.8) sa za α_{cr} dosadzuje absolútna hodnota vlastného čísla. Keďže kritické číslo α_{cr} je definované ako číslo, ktorým po prenasobení priebehu osových síl na prúte dostávame priebeh kritických síl, pričom sa predpokladá $\alpha_{cr} \geq 1$, rovnica (5.8) platí v tvare v akom je uvedená.

Vzhľadom na to, že rovnica (5.8) sa dá ľahko odvodiť pri prútoch s konštantným prierezom a konštantnou osovou silou analyticky a pri prútoch s nekonštantným prierezom a osovou silou je to obťažné, je vhodné jej platnosť overiť aspoň použitím diferenčnej metódy riešením rovnice (5.3) pre konkrétny prút s nekonštantným prierezom a osovou silou (pozri prílohu 6). V rovnici (5.3) všetky členy so známym priebehom imperfekcie $w_0(x)$ po roznásobení presunieme na pravú stranu:

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI(x) \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \frac{d}{dx} w(x) + N(x) \frac{d^2}{dx^2} w(x) = \\ & = -\frac{d}{dx} N(x) \frac{d}{dx} w_0(x) - N(x) \frac{d^2}{dx^2} w_0(x) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Keďže ľavá strana (5.35) je totožná s ľavou stranou (5.1), vedie na maticu $[M]$ v (5.28), ktorá je súčtom matic $[M'_{EI}]$, $[M_{dN}]$, $[M'_N]$ a $[M_{okr.pod.}]$. Ostáva vyjadriť členy na pravej strane (5.35). Prvé a druhé derivácie priebehu teraz známej imperfekcie $w_0(x)$ je možné vyjadriť funkčne a ich hodnoty v uzlových bodoch $i=1,2,\dots,n$ zoradiť do vektorov alebo je možné ich vyjadriť tiež pomocou diferenčných výrazov derivácií (5.24a) a (5.24b). Podobne je možné vyjadriť aj prvú deriváciu osovej sily $N(x)$. Výsledkom pravej strany rovnice (5.35) je vektor pravých strán $\{VPS\}$. Rovnica (5.35) teraz v maticovom tvare je:

$$[M]\{w\} = \{VPS\}. \quad (5.36)$$

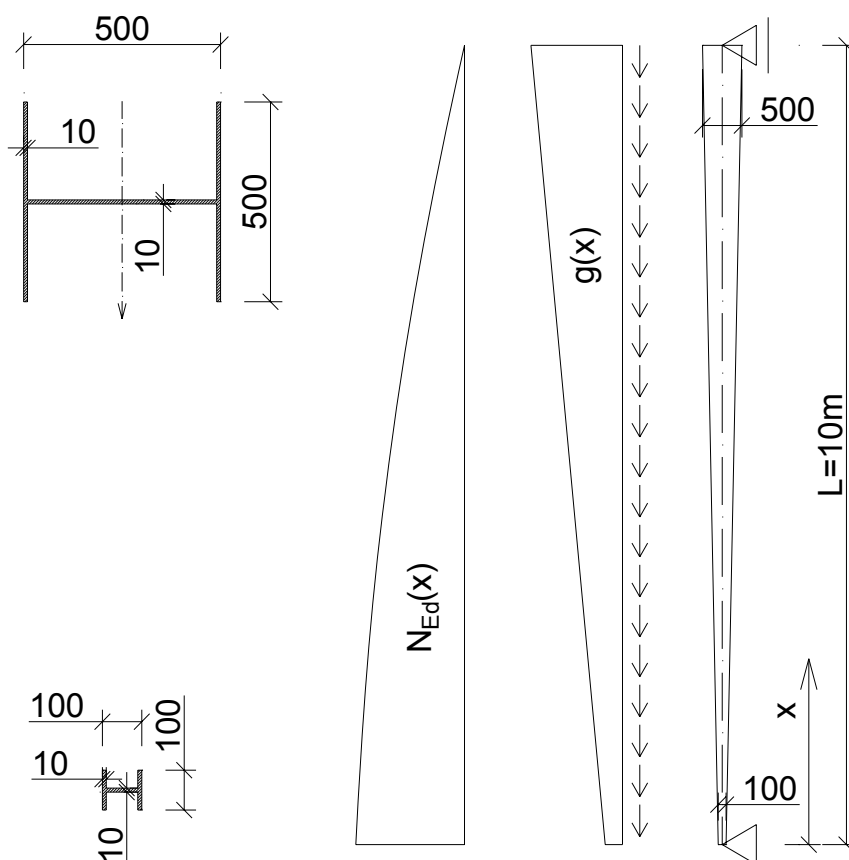
Riešením sústavy nehomogénnych rovníc (5.36) dostaneme vektor $\{w\}$ hodnôt prídavného priebyhu v uzlových bodoch. V prílohe 6 je najprv riešený problém vlastných čísel a vlastných vektorov ideálneho prúta a následne je prvý vlastný tvar zadefinovaný ako začiatočná imperfekcia skutočného prúta s totožným premenným prierezom, priebehom osových síl a okrajových podmienok ako pri ideálnom prúte. Potom je vyriešený priebeh prídavného priebyhu na základe rovnice (5.36) a následne porovnaný pomocou vzťahu (5.8) s priebehom prvého vlastného tvaru. Výpočet bol zopakovaný pre viacero priebehov osových síl, či už s lineárnym, kvadratickým alebo konštantným priebehom a pre rôzne kombinácie (kĺb alebo votknutie) okrajových podmienok. Pri všetkých príkladoch s nekonštantnými koeficientmi vzťah (5.8) platil.

5.4 ILUSTRATÍVNE PRÍKLADY

5.4.1 Príklad 1

Pre názornosť bol vypočítaný príklad oceľového prúta so vstupmi podľa príkladu 3.6 dokumentu [16]. Prút je zobrazený na obr. 5.3, má premenný I prierez, ktorého šírka a výška sa lineárne mení od začiatočnej hodnoty 100 mm po koncovú 500 mm a osová sila je zadefinovaná od vlastnej tiaže, pričom sa uvažuje 100-násobne väčšia tiaž ako je tiaž ocele. Uvažovaná je pevnostná trieda ocele S355. Pre potreby príkladu bol napísaný program na riešenie diferenciálnych rovníc (5.3) a (5.1) diferenčnou metódou podľa kapitoly 5.3 v programe MathCAD (viď príloha 7). Dĺžka kroku diferenčnej metódy bola zvolená 1cm. Aby sa vylúčili možné chyby riešenia diferenciálnej rovnice diferenčnou metódou, boli vlastné tvary prúta vypočítané aj programom IQ100 a výsledky potvrdili správnosť riešenia vlastných tvarov.

Výsledky výpočtu sú zoradené v tab. 5.1. V prvom stĺpci sú výsledky vypočítané na základe aproximácie vlastného tvaru z hodnôt vlastného tvaru v 51 ekvidistantných bodoch vypočítaných v programe IQ100. V každej 1/5 dĺžky prúta bola použitá samostatná aproximácia polynómom 10. stupňa, vzhľadom na to, že vlastný tvar prúta je v hornom úseku takmer lineárny, zatiaľ čo v dolnom už nie. V druhom stĺpci sú výsledky (z prílohy 7) vypočítané diferenčnou metódou a to vlastný tvar, vlastné číslo ako aj priebeh momentov.



Obr. 5.3 Tvar prúta a jeho prierezov, priebeh spojitého osového zaťaženia a osovej sily

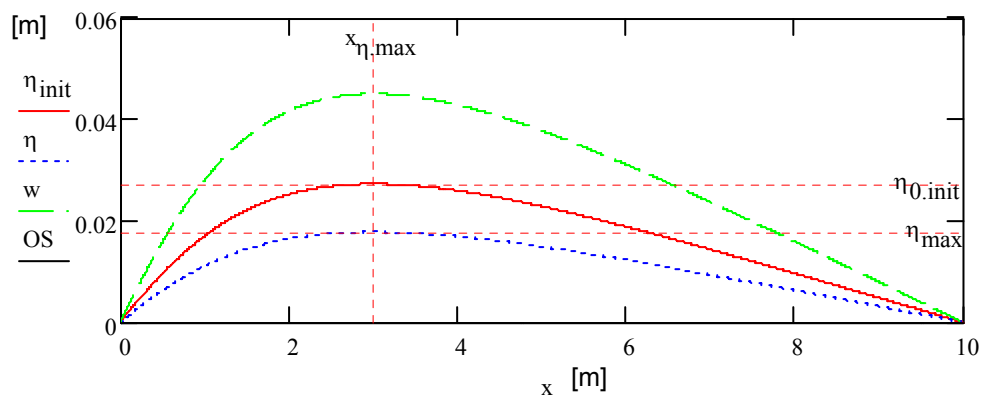
Na grafe 5.1 je znázornený priebeh začiatočnej imperfekcie v tvare afinnom vlastnému tvaru straty stability a z nej vyplývajúci tvar prídavného priehybu tiež v tvare afinnom vlastnému tvaru stability. Na grafe 5.2 je znázornená druhá derivácia prídavného priehybu

a priebeh ohybovej tuhosti prúta, ktorých prenasobením podľa (5.4) dostávame priebeh ohybového momentu teórie II. rádu, ktorý je zobrazený na grafe 5.3. Poloha nulového momentu je v mieste nulovej druhej derivácie prídavného prieby čiže aj druhej derivácie vlastného tvaru vybočenia, čo je de facto inflexný bod vlastného tvaru straty stability, v tomto prípade je na koncoch prúta. Na grafe 5.4 sú vynesené využitia v jednotlivých rezoach a to celkové U , časť vyplývajúca iba od osovej sily U_N a od momentu U_M . Využitie U_M dosahuje maximum mimo miesta, v ktorom je najväčší moment, čo spôsobuje premenný prierezový modul. Maximálne využitie od osovej sily je na začiatku prúta. Rozhodujúci prierez v tomto prípade vyšiel približne v strede medzi miestami maximálneho využitia U_N a U_M .

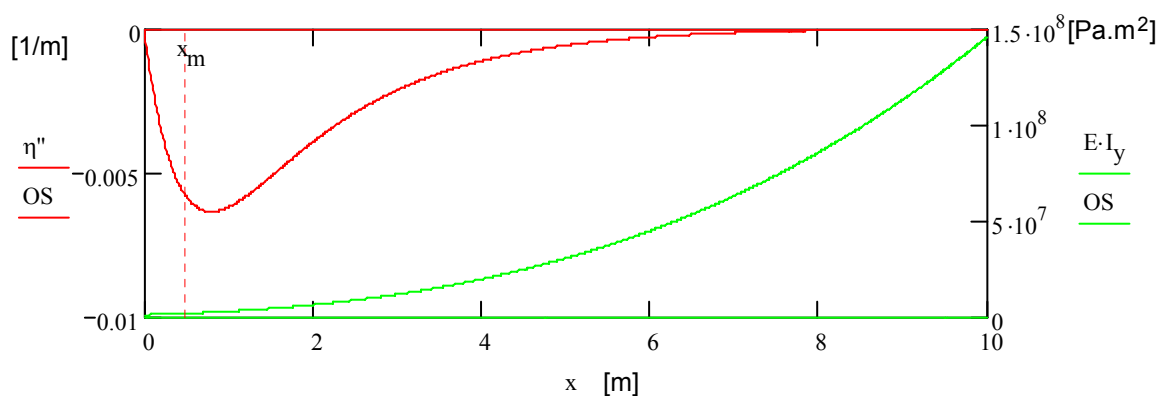
V prípade že je konštantný prierez aj osová sila, potom poloha rozhodujúceho prierezu bude v mieste, kde je maximálny moment a to je tam, kde je poloha maxima druhej derivácie vlastného tvaru vybočenia. V prípade posudzovania prúta s konštantným prierezom a osovou silou, a len s ohybovými momentmi teórie II. rádu vznikajúcimi pôsobením osových síl na imperfektnom (vo vlastnom tvare) prúte, bude táto metóda dávať pri namáhaní na úrovni návrhovej vzpernej odolnosti rovnaké a to 100% využitie ako aj metóda náhradného prúta používaná v Eurokódoch. Akonáhle je aspoň jeden priebeh nekonštantný, už nie je možné vopred presne vedieť polohu rozhodujúceho prierezu a je nutné použiť iteračný postup.

Tab. 5.1 Výsledky výpočtu

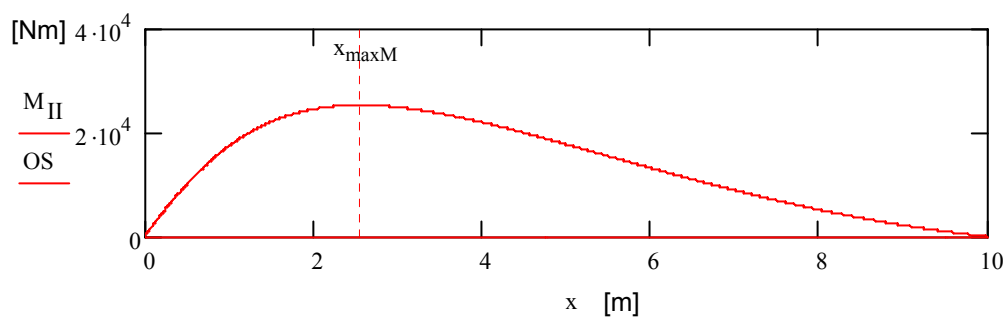
veličina	IQ100 + aproximácia	Diferenčná met.
Poloha $x_{\eta_{cr,max}}$ maximálnej poradnice vl. tvaru $\eta_{cr}(x)$	3,013 m	3,01 m
Koeficient rozdvojenia rovnováhy α_{cr}	2,5341	2,5341
Kritická sila $N_{cr,m}$ v rozhodujúcom reze x_m	1721 kN	1721 kN
Miera imperfekcie α_m	0,34	
Pomerná štíhlosť $\bar{\lambda}_m$; vzperný súčiniteľ χ_m náhradného prúta	0,835; 0,702	0,834; 0,703
Dĺžka náhradného prúta L_n	3,100 m	3,092 m
Amplitúda začiatočnej imperfekcie $e_{0,d}$ náhradného prúta	8,54 mm	8,5 mm
Amplitúda začiatočnej imperfekcie $\eta_{0,init}$ vyšetřovaného prúta	27,13 mm	27,3 mm
Amplitúda prídavnej def. η_0 (v grafe 5.1 η_{max})	17,69 mm	17,8 mm
Max. moment teórie II. rádu na vyšetřovanom prúte a jeho poloha x_{maxM}	25,11 kNm; 2,559 m	25,24 kNm; 2,56 m
Moment $M_{Ed,init,m}$ v rozhodujúcom reze x_m	9,58 kNm	9,55 kNm
Napätie od N ; od M v rozhodujúcom priereze	200,83 MPa 71,64 MPa	201,2 MPa; 71,7 MPa
Poloha max. napätia $x_{max\sigma M}$ na prúte od momentov $M_{Ed,init}(x)$	1,078m	1,08 m
Poloha max. napätia na prúte od osových síl $N_{Ed}(x)$	0 m	
Poloha rozhodujúceho rezu x_m	0,484 m	0,48 m
Maximálne využitie U (5.9) je v rozhodujúcom priereze x_m	0,768	0,77



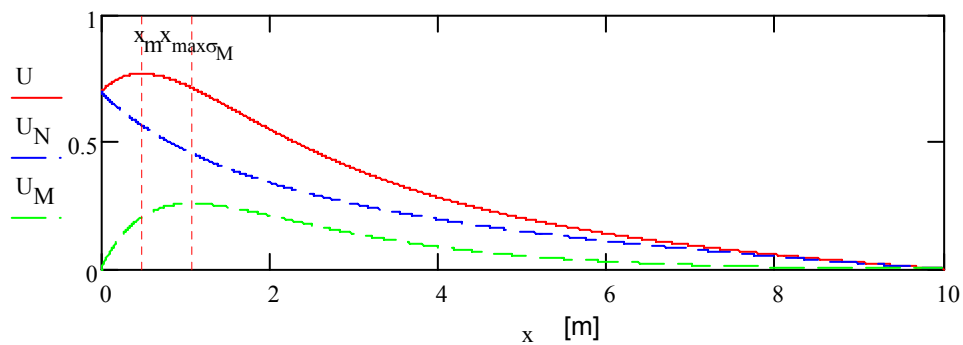
Graf 5.1 Začiatočná imperfekcia η_{init} ; prídavný priehyb η ; výsledný tvar prúta $w = \eta_{init} + \eta$



Graf 5.2 Druhá derivácia prídavného priehybu η'' ; priebeh ohybovej tuhosti prúta EI_y



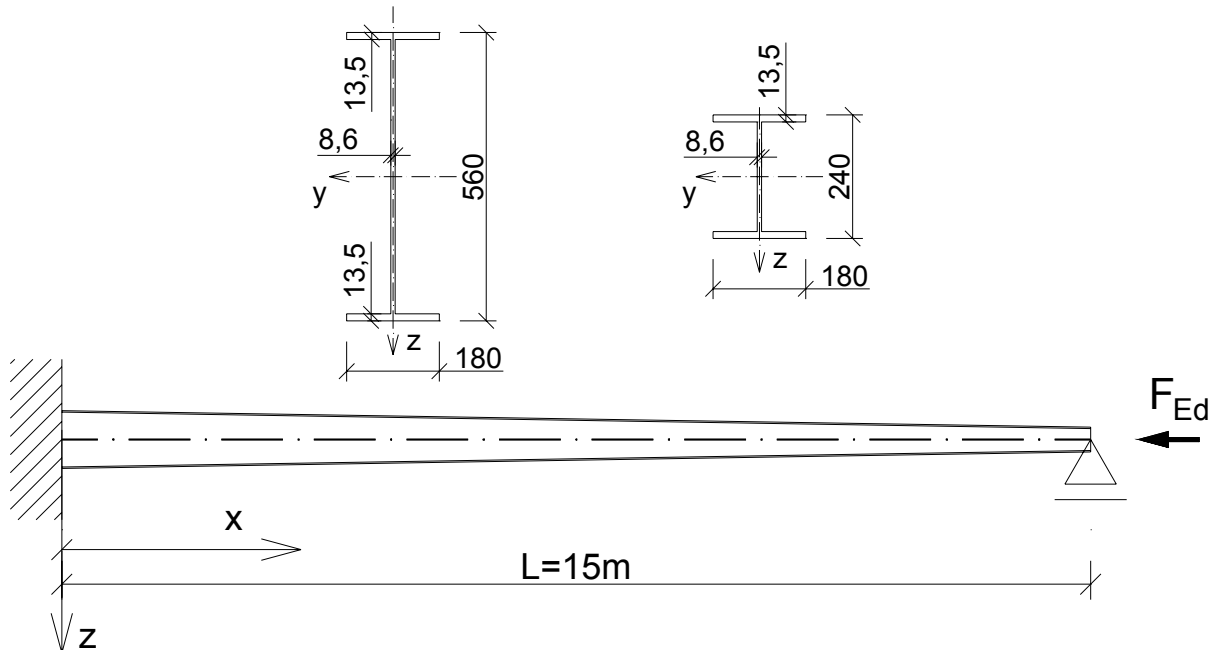
Graf 5.3 Priebeh momentov $M_{Ed,init}$ teórie II. rádu



Graf 5.4 Celkové využitie v jednotlivých rezoch U , využitie od osovej sily U_N , od momentu U_M

5.4.2 Príklad 2

Pre overenie správnosti riešenia bol prepočítaný príklad z 5.4 [15] prúta s premenným prierezom namáhaný konštantnou osovou silou o hodnote 1800kN. Tvar prúta a koncových prierezov je zobrazený na obr. 5.4, pričom výška prierezu sa lineárne mení od hodnoty 560mm po 240mm. Prút je vyrobený z ocele pevnostnej triedy S355 z profilu IPE 400 pozdĺžnym šikmým rezom a opačným zvarením. Vlastná tiaž prúta sa zanedbáva.



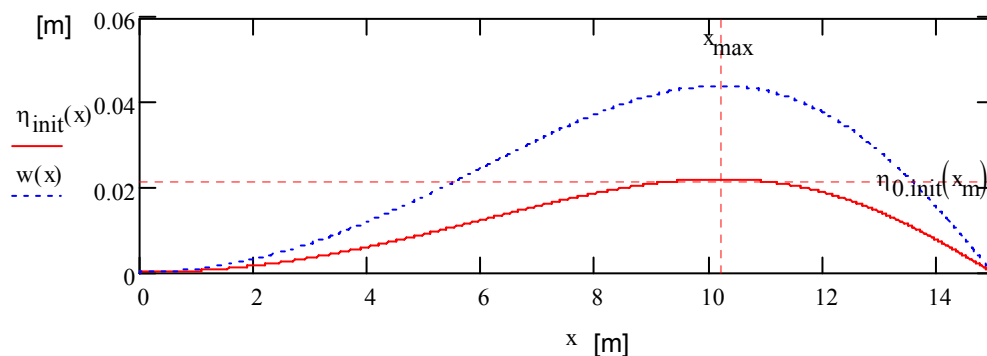
Obr. 5.4 Tvar prúta a koncových prierezov

Výpočet (uvedený v prílohe 7) je vykonaný:

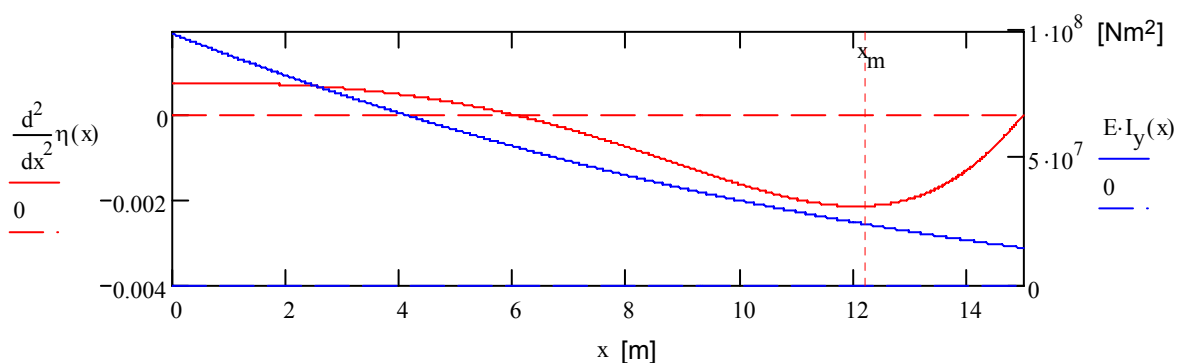
- za pomoci diferenciálnej metódy na výpočet vlastného tvaru a kritickej sily a na výpočet priebehov momentov teórie II. rádu v programe MathCAD, pričom dĺžka kroku bola zvolená na 1cm
- použitím programu IQ100, z ktorého bol exportovaný vlastný tvar v podobe hodnôt v 14 ekvidistantných bodoch, za pomoci ktorých bol aproximovaný polynómom 13. stupňa v programe MathCAD a ďalej bol upravovaný ako spojitá funkcia.

Výsledky sú zhrnuté v tab. 5.2. Na základe zhody tu vykonaných dvoch spôsobov výpočtu s výsledkami výpočtov v [15] sa overili tu uvádzané formulácie vzťahov, prebratých z [14], ktoré sa formálne líšia od vzťahov v [15]. Malý rozdiel sa vyskytol iba v prípade polohy rozhodujúceho prierezu, ktorá sa líšila o 7cm v porovnaní s výsledkami v [15]. Vzhľadom na to, že pri výpočte v [15] bol použitý program IQ100, ktorý ponúka veličiny vypočítané maximálne v 1/100 dĺžky prúta a tieto neboli medzi bodmi interpolované, sa to prejavilo v presnosti +/-7,5cm určenia polohy rozhodujúceho prierezu. Napriek tomu sa celkové využitie prúta takmer nelíšilo. Aby sa zvýšila presnosť, vo výpočte podľa b) sa vlastný tvar z programu IQ100 aproximoval polynómom.

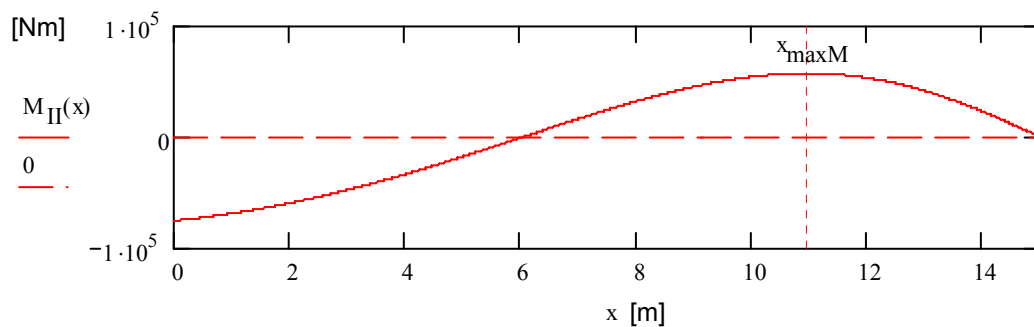
V oboch tu prezentovaných príkladoch je poloha rozhodujúceho prierezu medzi miestom maximálneho napätia od osových síl a miestom maximálneho napätia od momentov teórie II. rádu. Je možné to očakávať aj v iných prípadoch.



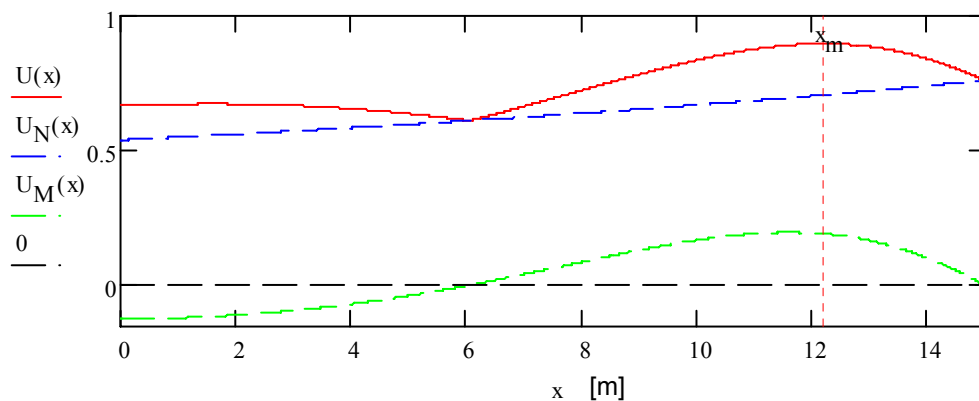
Graf 5.5 Začiatočná imperfekcia η_{init} ; výsledný tvar prúta $w(x) = \eta_{init}(x) + \eta(x)$



Graf 5.6 Druhá derivácia prídavného priehybu η'' ; priebeh ohybovej tuhosti prúta $EI(x)$



Graf 5.7 Priebeh momentov $M_{Ed,init}$ teórie II. rádu



Graf 5.8 Celkové využitie v jednotlivých rezoch U , využitie od osovej sily U_N , od momentu U_M

Tab. 5.2 Výsledky výpočtu

	Diferenčná metóda	Vlastný tvar z IQ100 aproximovaný	Výsledky z [15]
Koeficient rozdvojenia rovnováhy	2,00361	2,0036	2,001
Poloha maximálnej poradnice vl. tvaru	10,21m	10,212m	-
Poloha maximálneho kladného momentu	10,97m	10,972m	-
Poloha maximálneho napätia od M_{II}	11,61m	11,612m	-
Poloha rozhodujúceho prierezu x_m	12,22m	12,218m	12,15m
Poloha maximálneho napätia od N_{Ed}	15m		
Napätie od M_{II} v reze x_m	67,267MPa	67,267MPa	67,37MPa
Napätie od N_{Ed} v reze x_m	249,936MPa	249,923MPa	249,49Mpa
Celkové maximálne napätie v reze x_m	317,204MPa	317,191MPa	316,86MPa

Na grafe 5.5 je vynesená začiatočná imperfekcia $\eta_{init}(x)$ s amplitúdou v mieste x_{max} podľa (5.13) a výsledný tvar prúta $w(x) = \eta_{init}(x) + \eta(x)$ aj s prídavným priehybom v zmysle teórie II. rádu. Samotný prídavný priehyb $\eta(x)$ však nie je vynesovaný vzhľadom na to, že by sa prekrýval s priebehom začiatočnej imperfekcie, čo je spôsobené tým, že koeficient rozdvojenia rovnováhy je takmer rovný 2, kedy podľa (5.8) vyplýva, že prídavný priehyb je presne rovný začiatočnej imperfekcii. Na grafe 5.6 je znázornená druhá derivácia prídavného priehybu $\eta''(x)$ a priebeh ohybovej tuhosti prúta, ktorých prenasobením podľa (5.4) dostávame priebeh len ohybového momentu teórie II. rádu súvisiaceho s imperfekciou zobrazeného na grafe 5.7. Na grafe 5.8 je zobrazené využitie v jednotlivých prierezoch a to celkové U , ktoré je súčtom využitia iba od osových síl U_N a využitia od ohybových momentov U_M . V tomto príklade je rozhodujúci prierez v mieste kladných momentov.

Vo všeobecnosti pri prútoch, ktoré sú namáhané kladnými aj zápornými momentmi, je nutné overiť možnosť, že rozhodujúci prierez sa môže nachádzať v oblasti ako kladných momentov tak aj záporných momentov. V tomto príklade, keď sú najväčšie napätia od kladných momentov v mieste ($x=11,61m$), kde sú väčšie napätia od osových síl ako v mieste maximálnych záporných momentov ($x=0m$), je poloha rozhodujúceho prierezu evidentná. Ak by ale priebeh napätia od osových síl boli opačné (klesali by s rastúcim x), v tom prípade by bolo potrebné overiť obe polohy rozhodujúceho prierezu (v mieste kladných i záporných momentov), pretože by nebolo možné rozhodnúť vopred o polohe rozhodujúceho prierezu.

5.5 ZÁVER

V norme [11] je nesprávne označený prierez x_m ako prierez, v ktorom je maximálna druhá derivácia vlastného tvaru vybočenia. To by platilo, ak by bol prierez a osová sila konštantné. Ako je vidieť z grafu 5.2 alebo z grafu 5.6 prierez x_m je mimo tohto miesta. Preto aj absolútna hodnota v menovateli vzorca (5.6) [11] by mala mať index "m". Chyba zväčšuje menovateľ výrazu, a tým znižuje začiatočné imperfekcie, preto je na strane nebezpečnej.

Túto metódu analýzy teóriou II. rádu s imperfekciou podľa 5.3.2 (11) [11] v prípade hliníkových prútov alebo podľa NB.5.2 [13] v prípade oceľových prútov je možné použiť na posudzovanie prútov s nekonštantným prierezom a/alebo osovou silou alebo rámov zložených z takýchto prútov.

Avšak metódu je možné použiť aj v prípade prútov s konštantným prierezom a osovou silou alebo rámov z takýchto prútov zložených. Poloha rozhodujúceho prierezu je daná polohou maxima ľavej strany (5.9). V tomto prípade je teda poloha rozhodujúceho prierezu vzhľadom na konštantný priebeh napätí od osových síl daná polohou maximálnych napätí od momentov, ktoré vznikajú od osových síl na imperfektnom prúte v zmysle teórie II. rádu. Poloha maximálneho momentu a poloha maximálneho napätia od momentov je totožná. A vzhľadom na konštantnosť ohybovej tuhosti je maximálny moment v mieste maximálnej druhej derivácie prídavného priebyhu. Keďže imperfekcia je volená v tvare afínnom 1. vlastnému tvaru, je aj prídavný priebyh afínný vlastnému tvaru. Potom je poloha rozhodujúceho prierezu určená polohou maxima druhej derivácie funkcie vlastného tvaru vybočenia.

V prípade hliníkových prútov konštantného prierezu aj osovej sily je možné použiť imperfekciu podľa 5.3.2 (11) [11], pričom poloha rozhodujúceho prierezu je daná polohou maxima druhej derivácie vlastného tvaru vybočenia. Zjednodušenie spočíva v tom, že poloha rozhodujúceho prierezu je vopred známa a nie je preto nutné iterovať. V prípade oceľových prútov s konštantným prierezom namáhaným konštantnou osovou silou alebo rámov z nich zložených je možné použiť imperfekciu podľa 5.3.2 (11) [10]. V tomto článku je použitá zavádzajúca formulácia pri definícií $\alpha_{ult,k}$ ako “najmenšia hodnota násobiteľa konfigurácie osových síl N_{Ed} v prútoch, pomocou ktorého sa v priereze, v ktorom pôsobí najväčšie osovú napätie, dosiahne charakteristickú odolnosť N_{Rk} bez uváženia vzperu”. Avšak priebeh napätia od osových síl je konštantný.

Ak je nekonštantný prierez, pričom osová sila je konštantná alebo je nekonštantná osová sila, ale prút má konštantný prierez alebo sú nekonštantné aj prierez aj osová sila, je poloha rozhodujúceho prierezu vopred neznáma. Preto je nutné postupovať iteratívne. V prvej iterácii je potrebné odhadnúť polohu rozhodujúceho prierezu. Ešte pred prvou iteráciou je známy priebeh momentov teórie II. rádu, aj keď je neznáma jeho veľkosť, je možné presne určiť polohu maxima napätí od momentov teórie II. rádu. Známy je aj priebeh aj veľkosť napätí od osových síl. Polohu rozhodujúceho prierezu v prvej iterácii je teda vhodné voliť medzi polohou maximálneho napätia od osových síl a polohou maximálneho napätia od momentov teórie II. rádu. Zníži sa tým počet potrebných iterácií. Inak povedané, poloha rozhodujúceho prierezu sa bude nachádzať od polohy maximálneho napätia od momentov v smere zväčšujúceho sa napätia od osových síl. Táto tendencia sa overila v prípade oboch uvedených príkladov (pozri tab. 5.1 a 5.2). Podrobnosti výpočtov sú uvedené v prílohe 7.

Vzhľadom na možnosť posudzovania aj rámov pozostávajúcich z prútov s konštantným prierezom namáhaných konštantnou osovou silou touto metódou sú pre porovnanie výsledkov v nasledujúcej kapitole uvedené ostatné metódy posudzovania podľa [10].

6. POSUDZOVANIE VZPERNEJ ODOLNOSTI RÁMOV PODĽA METÓD Z STN EN 1993-1-1 [10]

6.1 GLOBÁLNA ANALÝZA PODĽA [10]

Norma [10] používa (ako aj ostatné Eurokódy) všeobecný termín *analýza konštrukcie*. Tu sa bude uvažovať s užším významom tohto pojmu ako statického výpočtu (výpočet vnútorných síl). Vnútorné sily sa vo všeobecnosti môžu určiť buď analýzou na základe teórie I. rádu alebo na základe teórie II. rádu s uvážením vplyvu pretvorenia konštrukcie. Pričom rozdiel medzi vnútornými silami určenými na základe teórie I. rádu a silami určenými na základe teórie II. rádu sa považuje za vplyv teórie II. rádu. Účinky pretvorenia konštrukcie (vplyv teórie II. rádu) na rozloženie vnútorných síl konštrukcie sa majú zohľadniť vtedy, ak podstatne zväčšujú účinky zaťaženia alebo ak podstatne menia správanie konštrukcie.

Analýza na základe teórie I. rádu sa môže použiť vtedy, ak sa môže zanedbať zväčšenie vnútorných síl alebo iné zmeny správania konštrukcie spôsobené pretvoreniami. Pre pružnostnú analýzu to je vtedy, ak platí:

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} \geq 10, \quad (6.1)$$

kde: α_{cr} je faktor, ktorým by návrhové zaťaženia museli byť zväčšené, aby spôsobili stratu stability v pružnom stave s globálnym vlastným tvarom (inak označovaný ako koeficient rozdvojenia rovnováhy);

F_{Ed} je návrhové zaťaženie konštrukcie;

F_{cr} je kritické zaťaženie v pružnom stave pre stratu stability s globálnym vlastným tvarom, vypočítané pre začiatočné tuhosti.

Pri portálových rámoch s miernymi sklonmi striech a rovinných prútovej konštrukciách budov tvorených nosníkmi a stĺpmi je prípustné posúdiť možnosť porušenia naklonením stĺpov pomocou analýzy prvého rádu vtedy, ak kritérium (6.1) je splnené pre každé podlažie. V takýchto konštrukciách sa môže vypočítať koeficient rozdvojenia rovnováhy za predpokladu, že tlakové osovú sily v nosníkoch alebo priečľach nie sú významné z približného vzorca:

$$\alpha_{cr} = \left(\frac{H_{Ed}}{V_{Ed}} \right) \left(\frac{h}{\delta_{H,Ed}} \right), \quad (6.2)$$

kde: H_{Ed} je návrhová hodnota vodorovnej reakcie v dolnej úrovni podlažia od vodorovných zaťažení a fiktívnych vodorovných zaťažení;

V_{Ed} celkové návrhové zvislé zaťaženie konštrukcie v dolnej úrovni podlažia;

$\delta_{H,Ed}$ relatívne vodorovné posunutie v hornej úrovni podlažia vzťahnuté na dolnú úroveň podlažia, pri zaťažení prútovej konštrukcie vodorovnými zaťažzeniami (napr. vetrom) a fiktívnymi vodorovnými zaťažzeniami, pôsobiacimi v úrovni každej podlahy;

h výška podlažia.

Ak konštrukcia a jej návrhové zaťaženie nespĺňajú kritérium (6.1), potom sa musí vplyv pretvorenia konštrukcie na veľkosť a rozdelenie vnútorných síl zohľadniť. Pri posudzovaní vzpernej odolnosti ponúka norma viacero prístupov podľa druhu prútovej konštrukcie a globálnej analýzy. Účinky teórie II. rádu a imperfekcií sa môžu stanoviť pomocou jednej z nasledujúcich metód:

a) obidva účinky kompletne pomocou globálnej analýzy,

- b) čiastočne pomocou globálnej analýzy a čiastočne prostredníctvom individuálneho posudzovania prútov podľa 6.3 [10],
- c) pre základné prípady pomocou individuálnych posúdení náhradných prútov podľa 6.3 [10], použitím príslušných vzperných dĺžok zodpovedajúcich globálnemu vlastnému tvaru straty stability konštrukcie.

V jednopodlažných prútových konštrukciách navrhovaných na základe pružnostnej globálnej analýzy je možné účinky teórie II. rádu od naklonenia stĺpov spôsobeného zvislým zaťažením zohľadniť zväčšením vodorovného zaťaženia H_{Ed} (napr. od vetra), ekvivalentného zaťaženia od imperfekcií $V_{Ed}\phi$ a prípadných ďalších možných účinkov od naklonenia stĺpov vypočítaných podľa teórie I. rádu pomocou faktora:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr}}} \quad (6.3)$$

za predpokladu, že $\alpha_{cr} \geq 3,0$.

Faktor (6.3) má rovnakú hodnotu ako známy pomer medzi ohybovými momentmi vypočítanými pomocou teórie II. rádu a momentmi vypočítanými pomocou teórie I. rádu, ktorý presne platí iba ak platí (5.5) a (5.8).

6.2 IMPERFEKCIE PODĽA [10]

Ak sa má podľa čl. 5.2.1 [10] uvážiť vplyv pretvorenia konštrukcie (ak neplatí (6.1) pri pružnostnej analýze), tak stabilita prútových konštrukcií alebo ich častí sa má overiť s uvážením imperfekcií a účinkov teórie II. rádu. Pod imperfekciami sa rozumejú zvyškové (reziduálne) napätia (po výrobe prvkov) a geometrické imperfekcie napr. odchýlky od zvislosti, priamosti, rovinnosti, nedostatočné lícovanie a akékoľvek malé excentricity, ktoré sa vyskytujú v spojoch nezaťaženej konštrukcie.

Majú sa uvážiť nasledujúce imperfekcie:

- a) globálne imperfekcie prútových konštrukcií a globálne imperfekcie stužujúcich systémov
- b) lokálne imperfekcie individuálnych prútov

Pri prútových konštrukciách citlivých na stratu stability naklonením stĺpov sa má účinok imperfekcií v analýze prútovej konštrukcii zohľadniť ekvivalentnou imperfekciou v tvare začiatočného naklonenia stĺpov a individuálnych začiatočných zakrivení prútov podľa 5.3.2 [10].

a) Začiatočné globálne naklonenie stĺpov

Začiatočné globálne naklonenie stĺpov sa určuje z výrazu:

$$\phi = \phi_0 \alpha_h \alpha_m, \quad (6.4)$$

kde: ϕ_0 je základná hodnota naklonenia stĺpov: $\phi_0 = 1/200$;

α_h znižovací faktor pre výšku h , ktorý sa používa pri stĺpoch:

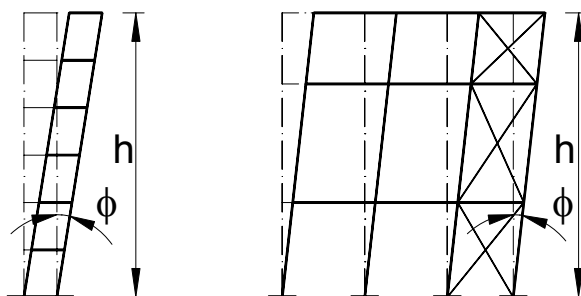
$$\alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h}} \text{ ale } \frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1,0; \quad (6.5)$$

h výška konštrukcie v metroch;

α_m zmenšovaci faktor zohľadňujúci počet stĺpov v rade:

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m} \right)}; \quad (6.6)$$

m počet stĺpov v rade, do ktorého sa započítavajú iba tie stĺpy, ktorých zvislé zaťaženie N_{Ed} nie je menšie ako 50% priemerného zaťaženia stĺpov v uvažovanej zvislej rovine.



Obr. 6.1 Ekvivalentné imperfekcie v tvare naklonenia stĺpov

b) Začiatkové lokálne zakrivenie prútov

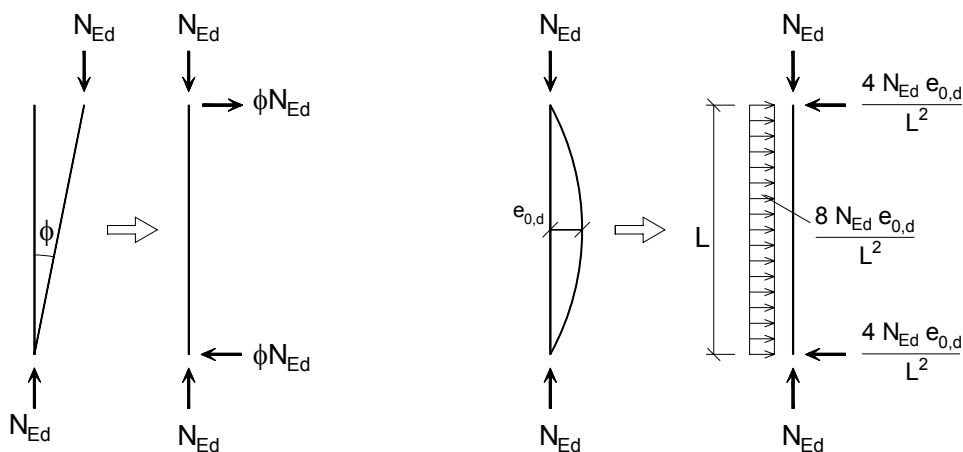
Pri strate stability stĺpov ohybom v rovine sa za lokálne začiatkové zakrivenie prúta berie pomerná imperfekcia:

$$e_{0,d}/L, \quad (6.7)$$

kde L je dĺžka prúta.

Hodnoty pomeru (6.7) sú uvedené v tab. 5.1 [10] a pohybujú sa v rozmedzí $1/350 \sim 1/150$ pri pružnostnej analýze v závislosti od príslušnosti prierezu ku vzpernej krivke $a_0 \sim d$. Tieto začiatkové lokálne imperfekcie nie je vhodné používať na overovanie vzpernej odolnosti individuálnych prútov. Pretože ako je uvedené v 5.2 b) [15] vedú na príliš konzervatívne výsledky.

Účinky začiatkového naklonenia stĺpov a imperfekcii v tvare lokálnych začiatkových zakrivení je možné nahradiť sústavou ekvivalentných vodorovných síl, ktoré sa zavedú do každého stĺpa neimperfektnej konštrukcie podľa nasledovného obrázka (Obr. 5.4 [10]):



Obr. 6.2 Náhrada začiatkových imperfekcií ekvivalentnými vodorovnými silami

Okrem imperfekcií v 5.3.2 (3) [10] je možné vzhľadom na 5.3.2 (1) [10] odvodiť tvar globálnych a lokálnych imperfekcií od vlastného tvaru konštrukcie v pružnom tvare tak ako to bolo použité v metóde v 5.2. Vzhľadom na to, že nie sú k dispozícii štatisticky spracované hodnoty amplitúd takto zvolených imperfekcií, je v tomto prípade nutné použiť imperfekcie náhradných prútov, pre ktoré boli odvodené súčinitele vzperu používané v Eurokódoch. V 5.2 sú uvedené preto nutné úpravy.

6.3 METÓDY POSUDZOVANIA VZPERNEJ ODOLNOSTI PODEĽA [10]

Tu spomínané metódy sa budú aplikovať na posúdenia vzpernej odolnosti rovinných rámov a bude sa overovať vzperná odolnosť v rovine rámu, ktorá je aj rovinou zaťaženia. Vzperná odolnosť v rovine rámov a kolmo na rovinu rámov sa bude posudzovať separátne za predpokladu, že rám je v rovine kolmej na vyšetrovanú rovinu zabezpečený, ak nebude uvedené inak.

6.3.1 Globálna analýza na základe teórie II. rádu a posúdenie prierezov

Ide o najvyšší stupeň globálnej analýzy, ktorý spadá pod 5.2.2 (3) a) [10]. Konštrukcia v priestore sa má modelovať so všetkými imperfekciami v rovine, z roviny a imperfekciami pre klopenie. Na základe vnútorných síl vypočítaných analýzou II. rádu so zohľadnením všetkých imperfekcií sa konštrukcia iba v najviac namáhanom priereze posúdi. Vzhľadom na zložitosť modelovania konštrukcií týmto spôsobom a iba pre potreby porovnávacieho výpočtu je zohľadnený zjednodušujúci predpoklad, že konštrukcia bude v rovine kolmej na rovinu rámu (rovinu zaťaženia) dostatočne podopretá tak, aby vzper mohol nastať iba rovinne a to v hlavnej rovine rámu. Potom postačuje rám modelovať samostatne s imperfekciami iba v hlavnej rovine.

Imperfekcie sa majú brať v tvare začiatočných naklonení stĺpov a začiatočných zakrivení prútov podľa 5.3.2 (3) [10] alebo v zmysle 5.3.2 (7) [10] tieto nahradiť ekvivalentnými vodorovnými silami (obr. 6.2). Overenie vzpernej odolnosti rámu v rovine spočíva v posúdení najviac namáhaného prierezu podľa 6.2 [10] s vnútornými silami získanými na základe analýzy teóriou II. rádu rámu so zohľadnením globálnych a lokálnych imperfekcií v rovine rámu.

6.3.2 Globálna analýza na základe teórie II. rádu a posúdenie prútov vyrezaných z konštrukcie

V tejto metóde podľa 5.2.2 (3) b) [10] sa prút vyreže z konštrukcie, pričom spojitosť s konštrukciou sa zabezpečí koncovými vnútornými silami, ktoré na vyrezaný prút pôsobia ako vonkajšie sily. Prút sa potom posúdi pomocou interakčných vzorcov v 6.3 [10] a to (6.61) a (6.62), ktoré sú založené na modeli jednoducho podopretého jednopoločného prúta s konštantným prierezom, kĺbovo podopretého v oboch rovinách ohybu i v krútení, ktorý je alebo nie je spojitý podopretý proti vybočeniu, a ktorý je namáhaný osovými silami, koncovými momentmi, resp. priečnym zaťažením. Nekonštantné priebehy ohybových momentov v dvoch hlavných rovinách prierezu sa zohľadňujú faktormi ekvivalentných konštantných momentov a interakčnými faktormi v tabuľkách B.1~B.3 [10]. Koncové momenty sa získajú na základe analýzy teóriou II. rádu so zohľadnením globálnych imperfekcií v tvare začiatočného naklonenia stĺpov podľa 5.3.2 (3) [10]. V zmysle 5.3.2 (6) [10] pri prútových konštrukciách citlivých na účinky II. rádu sa okrem globálnych

začiatočných naklonení stĺpov majú v analýze prútovej konštrukcie uvážiť aj lokálne začiatočné zakrivenia prútov pri každom tlačennom prúte, pri ktorom sú splnené podmienky:

- aspoň jeden uzol na jednom konci prúta je odolný proti ohybovému momentu;

$$\bar{\lambda} > 0,5 \sqrt{\frac{Af_y}{N_{Ed}}}, \quad (6.8)$$

kde: N_{Ed} je návrhová hodnota tlakovej sily;

$\bar{\lambda}$ pomerná štíhlosť pre stratu stability ohybom v rovine určená pre prút, ktorý sa považuje za klbovo uložený na obidvoch koncoch.

Vzhľadom na to, že stabilitné javy pri posune uzlov rámu sú zahrnuté v koncových momentoch vypočítaných analýzou II. rádu, sa v tejto metóde pri výpočte súčiniteľov vzperu v interakčných vzorcoch (6.61) a (6.62) [10] považuje za vzpernú dĺžku systémová dĺžka prúta.

6.3.3 Globálna analýza na základe teórie I. rádu a posúdenie náhradného prúta

Ide o najnižší stupeň analýzy podľa 5.2.2 (3) c) [10], avšak v súčasnosti je táto metóda najviac používaná. Je použiteľná pre základné prípady pričom sa individuálne posudzujú náhradné prúty podľa 6.3 [10] použitím príslušných vzperných dĺžok zodpovedajúcich globálnemu vlastnému tvaru straty stability konštrukcie. Náhradným prútom sa tu uvažuje prút, ktorý má prierez a osovú silu totožnú s vyšetrovaným prútom, je proste uložený a jeho kritická sila je totožná s kritickou silou vyšetrovaného prúta pri globálnej strate stability konštrukcie. Z podmienky rovnosti kritických síl vyplýva dĺžka náhradného prúta, ktorá je zároveň vzpernou dĺžkou vyšetrovaného prúta.

6.3.4 Všeobecná metóda pre stratu stability konštrukčných prvkov ohybom z roviny alebo stratu stability klopením

Metóda umožňuje overenie odolnosti proti strate stability ohybom z roviny a strate stability klopením. Celková odolnosť proti strate stability pretvorením z roviny sa overí splnením:

$$\frac{\chi_{op} \alpha_{ult,k}}{\gamma_{M1}} \geq 1, \quad (6.9)$$

kde: $\alpha_{ult,k}$ je najmenšia hodnota zväčšovacieho faktora, ktorého prenasobením návrhové zaťaženie dosiahne charakteristickú odolnosť rozhodujúceho prierezu konštrukčného prvku pri zohľadnení pôsobenia prvku v rovine zaťaženia, bez zohľadnenia straty stability ohybom z roviny a straty stability klopením, avšak so zohľadnením všetkých účinkov spôsobených príslušnými globálnymi a lokálnymi pretvoreniami a imperfekciami v rovine zaťaženia;

χ_{op} súčiniteľ vzperu z roviny pre pomernú štíhlosť $\bar{\lambda}_{op}$, ktorý zohľadňuje stratu stability ohybom z roviny a stratu stability klopením.

Globálna pomerná štíhlosť $\bar{\lambda}_{op}$ konštrukčného prvku sa má určiť zo vzorca:

$$\bar{\lambda}_{op} = \sqrt{\frac{\alpha_{ult,k}}{\alpha_{cr,op}}}, \quad (6.10)$$

kde: $\alpha_{cr,op}$ je najmenšia hodnota zväčšovacieho faktora, ktorého prenasobením návrhové zaťaženie v rovine dosiahne hodnotu kritického zaťaženia konštrukčného prvku v pružnom stave, ktoré zodpovedá strate stability ohybom z roviny alebo strate stability klopením, so stratou stability ohybom v rovine zaťaženia sa neráta.

Súčiniteľ vzperu z roviny χ_{op} sa môže určiť ako menšia z hodnôt:

- a) χ pre stratu stability ohybom z roviny podľa 6.3.1 [10]
- b) χ_{LT} pre stratu stability klopením podľa 6.3.2 [10]

Ak sa $\alpha_{ult,k}$ určí z posúdenia rozhodujúceho prierezu:

$$\frac{1}{\alpha_{ult,k}} = \frac{N_{Ed}}{N_{Rk}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rk}}, \quad (6.11)$$

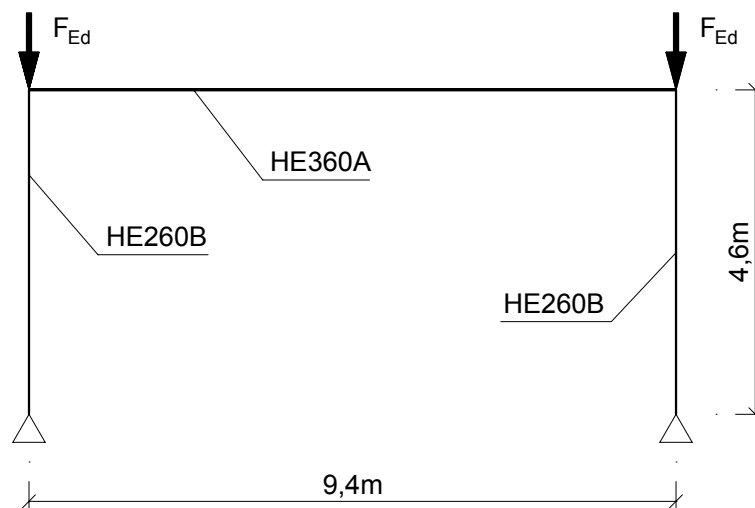
potom metóda vedie k posúdeniu:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{Rk}/\gamma_{M1}} + \frac{M_{y,Ed}}{M_{y,Rk}/\gamma_{M1}} \leq \chi_{op}. \quad (6.12)$$

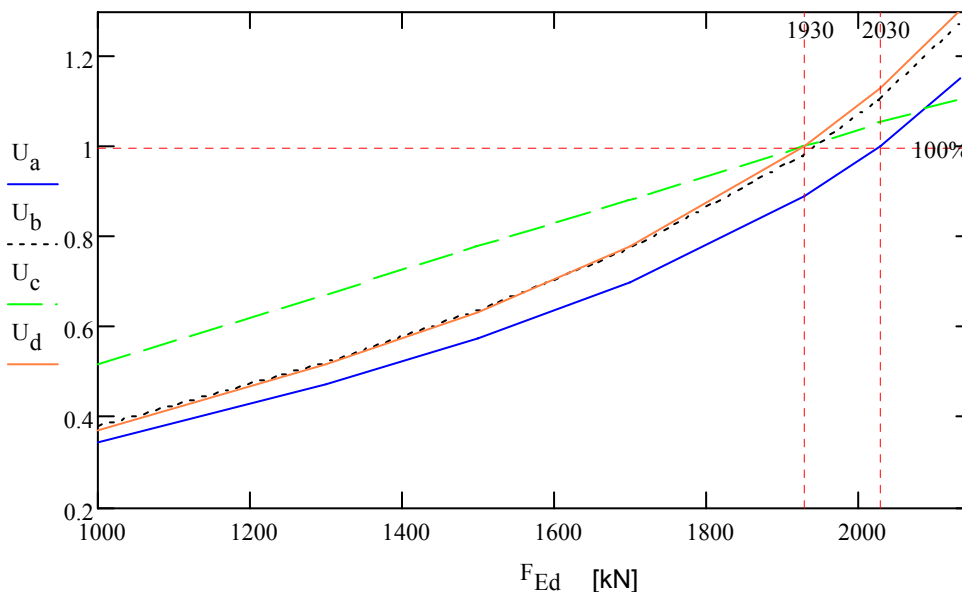
Ak by sme uvážili okrajový prípad, keď bude vyšetrovaný prút sústavy zabezpečený spojite proti vybočeniu z roviny sústavy, potom $\chi_{op} = 1$ a táto metóda vedie na metódu analýzy teóriou II. rádu s imperfekciami a posúdenia prierezov (konceptia podľa 5.2.2 (3) a) [10]).

6.3.5 Porovnávací výpočet posúdení rámu v rovine podľa metód v [10]

Tu je pre porovnanie jednoduchý rám zaťažený v rovine, posúdený všetkými metódami nachádzajúcimi sa v [10] určenými na posudzovanie stability v rovine rámu. Dvojkĺbový rám s prierezmi vyznačenými na obr. 6.3 je zaťažený rovnakými silami pôsobiacimi v osiach stĺpov, pričom ich hodnota bola premennou.



Obr. 6.3 Statická schéma rámu pre porovnávací výpočet



Graf 6.1 Porovnanie využitia rámu z obr. 6.3 podľa metód z [10]

Na grafe 6.1 značí:

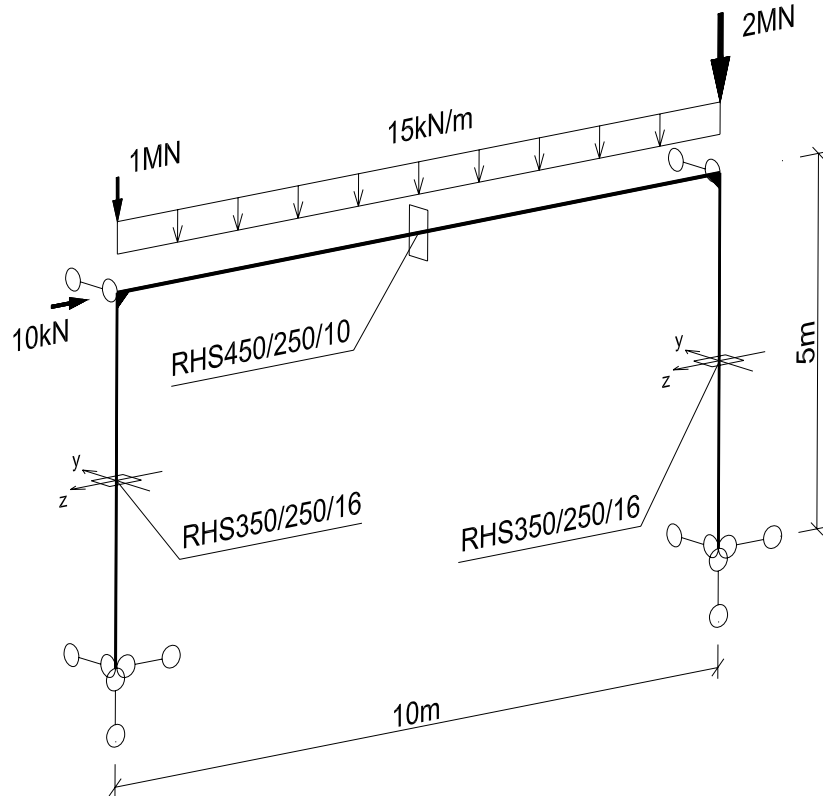
- U_a využitie podľa globálnej analýzy teórie II. rádu s globálnymi a lokálnymi imperfekciami (nahradenými s ekvivalentnými vodorovnými silami), metóda 6.3.1 (konceptia podľa 5.2.2 (3) a) [10]);
- U_b využitie podľa globálnej analýzy teórie II. rádu a posúdenia vyrezaného prúta, metóda 6.3.2 (konceptia podľa 5.2.2 (3) b) [10]);
- U_c využitie podľa analýzy teórie I. rádu a posúdenie náhradného prúta, metóda 6.3.3 (konceptia podľa 5.2.2 (3) c) [10]);
- U_d využitie podľa globálnej analýzy teórie II. rádu s imperfekciou v tvare vlastného tvaru vybočenia v pružnom stave, metóda podľa 5.2 (konceptia podľa 5.2.2 (3) a) [10] s imperfekciou podľa 5.3.2 (11) [10]);

Všimnime si, že krivky U_c a U_d (metóda náhradného prúta a metóda s imperfekciou vo vlastnom tvare) sa pretínajú pri úrovni 100% využitia. Ide o dôsledok podmienky, z ktorej sa pri metóde s imperfekciou vo vlastnom tvare rámu určuje amplitúda takejto imperfekcie. Ide o podmienku rovnakej vzpernej odolnosti vyšetřovaného prúta rámu a jeho náhradného prúta (ten, ktorý sa posudzuje v metóde 5.2.2 (3) c)), teda podmienka rovnakého momentu teórie II. rádu na náhradnom prúte (v strede vzpernej dĺžky) a momentu v rozhodujúcom priereze rámu teórie II. rádu od imperfekcie podľa 5.3.2 (11) [10].

Globálna analýza na základe teórie II. rádu s imperfekciami v tvare začiatočných naklonení stĺpov a začiatočných zakrivení je v tomto príklade najhospodárnejšou z metód. Metóda na základe analýzy teórie II. rádu s posúdením vyrezaného prúta sa blíži k metóde s imperfekciou v tvare vlastného tvaru.

6.3.6 Porovnávací výpočet posúdení stability v rovine a z roviny rámu podľa metód v [10]

Tu je pre porovnanie rovinný rám zobrazený na obr. 6.4 zaťažený v rovine, posúdený na vzper v rovine aj z roviny rámu všetkými metódami nachádzajúcimi sa v [10]. Výpočet je podrobne rozpracovaný v prílohe 8.



Obr. 6.4 Statická schéma rámu 2

Tab. 6.1 Výsledky výpočtu

P. č.	Metóda posúdenia	Analýza konštrukcie	
		v rovine rámu	z roviny rámu
1	Globálna analýza teórie II. rádu podľa 5.2.2 (3) a) s imperfekciami podľa 5.3.2 (3) a posúdenie priereзов	63,2%	
2	Globálna analýza teórie II. rádu podľa 5.2.2 (3) b) s imperfekciami podľa 5.3.2 (3) a posúdenie vyrezaného prúta podľa 6.3 s koncovými momentmi z globálnej analýzy	65,9%	62,2%
3	Globálna analýza teórie I. s odhadom vplyvu teórie II rádu podľa 5.2.1 (4)B a 5.2.2 (5)B a posúdenie priereзов	61,9%	
4	Globálna analýza teórie I. podľa 5.2.2 (3) c) a posúdenie náhradného prúta podľa 6.3	78,0%	
5	Globálna analýza teórie II. rádu podľa 5.2.2 (3) a) s imperfekciou v tvare vlastného tvaru vybočenia rámu podľa 5.3.2 (11) a posúdenie priereзов	61,9%	
6	Všeobecná metóda pre stratu stability prvkov ohybom z roviny podľa 6.3.4		67,8%

Rám je na obr. 6.4 zobrazený v axonometrii aj s bočným podopretím stĺpov, ktoré musia byť známe, ak chceme posúdiť stabilitu z roviny rámu. Torzne tuhé profily stĺpov sú volené z titulu, aby pri vybočení stĺpa z roviny rámu nerozhodovalo klopenie ale iba rovinné vybočenie.

Pri analýze na základe teórie II. rádu s koncepciou podľa 5.2.2 (3) a) [10] iba v rovine rámu s imperfekciami podľa 5.3.2 (3) [10] sa tieto imperfekcie nahradili na základe 5.3.2 (7) [10] sústavou ekvivalentných vodorovných síl v zmysle obr. 6.2. Vzhľadom na ekvivalentné spojité zaťaženie (nahradzajúce lokálnu imperfekciu z tab. 5.1 [10]) pôsobiace na stĺp sa rozhodujúci prierez s najväčším využitím nachádzal tesne pod rámovým styčnikom a nie priamo v ňom, ako by sa mohlo očakávať.

Z tohto rezu boli ohybové momenty použité pri posudzovaní metódou s koncepciou podľa 5.2.2 (b) [10] (analýza teóriou II. rádu s imperfekciami a posúdenie vyrezaného prúta) pri posudzovaní vyrezaného prúta s interakčným vzorcom (6.61) [10]. Stabilitné účinky pri posune uzlov rámu sú zohľadnené zahrnutím imperfekcií v tvare začiatočného naklonenia stĺpov (sú preto zahrnuté v ohybových momentoch), preto sa pri výpočte súčiniteľov vzperu v interakčných vzorcoch berie za vzpernú dĺžku systémová dĺžka stĺpa. Na základe 2,7% rozdielu vo využitíach podľa prvých dvoch metód (pozri tab. 6.1) je možné usúdiť na dobré vystihnutie tohto účinku. Vzperná odolnosť z roviny rámu v tejto koncepcii sa overí splnením interakčného vzorca (6.62), v ktorom súčiniteľ vzperu z roviny bol totožný so systémovou dĺžkou stĺpa na základe okrajových podmienok v rovine kolmej na rám znázornených na obr. 6.4. Ohybové momenty sú tiež určené z prvej metódy z miesta s maximálnym využitím.

Tretou metódou z tab. 6.1 je analýza teóriou I. rádu pričom sa odhadol vplyv teórie II rádu prenasobením vodorovných zaťažení a ekvivalentného zaťaženia od imperfekcií v tvare začiatočných naklonení stĺpov faktorom (6.3). Koeficient rozdvojenia rovnováhy α_{cr} je odhadnutý podľa (6.2). V odhade (6.2) je H_{Ed} normou definovaná ako návrhová hodnota vodorovnej reakcie v dolnej úrovni podlažia od vodorovných zaťažení a fiktívnych vodorovných zaťažení, pričom nie je bližšie špecifikované, či ide o fiktívne zaťaženia ekvivalentné iba začiatočným nakloneniam, alebo aj začiatočným zakriveniam stĺpov. Preto v prílohe 8 je tento odhad vypočítaný pre oba prípady. Na základe dobrej zhody medzi presnou hodnotou koeficientu rozdvojenia rovnováhy a hodnotou podľa odhadu (6.2) vtedy, ak sa zohľadnili iba zaťaženia ekvivalentné začiatočným nakloneniam v H_{Ed} možno usúdiť, že sa nemá zohľadňovať zaťaženie ekvivalentné začiatočnému zakriveniu stĺpov pri výpočte hodnoty $\delta_{H,Ed}$ a v H_{Ed} . Bola dosiahnutá pomerne dobrá zhoda medzi momentmi určenými v prvej metóde a momentmi určenými na základe odhadu vplyvu teórie II. rádu. Rozdiel bol v polohe maximálnych momentov, keďže v odhade tie vyšli v rámovom styčniku. Treba podotknúť, že odhad vplyvu teórie II. rádu na základe zväčšenia vodorovných nesymetricky pôsobiacich zaťažení je možné vykonať iba v prípadoch kedy $\alpha_{cr} > 3$. To už pre v danom príklade $\alpha_{cr} = 2,48$ nebolo splnené, čo môže byť dôvodom, prečo je využitie v tejto metóde o 1,3% nižšie ako v prvej metóde analýzy teóriou II. rádu a imperfekciami.

Najväčšie využitie podľa očakávania vychádza v metóde na základe analýzy teóriou I. rádu a posúdenia náhradného prúta. Z kritickej sily stĺpa pri globálnej strate stability rámu v rovine vychádza vzperná dĺžka o niečo väčšia ako dvojnásobok výšky stĺpa. Faktor ekvivalentného konštantného momentu sa má brať pri strate stability naklonením stĺpov (ktorá rozhoduje v tomto príklade s posuvnými styčnikami) hodnotou 0,9. Vzperná odolnosť v rovine rámu bola overená splnením podmienky (6.61)

Poslednou metódou posúdenia stability rámu v rovine je v kapitole 5.2 prezentovaná metóda s imperfekciou v tvare vlastného tvaru vybočenia rámu v pružnom stave. Ide o koncepciu 5.2.2 (3) a) [10] s imperfekciou vzhľadom na konštantný prierez aj osoú silu rozhodujúceho stĺpa podľa 5.3.2 (11) [10]. Vlastný tvar bol exportovaný z programu IQ100 a

bol v programe MathCAD aproximovaný polynómom 13. stupňa. Určila sa poloha jej maximálnej druhej derivácie. Vzhľadom na konštantný prierez a osovú silu je poloha rozhodujúceho prierezu x_m v mieste maximálnych momentov. A tie sú vzhľadom na (5.6) a (5.4) v mieste maximálnej druhej derivácie vlastného tvaru. Od x_m závisí hodnota amplitúdy imperfekcie (vo vlastnom tvare) nachádzajúca sa v tomto prípade v rámovom styčníku. Po výpočte momentov v zmysle teórie II. rádu a pripočítaní momentov od vonkajších zaťažení sa overila vzperná odolnosť rámu splnením podmienky (5.23).

Na posúdenie vzpernej odolnosti z roviny rámu bola použitá aj všeobecná metóda podľa 6.3.4 [10]. Vzhľadom na to, že v prípade bol stĺp s torzne tuhým profilom, sa súčiniteľ vzperu z roviny χ_{op} určil iba pre rovinnú stratu stability z roviny rámu. Vzhľadom na okrajové podmienky z roviny naznačené na obr. 6.4 je v tom prípade vzperná dĺžka stĺpa pre stratu stability z roviny rovná výške stĺpa.

Na základe výsledkov v tab. 6.1 možno skonštatovať, že v tomto prípade využitia v jednotlivých metódach boli približne rovnaké, pričom metóda náhradného prúta bola v porovnaní s ostatnými metódami na konzervatívnej strane. Avšak v prípade zaťaženia, ktoré by bolo na úrovni vzpernej odolnosti rámu, potom by metóda náhradného prúta nebola až tak konzervatívna v porovnaní s ostatnými metódami ako v uvedenom prípade. Ak vylúčime metódu s odhadom vplyvu teórie II. rádu, pretože v prípade tej nebola splnená podmienka použiteľnosti, tak práve metóda podľa kapitoly 5.2 bola najúspornejšou.

6.4 ZÁVER

Posledná kapitola bola zahrnutá z dôvodu posúdenia metódy opísanej v kapitole 5.2 z hľadiska postupu pri posudzovaní rovinných rámových konštrukcií. Z toho dôvodu bol vypočítaný rám z obr.6.3, ktorý bol vypočítaný pre viacero hodnôt zaťažení a bol zostrojený graf využitia na základe všetkých metód posudzovania vzpernej odolnosti v rovine rámových konštrukcií. Ďalej bol posúdený rám s čo možno najvšeobecnejším zaťažením v rovine, aby sa prejavili vlastnosti jednotlivých metód posudzovania vzpernej odolnosti, v tomto prípade v rovine aj z roviny rámu.

Metóda podľa kapitoly 5.2 má viacero výhod. Jedna z nich je, že imperfekcia v tvare vlastného tvaru sa používa bez ohľadu na to, či sa posudzuje stĺp v dolnom alebo hornom podlaží. V porovnaní s metódou analýzy teóriou II. rádu a imperfekcií podľa 5.3.2 (3) [10] odpadá práčne zadávanie imperfekcií alebo im ekvivalentných zaťažení, ktoré sú v každom podlaží rôzne, pretože v metóde podľa 5.2 sa imperfekcia zadáva jednotne pre celý rám. Druhou výhodou je, že prídavná deformácia z titulu pôsobenia osových síl na imperfektnom ráme je afinná vlastnému tvaru vybočenia posudzovanej rovinatej konštrukcie. Platí medzi nimi vzťah (5.8). Teda momenty vznikajúce od prídavných deformácií sa môžu určiť priamo v programe, v ktorom sa vypočítal vlastný tvar vybočenia. Ak to program neumožňuje, je tu možnosť vypočítať priebeh druhých derivácií napríklad podľa diferenčného vzťahu (5.24b). Väčšina programov podporuje export priebehov vlastných tvarov napr. formou hodnôt v ekvidistantných bodoch alebo rovno priebehov momentov od nich vyplývajúcich. Ďalšou výhodou je možnosť posudzovania rámov zložených z prútov s nekonštantným prierezom a/alebo nekonštantnou osovou silou.

V tomto prípade je však nevýhodou nutnosť použiť iteratívny postup pri určovaní polohy rozhodujúceho prierezu. Avšak tá sa dá predbežne odhadnúť medzi polohou maximálneho napätia od osovej sily a maximálneho napätia od momentov. Už približne v 3. iterácií sa dopracujeme k správnej polohe rozhodujúceho prierezu. Ale v prípade konštantného prierezu a osovej sily je rozhodujúca poloha (ako už bolo uvedené) v mieste

maximálnej druhej derivácie vlastného tvaru vybočenia, čiže je známa vopred a nie je nutné iterovať.

Autorom vypracovaný príklad posúdenia vzpernej odolnosti rovinatej prútovej konštrukcie na základe analýzy teórie II. rádu s imperfekciou odvodenou od vlastného tvaru vybočenia sa nachádza aj v [26] (str.259~267). Prútovej konštrukcie sa skladá z prútov s konštantnými prierezmi a je namáhaná na prútoch konštantnými osovými silami. V príklade je napriek tomu použitý všeobecný postup, ktorý by platil aj v prípade nekonštantných prierezov a/alebo nekonštantných osových síl. Čiže je použitá imperfekcia podľa (NB.5.1) [13] namiesto imperfekcie podľa (5.9) [10]. Dôvodom je, že v prípade použitia imperfekcie podľa (5.9) [10] by nebolo možné tento postup použiť pri všeobecnej prútovej konštrukcii z prútov s nekonštantnými prierezmi a/alebo s nekonštantnými osovými silami na jednotlivých prútoch.

7. ZÁVERY

Táto práca je venovaná z väčšej časti problematike priestorového vzperu centricky zaťažených tenkostenných celistvých prútov otvoreného prierezu (pri uzatvorených prierezoch je krútová tuhosť natoľko vysoká, že nerozhoduje resp. nemôže nastať priestorový vzper). Vzhľadom na stanovenú tézu č.1 je tu zhodnotená približná metóda určovania kritickej sily priestorového vzperu pri prútoch s jednoosovo-symetrickými alebo nesymetrickými prierezmi a s rôznymi okrajovými podmienkami v ohybe a v krútení. Pre potrebu zhodnotenia približnej metódy bolo potrebné sa oprieť o výsledky presnejšej referenčnej metódy, ktorá tu bola založená na MKP. Bol zostrojený program na výpočet kritických síl priestorového vzperu vo VBA pre Excel, ktorý bol skontrolovaný programami ANSYS a DRILL.

V približnej metóde majú súčinitele α_{zw} a α_{yw} zohľadňovať vplyv rôznych okrajových podmienok na hodnotu kritickej sily priestorovej straty stability. Tieto súčinitele boli vypočítané (tab. 3.1 a 3.2 a výpočet je v prílohe 1) pre všetky kombinácie okrajových podmienok a to pre fundamentálne funkcie volené ako vlastné funkcie priečného kmitania nosníka so spojite rovnomerne rozloženou hmotou, tak aj pre vlastné funkcie riešenia diferenciálnej rovnice stability prúta. Súčinitele vypočítané Goľdenvejzerom boli overené avšak väčšina Březinom doplnených súčiniteľov (ktorý sa odvoláva na výsledky Goľdenvejzera) sa nezhodovala s tu vypočítanými.

Na základe výpočtov kritických síl priestorového vzperu pre zvolené prúty s viacerými tvarmi jednoosovo-symetrických i nesymetrických prierezov a viacerými kombináciami okrajových podmienok sa ukázalo, že približná metóda nevystihuje vzájomnú interakciu medzi ohybom prúta a skrútením pri strate stability. Je to predurčené už tým, že sa tvary vybočenia volia vopred v podobe fundamentálnych funkcií. Z MKP vychádzajú iné tvary vybočení v ohybe a krútení, aké by sa v približnej metóde očakávali, a aké sa volili za fundamentálne funkcie.

Napriek tomu sa však ukázalo, že chyba približnej metódy nie je natoľko závislá od vystihnúť všetkých zložiek priestorového tvaru vybočenia ako je závislá od vzájomného pomeru hodnôt kritických síl prislúchajúcich týmto zložkám (zložkami sa myslia ohybové zložky vybočenia v rovinách hlavných osí prierezu a skrútenie, aj keď tie samostatne nastať nemôžu). Čím viac sú tieto kritické sily hodnotami bližšie, tým vyššia je chyba približnej metódy. Chyba dosahovala maximum vzhľadom na spektrum vyšetrovaných dĺžok prúta približne pri dĺžke, kedy boli tieto hodnoty rovnaké. Naopak pri veľkom nepomere medzi ich hodnotami chyba klesá. Hodnoty súčiniteľov α_{zw} a α_{yw} iba ovplyvňovali spektrum, v akom sa tieto chyby pohybovali. Ukázalo sa, že pri priestorovom vzpere, kedy je dominantná jedna zložka priestorového vzperu, je hodnota kritickej sily priestorového vzperu približujúca sa hodnote kritickej sily dominantnej zložky (ohybovej straty stability alebo straty stability skrútením). Ak je táto dominantná zložka priestorového tvaru vybočenia dobre vystihnúť volenou fundamentálnou funkciou (volenou na základe okrajových podmienok pre príslušnú zložku vybočenia), potom je chyba približnej metódy nízka aj napriek nevystihnúť ostatných minoritných zložiek vybočenia.

Vo všetkých vyšetrovaných prípadoch, keď sa položil súčiniteľ $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$, bola chyba približnej metódy viac či menej na strane bezpečnej, a tým sa overilo Chalupove tvrdenie. Preto je opodstatnenosť riešenia v článkoch I.3 v [11] a NB.4.2 [13] spôsobom, že sa súčinitele položili rovné 1, aj keď iba v oblasti mimo prvých 4 riadkov a stĺpcov tab. 3.2.

Treba upozorniť na fakt, že v súčasnej úprave článkov I.3 v [11] a NB.4.2 [13] sa ponechali pre kombinácie okrajových podmienok spadajúce do oblastí prvých 4 riadkov

a stĺpcov tabuľky pre súčinitele α_{zw} a α_{yw} pôvodné súčinitele vypočítané pre fundamentálne funkcie z vlastného priečného kmitania (tab. 3.2), namiesto použitia súčiniteľov vypočítaných na základe vlastných tvarov pri strate stability (tab. 3.1), ktoré by v prípade priestorového vzperu s jednou zložkou dominantnou dávali výsledky presnejšie. Vzhľadom na to, že pre tieto kombinácie okrajových podmienok sú v tab. 3.2 všetky súčinitele väčšie ako v tab. 3.1, sa tým výsledok posunie na stranu mierne konzervatívnu. V prípade priestorového vzperu s približne rovnako významnými zložkami (rovinnej aj krútovej) sa môže vyskytnúť prípad (napr. ako príklad na obr. 3.27 aj v prípade keď $\alpha_{zw} = 0,78$), kedy bude približná metóda pre súčinitele z tejto oblasti dávať výsledky mierne na strane nebezpečnej. To by sa ošetrilo, ak by sa aj v tejto oblasti súčinitele položili rovné 1. Tým by pre všetky kombinácie okrajových podmienok odpadala nutnosť odčítavať z tabuľky súčinitele α_{zw} a α_{yw} , a bez ohľadu na uloženie v ohybe a v krútení by sa brali hodnotou 1.

Na základe analýzy vyšetovaných prútov sa odporúča, aby pri takých prútoch kedy kritické sily zložiek priestorového vzperu sú približne rovnaké (to je pri dĺžkach približne (3.41) resp. (3.43)) a zároveň pri požiadavke na ekonomický návrh, sa volil výpočet na základe MKP. V ostatných prípadoch je približná metóda dobrou pomôckou pri potrebe rýchleho návrhu prípadne rýchleho odhadu kritickej sily. Pre súčinitele $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$ bude výsledok viac či menej na strane konzervatívnej. Pri približnej metóde je výhodné, že projektant je nútený vypočítať kritické sily prislúchajúce jednotlivým zložkám, z ktorých sa priestorový vzper skladá a tým získa dobrú predstavu, ktorá zo zložiek priestorového tvaru vybočenia bude dominantnou (tá ktorej prislúcha minimálna z vypočítaných kritických síl) a ktorá minoritnou, a tiež predstavu približne aká hodnota kritickej sily priestorového vzperu je adekvátna. Zo štúdie je evidentné, že minimum z týchto kritických síl predstavuje hornú hranicu pre hodnotu kritickej sily priestorovej straty stability. Preto má približná metóda zavedená Gol'denveizerom a Vlasovom a doplnená Březinom opodstatnenosť.

V druhej časti práce sa rozoberá problematika vzpernej odolnosti hliníkových prútov s priečnymi alebo pozdĺžnymi zvarmi a spôsob, akým ju norma [11] rieši. Hliník sa stále viac presadzuje ako konštrukčný materiál. Prvky konštrukcie z hliníku sa vyrábajú tzv. pretláčaním, ktoré je limitované maximálnou šírkou pretláčaného prierezu na 800 mm. Ak sa požaduje konštrukčný prvok s väčším prierezom, je nutné ho vyrobiť z viacerých prierezov, ktoré sa dodatočne zvaria pozdĺžnym zvarom. Vzhľadom na to, že hliníkové zliatiny (upravované vytvrdzovaním) pod vplyvom vysokej teploty v oblasti zvarov mení svoje mechanické vlastnosti (ktoré ostávajú aj po vychladnutí), musí tento jav byť zohľadnený v normách. Výpočet vzpernej odolnosti hliníkových prútov s priečnymi a pozdĺžnymi zvarmi je formálne podobný, ako pri oceľových prútoch avšak zahŕňa určité špecifiká.

Zmenšenie odolnosti materiálu v teplom ovplyvnenej oblasti (HAZ) je pri pozdĺžnych zvaroch zohľadnené zmenšením hrúbky steny prvku a zavedením efektívnej plochy prierezu, ktorá okrem toho zohľadňuje aj vplyv lokálneho vydúvania pri veľmi štíhlych stenách. Zatiaľ čo v článkoch pre odolnosť prierezov sú v efektívnej ploche prierezu zahrnuté oboje, v článku pre vzpernú odolnosť sa v efektívnej prierezovej ploche nestanovuje zmenšenie hrúbky stien v HAZ. Toto bolo doplnené korektúrou č. 2 a 3 v tab. 4.1. Vplyv zníženej pevnosti v HAZ sa zohľadňuje zavedením faktora κ . Ten však ako sa ukázalo nenadobúda natoľko nízke hodnoty, aby nahradil vplyv zmenšenia hrúbky stien v efektívnej prierezovej ploche v HAZ pri vzpernej triede A. Ostatne vo vzpernej triede B nie je tento súčiniteľ závislý od plochy HAZ vôbec.

Vplyv priečných zvarov je zahrnutý faktorom ω_x , ktorý zohľadňuje ako vplyv polohy priečného zvaru tak aj vplyv zníženej návrhovej pevnosti v HAZ. Pri posudzovaní prúta s priečnym zvarom norma neupozorňuje na potrebu posúdenia prúta nielen v priereze

s priečnym zvarom, ale aj v priereze v strede vzpernej dĺžky (ktoré je klasickým posúdením vzpernej odolnosti). Pri posúdení v priereze s priečnym zvarom sa má súčiniteľ vzperu určovať na základe upravenej pomernej štíhlosti. Pre zlepšenie prehľadnosti sa navrhuje s týmto súvisiaci poznámka (korektúra č. 4 v tab. 4.1) doplniť do čl. 6.3.1.2 [11]. Spomenuté pripomienky zhrnuté v tab. 4.1 boli zaslané komisií CEN TC 250/SC9. Všetky boli komisiou akceptované a budú zohľadnené v nasledovnom korigendu.

Pri prútoch s priečnym zvarom je vhodné tento zvar voliť pokiaľ možno v mieste inflexného bodu vlastného tvaru vybočenia prúta. Pri prútoch s väčšou štíhlosťou je však tento zvar možné voliť aj bližšie stredu vzpernej dĺžky bez toho, aby sme tým zmenšili vzpernú odolnosť. Ako sa ukázalo z grafu 4.3 so zväčšujúcou sa štíhlosťou prúta je možné umiestniť priečny zvar bližšie stredu vzpernej dĺžky prúta bez toho, aby nepriaznivo ovplyvnil odolnosť prúta. Pri prútoch s menšou štíhlosťou bude skôr rozhodovať vzperná odolnosť určená v priereze s priečnym zvarom, aj keď sa ten bude nachádzať v blízkosti inflexných bodov tvaru vybočenia prúta. Presné určenie miesta priečného zvaru, od ktorého by začal redukovať vzpernú odolnosť prúta je možné určiť (závisí od pomernej štíhlosti ale aj pevnosti hliníka mimo a v mieste HAZ), avšak pre projektanta je rýchlejšie vypočítať obe odolnosti (odolnosť v mieste v strede vzpernej dĺžky aj v mieste priečného zvaru), ako zisťovať, či je nutné aj posúdenie v mieste zvaru.

V poslednej časti práce sa rozoberá metóda posudzovania vzpernej odolnosti prútov s nekonštantným prierezom a/alebo nekonštantnou osovou silou alebo rámov zložených z takýchto prútov. Z toho titulu je tu poukázané na špecifiká vzperu prútov so začiatočnou imperfekciou v tvare vlastného tvaru vybočenia a naznačené je i riešenie diferenciálnej rovnice rovnováhy ideálneho i skutočného prúta s nekonštantným prierezom aj osovou silou pomocou diferenčnej metódy (konkrétne príklady sú uvedené v prílohách 6 a 7).

Metóda je koncepčne analýzou na základe teórie II. rádu s imperfekciou v tvare afinnom vlastnému tvaru podľa NB.5.2 [13] a 5.3.2 (11) [11] pre prúty s nekonštantným prierezom a/alebo nekonštantnou osovou silou alebo rámy z nich zložené. Prof. Chladný ju odvodil zovšeobecnením pôvodnej metódy určenej na posudzovanie iba prútov s konštantným prierezom a konštantnou osovou silou alebo rámov z nich zložených s imperfekciou podľa 5.3.2 (11) [10].

V dnešnej dobe je k dispozícii množstvo komerčných programov umožňujúcich výpočet vlastných tvarov v pružnom stave aj prútov s nekonštantným prierezom a/alebo s nekonštantnou osovou silou alebo rovinných konštrukcií z takýchto prútov pozostávajúcich. Niektoré z nich umožňujú aj výpočet priebehu momentov vznikajúcich pri zdeformovaní rovinnéj konštrukcie do voleného násobku vlastného tvaru v pružnom stave pri strate stability. Ak zohľadníme fakt, že pri voľbe globálnej a lokálnej začiatočnej imperfekcie v tvare afinnom vlastnému tvaru je priebeh prídavného priehybu tiež afinný vlastnému tvaru, potom je takéto programy možné použiť na výpočet momentov teórie II. rádu. Programy ktoré to nepodporujú, umožňujú aspoň export vlastných tvarov vo forme súboru čísel reprezentujúcich hodnoty vlastných tvarov v ekvidistantných bodoch prúta. Pri výpočte priebehu druhej derivácie je vlastný tvar v tejto podobe možné aproximovať formou spojitej funkcie, ktorú potom ďalej upravovať alebo použiť diferenčnú metódu.

Pri určovaní polohy rozhodujúceho prierezu je nutné pri nekonštantných prierezoch a osových silách iterovať, ale ani to nepredstavuje vzhľadom na rýchlu konvergenciu k správnej polohe žiaden problém.

V prípade posudzovania prúta s konštantným prierezom aj osovou silou, či už je tento prút súčasťou rámu, alebo je samostatný a je zaťažovaný na medzi návrhovej vzpernej odolnosti, dáva táto metóda rovnaké využitie ako metóda náhradného prúta a to 100% využitie.

V článku 5.3.2 (11) [11] sa poukázalo na chybu pri určovaní amplitúdy imperfekcie a v čl. 5.3.2 (11) [10] na zavádzajúcu definíciu.

Táto metóda v dnešnej dobe predstavuje dobrú a perspektívnu metódu na určovanie vzpernej odolnosti. Globálna a lokálna imperfekcia v tvare afinnom vlastnému tvaru vybočenia je veľmi vhodná, aj keď prináša miernu komplikáciu pri určovaní jej amplitúdy.

PRÍNOS PRÁCE PRE VEDU A PRAX

Prínosom práce pre vedu je zhodnotenie približnej metódy výpočtu kritickej sily priestorovej straty stability. Približná metóda aj napriek tomu, že nevystihuje interakciu medzi jednotlivými zložkami priestorového vzperu, pre súčinitele rovné 1 dáva výsledky na strane bezpečnej, viac či menej konzervatívnej podľa miery nepomeru medzi hodnotami kritických síl prislúchajúcich zložkám priestorového vzperu.

Prínosom práce pre prax je korekcia normových postupov pri posudzovaní hliníkových prútov s priečnymi a pozdĺžnymi zvarmi. Navrhnuté korektúry normy [11] boli akceptované komisiou CEN TC 250/SC9 pre hliníkové konštrukcie a budú zohľadnené v norme.

Prínosom pre prax možno označiť i analýzu novej zovšeobecnenej metódy posudzovania vzpernej odolnosti prútov s nekonštantným prierezom a /alebo namáhané nekonštantnou osovou silou a rovinných konštrukcií z takýchto prútov zložených, v ktorej sa za začiatočnú imperfekciu volí tvar afinný vlastnému tvaru vybočenia konštrukcie v pružnom stave. V norme [11] sa poukázalo na chybu pri určení polohy rozhodujúceho prierezu.

Vypracované prílohy môžu poslúžiť ako pomôcka pre projektanta pri posudzovaní prútov a rovinných prútových konštrukcií zložených z prútov s nekonštantným prierezom a osovou silou. V poslednej prílohe je vypracovaný návod pri posudzovaní vzpernej odolnosti rámu podľa všetkých metód nachádzajúcich sa v [10].

Niektoré časti predloženej práce môžu slúžiť ako učebná pomôcka v pedagogickom procese, iné časti ako pomôcka pri použití diferenčnej metódy, napríklad pri riešení prútov s nekonštantným prierezom a /alebo s nekonštantnou osovou silou.

ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

- [1] VLASOV, V. Z. *Tenkostěnné pružné pruty*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury. 1962. 572 s.
- [2] GOLDENVEJZER, A. L. *Ustojčivosť tonkostennych stěržnej pri dejstviji prodolnoj sily v zavisimosti ot graničnych uslovij*. In. *Trudy laboratoriji strojitel'noj mehaniki*. 1941
- [3] prEN 1999-1-1: 2006 *Eurocode 9: Design of aluminium structures - Part 1-1: General structural rules, Stage 49*. Brussels. CEN. December 2005.
- [4] BŘEZINA, Vladimír. *Vzpěrná únosnost kovových prutů a nosníků*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd. 1962. 384 s.
- [5] CHALUPA, Adolf. *Navrhování ocelových konstrukcí - Komentář a příklady k ČSN 73 1401*. Praha: Vydavatelství úřadu pro normalizaci a měření. 1967. 288 s.
- [6] CHALUPA, Adolf a kol. *Navrhování ocelových konstrukcí - Komentář k ČSN 73 1401*. Praha: Vydavatelství Úřadu pro normalizaci a měření. 1982. 304 s.
- [7] BALÁŽ, I. - AGÓCS, Z.- *Kovové konštrukcie I - Príručka pre navrhovanie prvkov ocelových konštrukcií, I. časť*. 2. dopl. vyd. Bratislava: ALFA.1985. 496 s. ISBN 80-05-00187-8
- [8] REDDY, J. N. *An introduction to the finite element method*. 2nd ed. Singapore: McGraw-Hill, Inc. 1993. ISBN 0-07-112799-2
- [9] Manuál programu ANSYS 8.1.
- [10] STN EN 1993-1-1: *Eurokód 3: Navrhovanie ocelových konštrukcií - Časť 1-1: Všeobecné pravidlá a pravidlá pre budovy*. Bratislava: SÚTN. November 2006. 92 s.
- [11] EN 1999-1-1: *Eurocode 9: Design of aluminium structures - Part 1-1: General structural rules*. Brussels: CEN. March 2007
- [12] HÖGLUND, T. *Lecture 2301*. In: *TALAT (Training in Aluminium Application Technologies)*. Royal Institute of Technology, Stockholm 2008
- [13] STN EN 1993-1-1/NA: *Eurokód 3: Navrhovanie ocelových konštrukcií - Časť 1-1: Všeobecné pravidlá a pravidlá pre budovy - Národná príloha*. Bratislava: SÚTN. December 2007. 24 s.
- [14] BALÁŽ, I. *Determination of the flexural buckling resistance of frames with members with non-uniform cross-sections and non-uniform axial compression forces*. In: *Teoretické a konštrukčné problémy ocelových a drevených konštrukcií a mostov - Zborník referátov*. Bratislava: Katedra kovových a drevených konštrukcií Stavebná fakulta STU. Október 2008. ISBN 978-80-227-2950-5. p. 17~22.
- [15] BALÁŽ, I. - ÁROCH, R. – CHLADNÝ, E. - KMEŤ, S. – VIČAN, J. *Navrhovanie ocelových konštrukcií podľa Eurokódov STN EN 1993-1-1:2006 a STN EN 1993-1-8:2007*. Bratislava: SKSI. Máj 2007. 212 s. ISBN 978-80-89113-35-4
- [16] SEDLACEK, G. - NAUMES, J. *Excerpt from the Background Document to EN 1993-1-1 – Flexural buckling and lateral buckling on a common basis: Stability assessments according to Eurocode 3*. Aachen: CEN/TC250/SC3. Report N1639E – rev2. March 2009.
- [17] RALSTON, A. *Základy numerické matematiky*. Praha: Academia. 1973. 636 s.
- [18] HANDLOVIČOVÁ, A. – SCHIESSLOVÁ, H. *Diferenčné metódy riešenia inžinierskych úloh*, Bratislava: Vydavateľstvo STU. 2007. ISBN 978-80-227-2731-0
- [19] BOISSONNADE, N. - GREINER, R. – JASPART, J. P. - LINDNER, J. *Rules for Member Stability in EN 1993-1-1. Background documentation and design guidelines*. Mem Martins: ECCS Technical Committee 8- Stability. 2006. 259 s. ISBN: 92-9147-000-84

- [20] BUČEK, P. *Stabilitné problémy tenkostenných konštrukcií riešené pomocou GBT - Dizertačná práca*. 2008
- [21] STN 73 1401: *Navrhovanie ocelových konštrukcií*. Bratislava: SÚTN. Marec 1998. 182 s.
- [22] KOLOUŠEK, V. - kolektív *Stavebné konštrukcie namáhané dynamickými účinkami*. Bratislava: Slovenské vydavateľstvo technickej literatúry. 1967. 1008 s.
- [23] TIMOSHENKO, S. P. - GERE, J. M. *Theory of elastic stability*. 2nd ed. Singapore: McGRAW-HILL. 1963. ISBN 0-07-085821-7
- [24] CHLADNÝ, E. - LAPOS, J. – DJUBEK, J. - MRÁZIK, A. *Stabilita a plasticita kovových konštrukcií*. Bratislava: SVŠT. 1989. 305 s. ISBN: 80-227-0127-0
- [25] CHLADNÝ, E: *Vzperná únosnosť celistvých centricky tlačných prútov*. In: *Navrhovanie ocelových konštrukcií podľa STN 73 1401: 97 - Zborník prednášok z postgraduálneho kurzu*. Bratislava: Slovenská spoločnosť pre ocelové konštrukcie ZSVTS. Október 1997. 296 s. str. 113~130.
- [26] BALÁŽ, I. - ÁROCH, R. – CHLADNÝ, E. - KMEŤ, S. – VIČAN, J. *Navrhovanie ocelových konštrukcií podľa Eurokódu 3 STN EN 199, časti-1-1:2006 a časti -1-8:2007 podľa ich národných príloh NA: 2007 a NA: 2008 a ich opráv AC: 2009 a AC: 2009*. Bratislava: SKSI. Január 2010. 400 s. ISBN 978-80-89113-68-2
- [27] BALÁŽ, I. – KOLEKOVÁ, Y. *Vzperná odolnosť pri strate stability ohybom prútových konštrukcií s jednotnou globálnou a lokálnou začiatočnou imperfekciou*. In: *Sborník konference Modelování v mechanice 2010*. Ostrava: máj 2010 v tlači, plná verzia článku je na priloženom CD-ROM
- [28] Document CEN/TC250-CEN/TC135. *Consistency of the equivalent geometric imperfections used in design and the tolerances for geometric imperfections used in execution*. Version February 2010

ZOZNAM POUŽITÝCH PROGRAMOV

ANSYS, Release 8.1
 DRILL, ver. 2005.060
 IQ100, ver. október 2004
 SHAPE-THIN, ver. 6.14.960 - Software DLUBAL GmbH
 MathCAD, ver. 13.0
 MS EXCEL 2003 - VBA

ZOZNAM PUBLIKOVANÝCH PRÁC AUTORA

KOVÁČ, M. *Stabilita tenkostenných celistvých prútov tlačných centrickou osovou silou*. In *Sborník anotací konference JUNIORSTAV 2008*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2008, p. 145. ISBN 978-80-86433-45-5, plná verzia článku je na priloženom CD-ROM

KOVÁČ, M. *Vzperná odolnosť rámov a prútov s nekonštantným priebehom osovej sily a/alebo ohybovej tuhosti*. In *Sborník anotací konference JUNIORSTAV 2009*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2009, p. 138. ISBN 978-80-214-3810-1, plná verzia článku je na priloženom CD-ROM

KOVÁČ, M. *Kritická sila tenkostenných centricky tlačných prútov pri priestorovom vzpere*. In *Sborník anotací konference JUNIORSTAV 2010*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, 2010, p. 156. ISBN 978-80-214-4042-5, plná verzia článku je na priloženom CD-ROM

KOVÁČ, M. – BALÁŽ I. *Vzperná odolnosť prútov z hliníkových zliatin s priečnymi a pozdĺžnymi zvarmi podľa EN 1999-1-1*. In *Teoretické a konštrukčné problémy oceľových a drevených konštrukcií a mostov - Zborník referátov*. Bratislava: Katedra kovových a drevených konštrukcií Stavebná fakulta STU Bratislava, 2008. ISBN 978-80-227-2950-5. p. 113~118.

ZOZNAM CITÁCIÍ AUTORA

KOVÁČ, M. *Vzperná odolnosť rámov a prútov s nekonštantným priebehom osovej sily a/alebo ohybovej tuhosti*. In *Sborník anotací konference JUNIORSTAV 2009*. Brno: Vysoké učení technické v Brně Fakulta stavební, 2009, p. 138. , článok je na priloženom CD-ROM ISBN 978-80-214-3810-1

citovaná v

BALÁŽ, I. - ÁROCH, R. – CHLADNÝ, E. - KMEŤ, S. – VIČAN, J. *Navrhovanie oceľových konštrukcií podľa Eurokódu 3 STN EN 199, časti-1-1:2006 a časti -1-8:2007 podľa ich národných príloh NA: 2007 a NA: 2008 a ich opráv AC: 2009 a AC: 2009*. Bratislava: SKSI. Január 2010. 400 s. ISBN 978-80-89113-68-2 p.87

ZOZNAM PRÍLOH

Príloha 1:

- Vlastné tvary priečneho kmitania jednopolových rôzne podopretých nosníkov s rovnomerne rozloženou hmotou
- Vlastné tvary straty stability jednopolových rôzne podopretých nosníkov
- Výpočet súčiniteľov α_{zw} a α_{yw}

Príloha 2:

- Príklad výpočtu kritickej osovej sily približnou metódou prúta s prierezom s jednou osou symetrie s možnosťou voľby podopretia
- Závislosti kritických síl od dĺžky prúta s prierezom s jednou osou symetrie
- Príklad výpočtu kritickej osovej sily prúta s nesymetrickým prierezom približnou metódou

Príloha 3:

- Výpočet tuhostných matic pre MKP
- Príklad výpočtu kritických osových síl prúta MKP prúťovým modelom podľa postupu v 3.3.1

Príloha 4:

- Program na výpočet kritických osových síl na základe MKP prúťovým modelom vo VBA pre EXCEL- užívateľské prostredie

Príloha 5:

- Príklad výpočtu vzpernej odolnosti hliníkového prúta s pozdĺžnym zvarom
- Príklad výpočtu vzpernej odolnosti hliníkového prúta s priečnym zvarom

Príloha 6:

- Riešenie vlastných tvarov prúta s premenným prierezom a s nekonštantnou osovou silou diferenčnou metódou a overenie (5.8) ak platí (5.5)
- Riešenie prídavného priehybu tlačeneho prúta s premenným prierezom a s imperfekciou v tvare paraboly

Príloha 7:

- Príklad 1 z 5.4 riešený diferenčnou metódou
- Príklad 2 z 5.4 riešený na základe polynomickej aproximácie vlastného tvaru vybočenia vypočítaného v IQ100
- Príklad 2 z 5.4 riešený diferenčnou metódou

Príloha 8:

- Príklad rovinného rámu posúdeného všetkými metódami z [10]

PRÍLOHA 1

**VLASTNÉ TVARY PRIEČNEHO KMITANIA JEDNPOLOVÝCH RÔZNE
PODOPRETÝCH NOSNÍKOV S ROVNOMERNE ROZLOŽENOU HMOTOU**

**VLASTNÉ TVARY STRATY STABILITY JEDNPOLOVÝCH RÔZNE PODOPRETÝCH
NOSNÍKOV**

VÝPOČET KOEFICIENTOV α_{zw} A α_{yw}

Vlastné tvary priečného kmitania jednopolových nosníkov rôzne podopretých a výpočet súčiniteľov α_{zw} resp. α_{yw}

Diferenciálna rovnica priečného kmitania priamych nosníkov s rovnomerne rozloženou hmotou je v tvare:

$$\frac{d^4}{dx^4} w(x) - \left(\frac{\mu \cdot \omega_0^2}{E \cdot I} \right) \cdot w(x) = 0$$

Okrajové podmienky:

- K- kĺb
- V- votknutie
- O- voľný koniec
- P- posuvné votknutie

Predpokladané všeobecné riešenie:

$$w(x) = C_1 \cdot \cosh\left(\frac{\lambda \cdot x}{L}\right) + C_2 \cdot \sinh\left(\frac{\lambda \cdot x}{L}\right) + C_3 \cdot \cos\left(\frac{\lambda \cdot x}{L}\right) + C_4 \cdot \sin\left(\frac{\lambda \cdot x}{L}\right)$$

kde: $\lambda = L \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \omega_0^2}{E \cdot I}}$

Okrajové podmienky K-K:

$$\cos X := 0$$

$$\frac{L}{w} := m$$

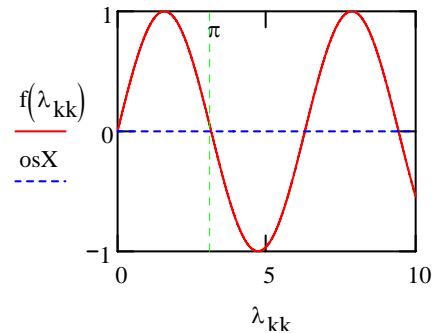
Po aplikovaním okrajových podmienok a z podmienky existencie netriviálneho riešenia dostaneme charakteristickú rovnicu :

$$\sin(\lambda_{kk}) = 0 \quad f(\lambda_{kk}) := \sin(\lambda_{kk})$$

$$\lambda_{kk} := 3 \quad \text{Given} \quad \sin(\lambda_{kk}) = 0$$

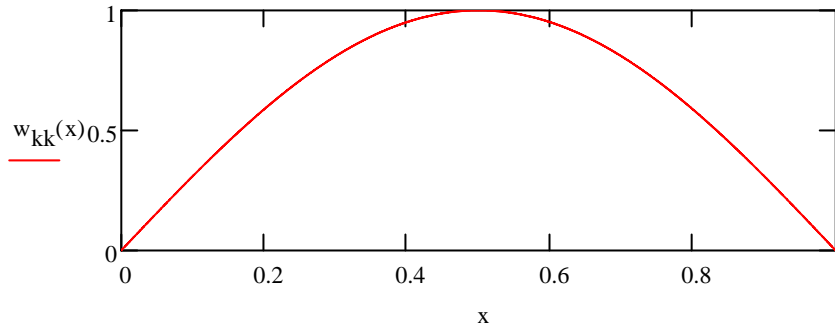
$$\lambda_{kk} := \text{Find}(\lambda_{kk}) \quad \lambda_{kk} = 3.142$$

$$C_{4kk} := 1 \quad C_{2kk} := -C_{4kk} \cdot \frac{\sin(\lambda_{kk})}{\sinh(\lambda_{kk})} \quad C_{2kk} = -0$$



Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{kk}(x) := L \cdot C_{4kk} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$$



Okrajové podmienky V-K:

$$f_{vk}(\lambda_{vk}) := \tan(\lambda_{vk}) - \tanh(\lambda_{vk})$$

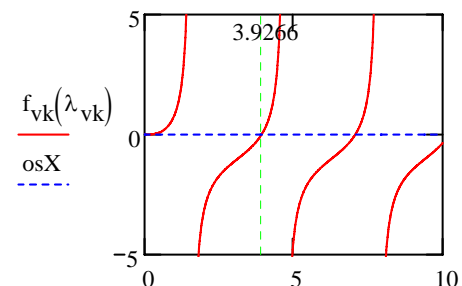
Charakteristická rovnica: $\tanh(\lambda_{vk}) = \tan(\lambda_{vk})$

$$\lambda_{vk} := 3 \quad \text{Given} \quad \tanh(\lambda_{vk}) = \tan(\lambda_{vk})$$

$$\lambda_{vk} := \text{Find}(\lambda_{vk}) \quad \lambda_{vk} = 3.927$$

$$C_{1vk} := 0.705 \quad C_{2vk} := -C_{1vk} \cdot \frac{\cosh(\lambda_{vk}) - \cos(\lambda_{vk})}{\sinh(\lambda_{vk}) - \sin(\lambda_{vk})}$$

$$C_{2vk} = -0.706 \quad C_{3vk} := -C_{1vk} \quad C_{4vk} := -C_{2vk}$$

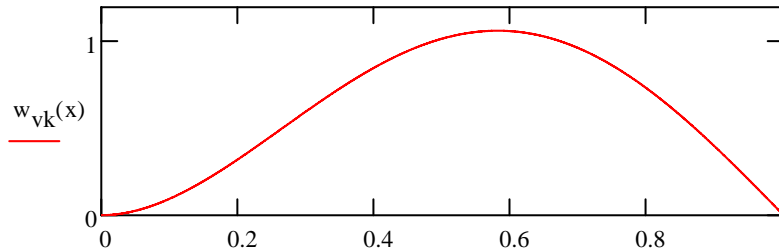


Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{vk}(x) := \left(C_{1vk} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{2vk} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{3vk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{4vk} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vk} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$

Funkcia symetrická k predošlej funkcií vzhľadom na priamku $x=0.5$:

$$w_{vk.sym}(x) := \left[\begin{aligned} &C_{1vk} \cdot \cosh\left[\frac{\lambda_{vk} \cdot (1m - x)}{L}\right] + C_{2vk} \cdot \sinh\left[\frac{\lambda_{vk} \cdot (1m - x)}{L}\right] \dots \\ &+ C_{3vk} \cdot \cos\left[\frac{\lambda_{vk} \cdot (1 \cdot m - x)}{L}\right] + C_{4vk} \cdot \sin\left[\frac{\lambda_{vk} \cdot (1 \cdot m - x)}{L}\right] \end{aligned} \right] \cdot L$$



Okrajové podmienky K-V:

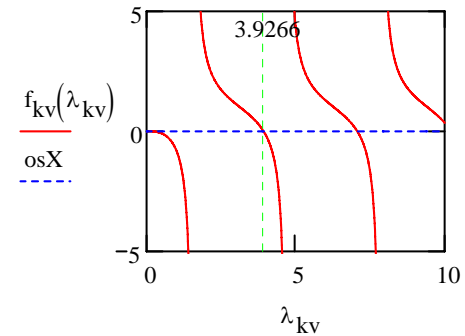
$$f_{kv}(\lambda_{kv}) := \tanh(\lambda_{kv}) - \tan(\lambda_{kv})$$

Charakteristická rovnica: $\tanh(\lambda_{kv}) - \tan(\lambda_{kv}) = 0$

$\lambda_{kv} := 3$ Given $\tanh(\lambda_{kv}) - \tan(\lambda_{kv}) = 0$

$\lambda_{kv} := \text{Find}(\lambda_{kv})$ $\lambda_{kv} = 3.927$

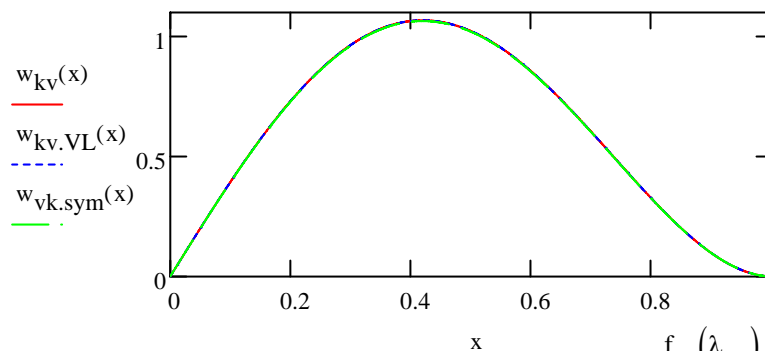
$$C_{2kv} := 0.02788 \quad C_{4kv} := -C_{2kv} \cdot \frac{\sinh(\lambda_{kv})}{\sin(\lambda_{kv})} \quad C_{4kv} = 1$$



Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{kv}(x) := \left(C_{2kv} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{kv} \cdot x}{L}\right) + C_{4kv} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{kv} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$

Riešenie podľa Vlasova: $w_{kv.VL}(x) := \left(\sin\left(\frac{\lambda_{kv} \cdot x}{L}\right) - \frac{\sin(\lambda_{kv})}{\sinh(\lambda_{kv})} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{kv} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$



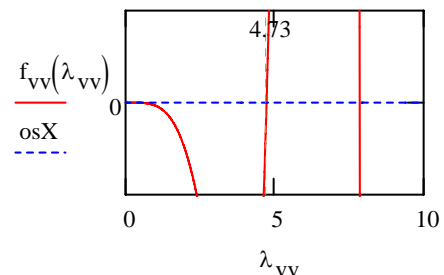
$$f_{vv}(\lambda_{vv}) := \cosh(\lambda_{vv}) \cdot \cos(\lambda_{vv}) - 1$$

Okrajové podmienky V-V:

Charakteristická rovnica: $\cosh(\lambda_{vv}) \cdot \cos(\lambda_{vv}) - 1 = 0$

$\lambda_{vv} := 4$ Given $\cosh(\lambda_{vv}) \cdot \cos(\lambda_{vv}) = 1$

$\lambda_{vv} := \text{Find}(\lambda_{vv})$ $\lambda_{vv} = 4.73$



$$C_{1vv} := 1.0178 \quad C_{2vv} := -C_{1vv} \cdot \frac{\cosh(\lambda_{vv}) - \cos(\lambda_{vv})}{\sinh(\lambda_{vv}) - \sin(\lambda_{vv})} \quad C_{2vv} = -1$$

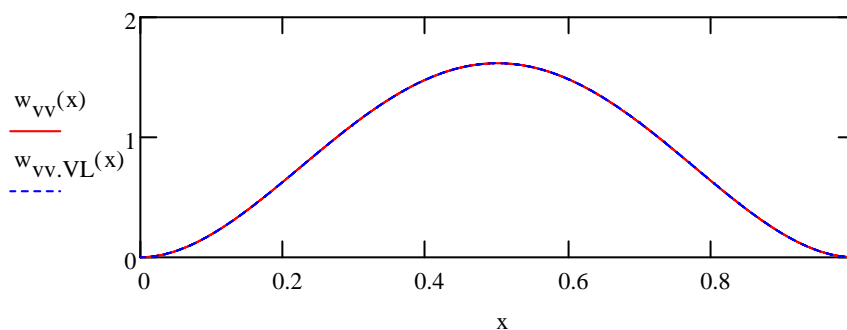
$$C_{3vv} := -C_{1vv} \quad C_{4vv} := -C_{2vv}$$

Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{vv}(x) := \left(C_{1vv} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) + C_{2vv} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) + C_{3vv} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) + C_{4vv} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$

Riešenie podľa Vlasova:

$$w_{vv.VL}(x) := \left[\sin\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) - \left(\frac{\sinh(\lambda_{vv}) - \sin(\lambda_{vv})}{\cosh(\lambda_{vv}) - \cos(\lambda_{vv})} \right) \cdot \left(\cos\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) \right) \right] \cdot L$$



Okrajové podmienky V-O:

$$f_{vo}(\lambda_{vo}) := \cosh(\lambda_{vo}) \cdot \cos(\lambda_{vo}) + 1$$

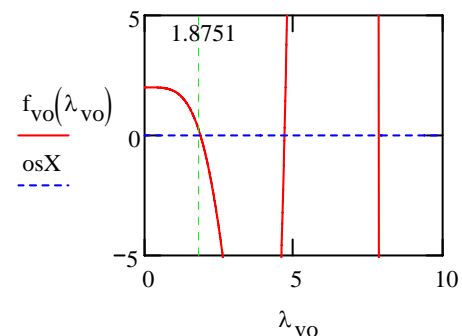
Charakteristická rovnica: $\cosh(\lambda_{vo}) \cdot \cos(\lambda_{vo}) + 1 = 0$

$$\lambda_{vo} := 1.5 \quad \text{Given} \quad \cosh(\lambda_{vo}) \cdot \cos(\lambda_{vo}) = -1$$

$$\lambda_{vo} := \text{Find}(\lambda_{vo}) \quad \boxed{\lambda_{vo} = 1.875}$$

$$C_{1vo} := 1.362 \quad C_{2vo} := -C_{1vo} \cdot \frac{\cosh(\lambda_{vo}) + \cos(\lambda_{vo})}{\sinh(\lambda_{vo}) + \sin(\lambda_{vo})}$$

$$C_{2vo} = -1 \quad C_{3vo} := -C_{1vo} \quad C_{4vo} := -C_{2vo}$$

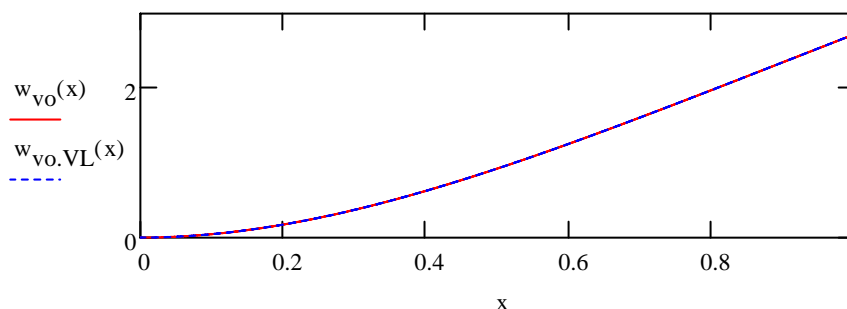


Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{vo}(x) := \left(C_{1vo} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) + C_{2vo} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) + C_{3vo} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) + C_{4vo} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$

Riešenie podľa Vlasova:

$$w_{vo.VL}(x) := \sin\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) - \sinh\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) - \frac{\sinh(\lambda_{vo}) + \sin(\lambda_{vo})}{\cosh(\lambda_{vo}) + \cos(\lambda_{vo})} \cdot \left(\cos\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) - \cosh\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) \right)$$



Okrajové podmienky O-V:

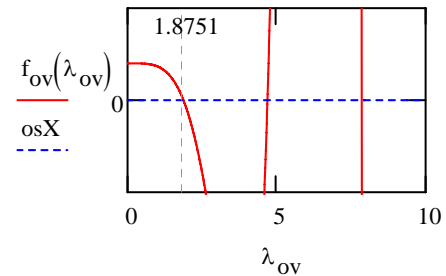
Charakteristická rovnica: $\cosh(\lambda_{OV}) \cdot \cos(\lambda_{OV}) + 1 = 0$

$$\lambda_{OV} := \lambda_{V0} \quad \lambda_{OV} = 1.875$$

$$C_{1OV} := 0.5 \quad C_{2OV} := -C_{1OV} \cdot \frac{\cosh(\lambda_{OV}) + \cos(\lambda_{OV})}{\sinh(\lambda_{OV}) + \sin(\lambda_{OV})}$$

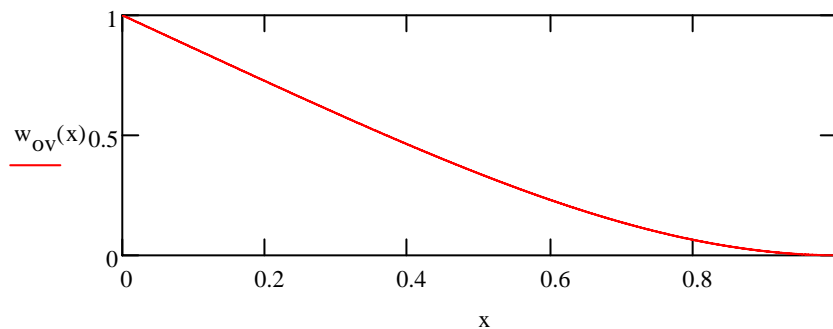
$$C_{2OV} = -0.367 \quad C_{3OV} := C_{1OV} \quad C_{4OV} := C_{2OV}$$

$$f_{OV}(\lambda_{OV}) := \cosh(\lambda_{OV}) \cdot \cos(\lambda_{OV}) + 1$$



Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{OV}(x) := \left(C_{1OV} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{OV} \cdot x}{L}\right) + C_{2OV} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{OV} \cdot x}{L}\right) + C_{3OV} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{OV} \cdot x}{L}\right) + C_{4OV} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{OV} \cdot x}{L}\right) \right) L$$



Okrajové podmienky V-P:

Charakteristická rovnica: $\tanh(\lambda_{VP}) + \tan(\lambda_{VP}) = 0$

$$\lambda_{VP} := 2 \quad \text{Given} \quad \tanh(\lambda_{VP}) + \tan(\lambda_{VP}) = 0$$

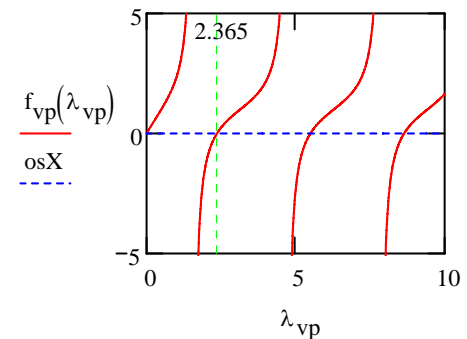
$$\lambda_{VP} := \text{Find}(\lambda_{VP})$$

$$\lambda_{VP} = 2.365$$

$$C_{1VP} := 0.6295 \quad C_{2VP} := -C_{1VP} \cdot \frac{\sinh(\lambda_{VP}) + \sin(\lambda_{VP})}{\cosh(\lambda_{VP}) - \cos(\lambda_{VP})}$$

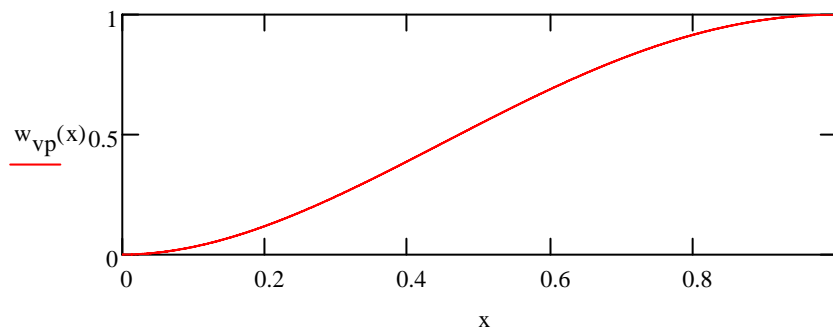
$$C_{2VP} = -0.618 \quad C_{3VP} := -C_{1VP} \quad C_{4VP} := -C_{2VP}$$

$$f_{VP}(\lambda_{VP}) := \tanh(\lambda_{VP}) + \tan(\lambda_{VP})$$



Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{VP}(x) := \left(C_{1VP} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{VP} \cdot x}{L}\right) + C_{2VP} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{VP} \cdot x}{L}\right) + C_{3VP} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{VP} \cdot x}{L}\right) + C_{4VP} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{VP} \cdot x}{L}\right) \right) L$$



Okrajové podmienky P-V:

$$f_{pv}(\lambda_{pv}) := \tanh(\lambda_{pv}) + \tan(\lambda_{pv})$$

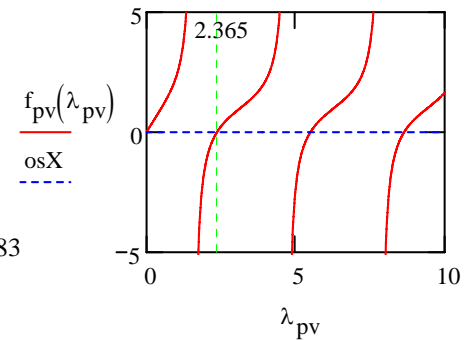
Charakteristická rovnica: $\tanh(\lambda_{pv}) + \tan(\lambda_{pv}) = 0$

$\lambda_{pv} := 2$ Given $\tanh(\lambda_{pv}) + \tan(\lambda_{pv}) = 0$

$\lambda_{pv} := \text{Find}(\lambda_{pv})$

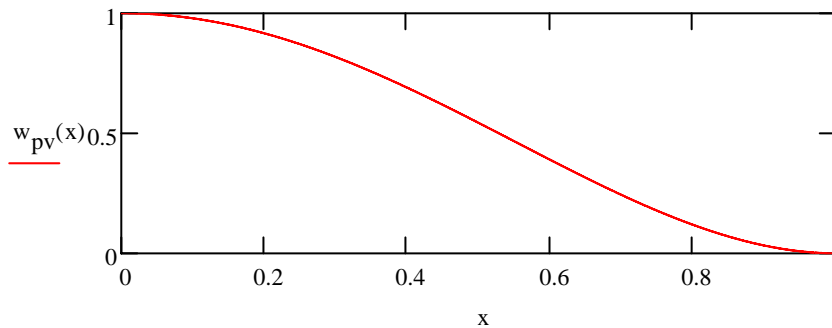
$\lambda_{pv} = 2.365$

$C_{1pv} := 0.1173$ $C_{3pv} := -C_{1pv} \cdot \frac{\cosh(\lambda_{pv})}{\cos(\lambda_{pv})}$ $C_{3pv} = 0.883$



Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{pv}(x) := \left(C_{1pv} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{pv} \cdot x}{L}\right) + C_{3pv} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{pv} \cdot x}{L}\right) \right) L$$



Okrajové podmienky P-K:

$$f_{pk}(\lambda_{pk}) := \cosh(\lambda_{pk}) \cdot \cos(\lambda_{pk})$$

Charakteristická rovnica: $\cosh(\lambda_{pk}) \cdot \cos(\lambda_{pk}) = 0$

$\lambda_{pk} := 1$ Given $\cosh(\lambda_{pk}) \cdot \cos(\lambda_{pk}) = 0$

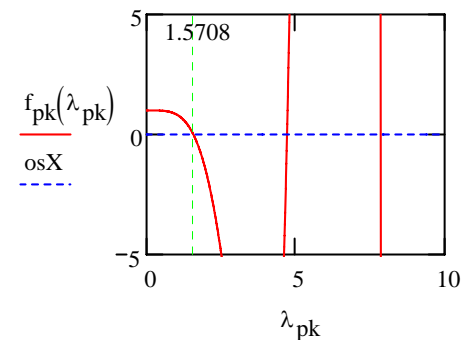
$\lambda_{pk} := \text{Find}(\lambda_{pk})$

$\lambda_{pk} = 1.571$

$\lambda_{pk} := \frac{\pi}{2}$

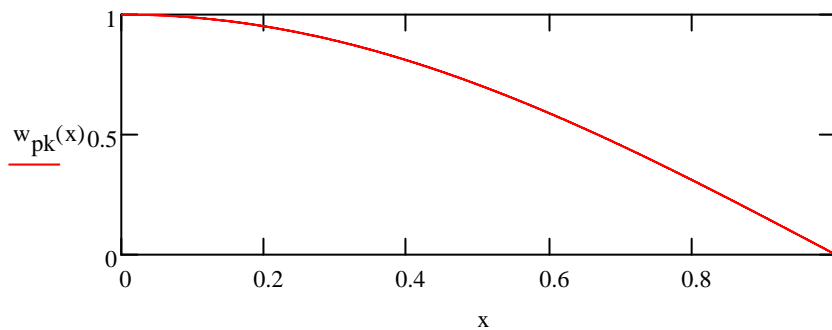
$\lambda_{pk} = 1.571$

$C_{3pk} := 1$ $C_{1pk} := -C_{3pk} \cdot \frac{\cos(\lambda_{pk})}{\cosh(\lambda_{pk})}$ $C_{1pk} = 0$



Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{pk}(x) := C_{3pk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{pk} \cdot x}{L}\right) L$$



Okrajové podmienky K-P:

Charakteristická rovnica: $\cosh(\lambda_{kp}) \cdot \cos(\lambda_{kp}) = 0$

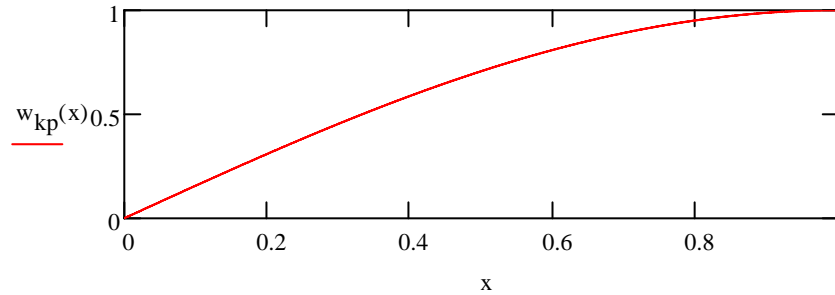
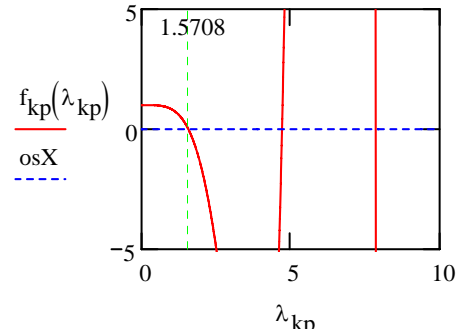
$\lambda_{kp} := 1$ Given $\cosh(\lambda_{kp}) \cdot \cos(\lambda_{kp}) = 0$

$\lambda_{kp} := \text{Find}(\lambda_{kp})$ $\lambda_{kp} = 1.571$ $\lambda_{kp} := \frac{\pi}{2}$

$C_{4kp} := 1$ $C_{2kp} := C_{4kp} \cdot \frac{\cos(\lambda_{kp})}{\cosh(\lambda_{kp})}$ $C_{2kp} = 0$

$w_{kp}(x) := C_{4kp} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{kp} \cdot x}{L}\right)$

$$f_{kp}(\lambda_{kp}) := \cosh(\lambda_{kp}) \cdot \cos(\lambda_{kp})$$



Výpočet súčiniteľov α_{zw} resp. α_{yw} pre funkcie vl. priečného kmitania:

Vektor fundamentálnych funkcií (vlastných tvarov): $i := 1, 2 \dots 10$ $j := 1, 2 \dots 10$ ORIGIN := 1

$$f_{vjk}(x) := \begin{bmatrix} C_{4kk} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right) \cdot L \\ \left(C_{1vk} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{2vk} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{3vk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{4vk} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vk} \cdot x}{L}\right) \right) L \\ \left(C_{2kv} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{kv} \cdot x}{L}\right) + C_{4kv} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{kv} \cdot x}{L}\right) \right) L \\ \left(C_{1vv} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) + C_{2vv} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) + C_{3vv} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) + C_{4vv} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vv} \cdot x}{L}\right) \right) L \\ \left(C_{1vo} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) + C_{2vo} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) + C_{3vo} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) + C_{4vo} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vo} \cdot x}{L}\right) \right) L \\ \left(C_{1ov} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{ov} \cdot x}{L}\right) + C_{2ov} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{ov} \cdot x}{L}\right) + C_{3ov} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{ov} \cdot x}{L}\right) + C_{4ov} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{ov} \cdot x}{L}\right) \right) L \\ \left(C_{1vp} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vp} \cdot x}{L}\right) + C_{2vp} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vp} \cdot x}{L}\right) + C_{3vp} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vp} \cdot x}{L}\right) + C_{4vp} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vp} \cdot x}{L}\right) \right) L \\ \left(C_{1pv} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{pv} \cdot x}{L}\right) + C_{3pv} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{pv} \cdot x}{L}\right) \right) L \\ C_{3pk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{pk} \cdot x}{L}\right) L \\ C_{4kp} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{kp} \cdot x}{L}\right) L \end{bmatrix}$$

Vlasovov vzorec (str.347 [1])
pre koeficienty k_{ii} ($i=1,2,3$):

$$k_{ii.VL.vlk_i} := \frac{L^2}{\pi^2} \cdot (\lambda_{vlk_i})^4 \cdot \frac{\int_0^L (f_{vlk(x)_i})^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{d}{dx} f_{vlk(x)_i}\right)^2 dx}$$

Vektor vlastných čísiel:

	1
1	1
2	2.092
3	2.092
4	4.123
5	0.269
6	0.269
7	1.031
8	1.031
9	0.25
10	0.25

$$\lambda_{vlk} := \begin{pmatrix} \lambda_{kk} \\ \lambda_{vk} \\ \lambda_{kv} \\ \lambda_{vv} \\ \lambda_{vo} \\ \lambda_{ov} \\ \lambda_{vp} \\ \lambda_{pv} \\ \lambda_{pk} \\ \lambda_{kp} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{L}$$

Súčinitele "vzperných dĺžok" pre
vlastné tvary priečneho kmitania:

$$\beta_{VL.vlk_i} := \sqrt{\frac{1}{k_{ii.VL.vlk_i}}}$$

$$\beta_{VL.vlk} =$$

	1
1	1
2	0.691
3	0.691
4	0.493
5	1.926
6	1.926
7	0.985
8	0.985
9	2
10	2

Všeobecne platný vzorec (3.14)
pre koeficienty k_{ij} ($i=1,2,3$):

$$k_{ii.vlk_i} := \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{\int_0^L \left(\frac{d^4}{dx^4} f_{vlk(x)_i}\right) \cdot f_{vlk(x)_i} dx}{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f_{vlk(x)_i} \cdot f_{vlk(x)_i} dx}$$

$$k_{ii.vlk} =$$

	1
1	1
2	2.092
3	2.092
4	4.123
5	-1.459
6	-1.459
7	1.031
8	1.031
9	0.25
10	0.25

Súčinitele "vzperných dĺžok" pre vl. tvary priečneho kmitania: $\beta_{vlk_i} := \sqrt{\frac{1}{k_{ii.vlk_i}}}$

$$\beta_{vlk} =$$

	1
1	1
2	0.691
3	0.691
4	0.493
5	0.828i
6	0.828i
7	0.985
8	0.985
9	2
10	2

Výpočet koeficientov k_{ij} a k_{ji} ($i=1,2,3$; $j=1,2,3$)
podľa (3.15):

$$k_{ij_{i,j}} := \frac{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f_{vlk(x)_i} \cdot f_{vlk(x)_j} dx}{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f_{vlk(x)_j} \cdot f_{vlk(x)_j} dx}$$

$$k_{ji_{i,j}} := \frac{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f_{vlk(x)_j} \cdot f_{vlk(x)_i} dx}{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f_{vlk(x)_i} \cdot f_{vlk(x)_i} dx}$$

$$k_{ij} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.84	0.837	0.55	-3.963	-10.796	2.734	2.732	3.395	3.395
2	0.974	1	0.685	0.586	-5.784	4.268	3.824	-0.19	0.738	4.15
3	0.976	0.689	1	0.588	1.571	-15.799	-0.19	3.833	4.162	0.74
4	1.42	1.305	1.302	1	1.836	5	0.281	0.281	1.145	1.145
5	-0.456	-0.307	-0.435	-0.229	1	11.16	-0.76	-2.446	-2.631	-1.193
6	-0.167	-0.16	-0.112	-0.084	1.504	1	-0.898	-0.279	-0.438	-0.966
7	0.039	0.111	-0.04	0.027	-1.772	5.102	1	-0.984	-0.815	0.878
8	0.039	-0.04	0.111	0.027	1.874	-4.83	-0.985	1	0.878	-0.816
9	0.212	0.159	0.191	0.111	-0.649	-3.898	0.463	0.888	1	0.637
10	0.212	0.191	0.159	0.111	-1.431	-1.767	0.889	0.463	0.637	1

$$k_{ji} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.974	0.976	1.42	-0.456	-0.167	0.039	0.039	0.212	0.212
2	0.84	1	0.689	1.305	-0.307	-0.16	0.111	-0.04	0.159	0.191
3	0.837	0.685	1	1.302	-0.435	-0.112	-0.04	0.111	0.191	0.159
4	0.55	0.586	0.588	1	-0.229	-0.084	0.027	0.027	0.111	0.111
5	-3.963	-5.784	1.571	1.836	1	1.504	-1.772	1.874	-0.649	-1.431
6	-10.796	4.268	-15.799	5	11.16	1	5.102	-4.83	-3.898	-1.767
7	2.734	3.824	-0.19	0.281	-0.76	-0.898	1	-0.985	0.463	0.889
8	2.732	-0.19	3.833	0.281	-2.446	-0.279	-0.984	1	0.888	0.463
9	3.395	0.738	4.162	1.145	-2.631	-0.438	-0.815	0.878	1	0.637
10	3.395	4.15	0.74	1.145	-1.193	-0.966	0.878	-0.816	0.637	1

Výpočet súčiniteľov α_{zw} resp. α_{yw} pre funkcie vlastných tvarov priečného kmitania:

$$\alpha_{vkl_{i,j}} := k_{ij,i,j} \cdot k_{ji,i,j}$$

$$\alpha_{vkl} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.817	0.817	0.78	1.805	1.805	0.106	0.106	0.721	0.721
2	0.817	1	0.472	0.765	1.776	-0.683	0.425	0.008	0.117	0.794
3	0.817	0.472	1	0.765	-0.683	1.776	0.008	0.425	0.794	0.117
4	0.78	0.765	0.765	1	-0.421	-0.421	0.008	0.008	0.127	0.127
5	1.805	1.776	-0.683	-0.421	1	16.783	1.348	-4.583	1.707	1.707
6	1.805	-0.683	1.776	-0.421	16.783	1	-4.583	1.348	1.707	1.707
7	0.106	0.425	0.008	0.008	1.348	-4.583	1	0.97	-0.378	0.78
8	0.106	0.008	0.425	0.008	-4.583	1.348	0.97	1	0.78	-0.378
9	0.721	0.117	0.794	0.127	1.707	1.707	-0.378	0.78	1	0.405
10	0.721	0.794	0.117	0.127	1.707	1.707	0.78	-0.378	0.405	1

Súčinitele α_{zw} resp. α_{yw} uvedené v prEN 1999-1-1 prebraté od Březinu, ktorý sa odvoláva na výsledky Goľdenvejzera:

$$\alpha_{EC} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.817	0.817	0.78	1.318	1.318	0.11	0.11	0.72	0.72
2	0.817	1	1.45	0.766	1.469	-0.07	-0.49	0.01	0.12	0.23
3	0.817	1.45	1	0.766	-0.07	1.469	0.01	-0.49	0.23	0.12
4	0.78	0.766	0.766	1	-0.114	-0.114	0.01	0.01	0.13	0.13
5	1.318	1.469	-0.07	-0.114	1	0.89	-6.88	-2.86	1	0.63
6	1.318	-0.07	1.469	-0.114	0.89	1	-2.86	-6.88	0.63	1
7	0.11	-0.49	0.01	0.01	-6.88	-2.86	1	0.34	7.4	0.78
8	0.11	0.01	-0.49	0.01	-2.86	-6.88	0.34	1	0.78	7.4
9	0.72	0.12	0.23	0.13	1	0.63	7.4	0.78	1	0.41
10	0.72	0.23	0.12	0.13	0.63	1	0.78	7.4	0.41	1

Vlastné tvary straty stability jednopolových nosníkov rôzne podopretých a výpočet súčiniteľov α_{zw} resp. α_{yw}

Diferenciálna rovnica rovnováhy ideálneho prúta s konštantným prierezom a osovou silou je v tvare:

$$\frac{d^4}{dx^4} w(x) - k^2 \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0 \quad \text{kde: } k^2 = \frac{N}{E \cdot I}$$

Okrajové podmienky:

- K- kĺb
- V- votknutie
- O- voľný koniec
- P- posuvné votknutie

Všeobecné riešenie: $w(x) = C_1 \cdot \sin(k \cdot x) + C_2 \cdot \cos(k \cdot x) + C_3 \cdot x + C_4$

Hodnota kritickej sily: $N_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(\beta \cdot L)^2} = k^2 \cdot E \cdot I \quad \rightarrow \quad k = \frac{\pi}{\beta \cdot L} \quad \beta := m$

Okrajové podmienky K-K:

$$M_{kk}(k_{kk}, L) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k_{kk}^2 & 0 & 0 \\ \sin(k_{kk} \cdot L) & \cos(k_{kk} \cdot L) & L & 1 \\ -k_{kk}^2 \cdot \sin(k_{kk} \cdot L) & -k_{kk}^2 \cdot \cos(k_{kk} \cdot L) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplikovaním 4 okrajových podmienok vznikne sústava 4 rovníc pre hľadané konštanty $C_1 \sim C_4$. Determinant matice z tejto sústavy rovníc je:

$$|M_{kk}(k_{kk}, L)| \rightarrow (-k_{kk}^4) \cdot \sin(k_{kk} \cdot m) \cdot m$$

Z podmienky existencie netriviálneho riešenia dostávame charak. rovnicu.

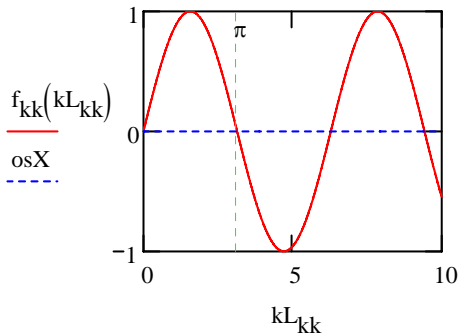
Charakteristická rovnica: $\sin(k_{kk} \cdot L) = 0$

$$f_{kk}(kL_{kk}) := \sin(kL_{kk}) \quad \text{osX} := 0$$

$k_{kk} := 3$ Given $(-k_{kk}^4) \cdot \sin(k_{kk}) = 0$

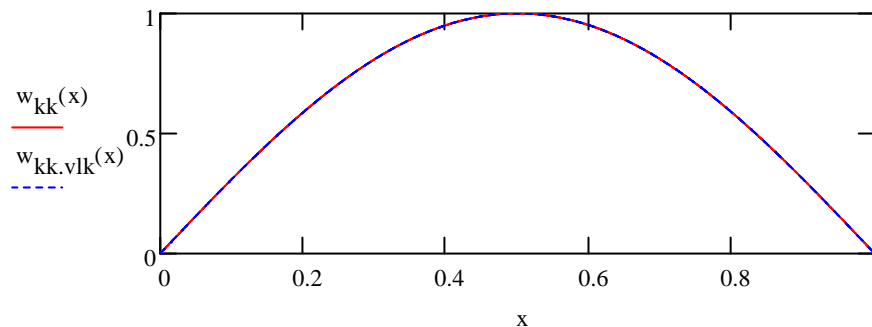
$k_{kk} := \text{Find}(k_{kk}) \quad k_{kk} = 3.142$

$\beta_{kk} := \frac{\pi}{k_{kk}} \quad \beta_{kk} = 1 \quad C_{1kk} := 1$



Vlastný tvar straty stability: Vlastný tvar pr. kmitania:

$$w_{kk}(x) := L \cdot C_{1kk} \cdot \sin\left(\frac{k_{kk} \cdot x}{L}\right) \quad w_{kk.vlk}(x) := L \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{L}\right)$$



Okrajové podmienky V-K:

Aplikovanie okrajových podmienok (OP):

$$M_{vk}(k_{vk}, L) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_{vk} & 0 & 1 & 0 \\ \sin(k_{vk} \cdot L) & \cos(k_{vk} \cdot L) & L & 1 \\ -k_{vk}^2 \cdot \sin(k_{vk} \cdot L) & -k_{vk}^2 \cdot \cos(k_{vk} \cdot L) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_{vk}(k_{vk}, L)| \rightarrow (-k_{vk}^3) \cdot \cos(k_{vk} \cdot m) \cdot m + k_{vk}^2 \cdot \sin(k_{vk} \cdot m)$$

Charakteristická rovnica:

$$(-k_{vk}^3) \cdot \cos(k_{vk}) + k_{vk}^2 \cdot \sin(k_{vk}) = 0$$

$$k_{vk} := 4$$

Given $(-k_{vk}^3) \cdot \cos(k_{vk}) + k_{vk}^2 \cdot \sin(k_{vk}) = 0$

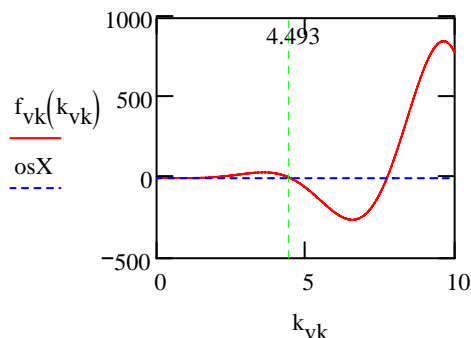
$$k_{vk} := \text{Find}(k_{vk}) \quad k_{vk} = 4.493$$

$$\beta_{vk} := \frac{\pi}{k_{vk}} \quad \beta_{vk} = 0.699$$

$$C_{1vk} := 0.217 \quad C_{2vk} := -C_{1vk} \cdot \frac{\sin(k_{vk})}{\cos(k_{vk})} \quad C_{2vk} = -0.975$$

$$C_{3vk} := -C_{1vk} \cdot k_{vk} \quad C_{3vk} = -0.975 \quad C_{4vk} := -C_{2vk} \quad C_{4vk} = 0.975$$

$$f_{vk}(k_{vk}) := (-k_{vk}^3) \cdot \cos(k_{vk}) + k_{vk}^2 \cdot \sin(k_{vk})$$



Vlastný tvar straty stability:

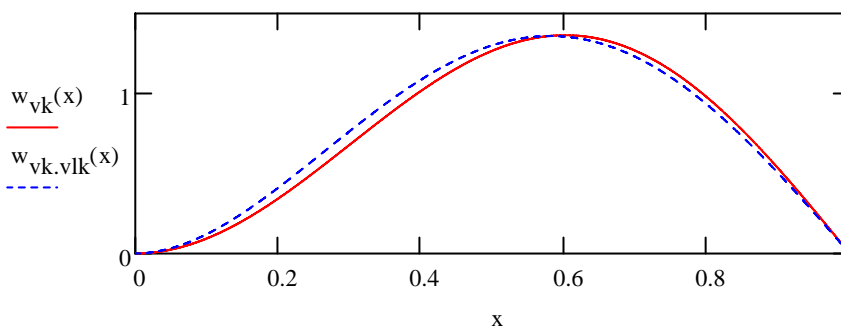
$$w_{vk}(x) := \left(C_{1vk} \cdot \sin\left(\frac{k_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{2vk} \cdot \cos\left(\frac{k_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{3vk} \cdot \frac{x}{L} + C_{4vk} \right) \cdot L$$

Funkcia symetrická k predošlej funkcií vzhľadom na priamku $x=0.5L$:

$$w_{vk, \text{sym}}(x) := \left[C_{1vk} \cdot \sin\left[\frac{k_{vk} \cdot (1m - x)}{L}\right] + C_{2vk} \cdot \cos\left[\frac{k_{vk} \cdot (1m - x)}{L}\right] + C_{3vk} \cdot \frac{1m - x}{L} + C_{4vk} \right] \cdot L$$

Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{vk, vIk}(x) := \left(C_{1vk, vIk} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vk, vIk} \cdot x}{L}\right) + C_{2vk, vIk} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vk, vIk} \cdot x}{L}\right) + C_{3vk, vIk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vk, vIk} \cdot x}{L}\right) + C_{4vk, vIk} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vk, vIk} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$



Okrajové podmienky K-V:

$$M_{kv}(k_{kv}, L) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k_{kv}^2 & 0 & 0 \\ \sin(k_{kv} \cdot L) & \cos(k_{kv} \cdot L) & L & 1 \\ k_{kv} \cdot \cos(k_{kv} \cdot L) & -k_{kv} \cdot \sin(k_{kv} \cdot L) & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_{kv}(k_{kv}, L)| \rightarrow (-\sin(k_{kv} \cdot m)) \cdot k_{kv}^2 + k_{kv}^3 \cdot \cos(k_{kv} \cdot m) \cdot m$$

Charakteristická rovnica:

$$(-\sin(k_{kv})) \cdot k_{kv}^2 + k_{kv}^3 \cdot \cos(k_{kv}) = 0$$

$$k_{kv} := 4$$

Given $(-\sin(k_{kv})) \cdot k_{kv}^2 + k_{kv}^3 \cdot \cos(k_{kv}) = 0$

$$k_{kv} := \text{Find}(k_{kv}) \quad \boxed{k_{kv} = 4.493}$$

$$\beta_{kv} := \frac{\pi}{k_{kv}} \quad \beta_{kv} = 0.699$$

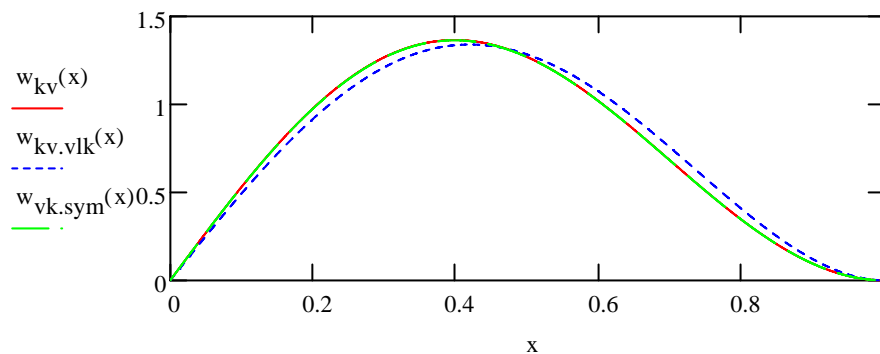
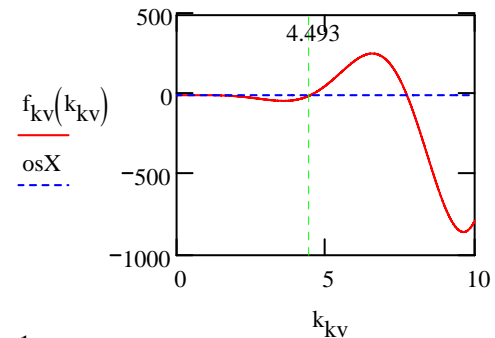
$$C_{1kv} := 1 \quad C_{3kv} := -C_{1kv} \cdot \frac{\sin(k_{kv})}{L} \quad C_{3kv} = 0.976 \frac{1}{m}$$

$$C_{2kv} := 0 \quad C_{4kv} := -C_{2kv} \quad C_{4kv} = 0$$

Vlastný tvar straty stability: $w_{kv}(x) := \left(C_{1kv} \cdot \sin\left(\frac{k_{kv} \cdot x}{L}\right) + C_{3kv} \cdot x \right) \cdot L$

Vlastný tvar priečného kmitania: $w_{kv.vlk}(x) := \left(C_{2kv.vlk} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{kv.vlk} \cdot x}{L}\right) + C_{4kv.vlk} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{kv.vlk} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$

$$f_{kv}(k_{kv}) := (-\sin(k_{kv})) \cdot k_{kv}^2 + k_{kv}^3 \cdot \cos(k_{kv})$$



Okrajové podmienky V-V:

$$M_{VV}(k_{VV}, L) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_{VV} & 0 & 1 & 0 \\ \sin(k_{VV} \cdot L) & \cos(k_{VV} \cdot L) & L & 1 \\ k_{VV} \cdot \cos(k_{VV} \cdot L) & -k_{VV} \cdot \sin(k_{VV} \cdot L) & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_{VV}(k_{VV}, L)| \rightarrow k_{VV} - 2 \cdot k_{VV} \cdot \cos(k_{VV} \cdot m) - k_{VV}^2 \cdot \sin(k_{VV} \cdot m) \cdot m + \sin(k_{VV} \cdot m)^2 \cdot k_{VV} + k_{VV} \cdot \cos(k_{VV} \cdot m)^2$$

Charakteristická rovnica: $k_{VV} \cdot \cos(k_{VV})^2 - 2 \cdot k_{VV} \cdot \cos(k_{VV}) + k_{VV} + k_{VV} \cdot \sin(k_{VV})^2 - k_{VV}^2 \cdot \sin(k_{VV}) = 0$

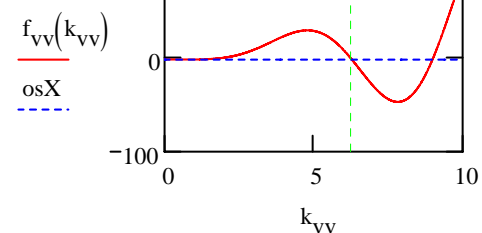
$$f_{VV}(k_{VV}) := \left(\begin{array}{l} k_{VV} \cdot \cos(k_{VV})^2 - 2 \cdot k_{VV} \cdot \cos(k_{VV}) \dots \\ + k_{VV} + k_{VV} \cdot \sin(k_{VV})^2 - k_{VV}^2 \cdot \sin(k_{VV}) \end{array} \right)$$

$$k_{VV} := 6 \quad \text{Given}$$

$$k_{VV} \cdot \cos(k_{VV})^2 - 2 \cdot k_{VV} \cdot \cos(k_{VV}) + k_{VV} \dots = 0$$

$$+ k_{VV} \cdot \sin(k_{VV})^2 - k_{VV}^2 \cdot \sin(k_{VV})$$

$$k_{VV} := \text{Find}(k_{VV}) \quad \boxed{k_{VV} = 6.283}$$



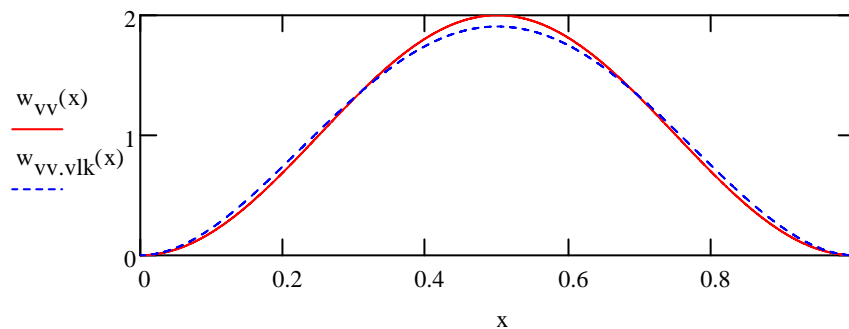
$$\beta_{vv} := \frac{\pi}{k_{vv}} \quad \beta_{vv} = 0.5 \quad C_{2vv} := -1 \quad C_{1vv} := C_{2vv} \cdot \frac{\cos(k_{vv}) - 1}{\sin(k_{vv}) - k_{vv}}$$

$$C_{1vv} = 0 \quad C_{3vv} := -C_{1vv} \cdot k_{vv} \quad C_{4vv} := -C_{2vv}$$

Vlastný tvar straty stability: $w_{vv}(x) := L \cdot \left(C_{2vv} \cdot \cos\left(\frac{k_{vv} \cdot x}{L}\right) + C_{4vv} \right)$

Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{vv.vlk}(x) := \left(C_{1vv.vlk} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vv.vlk} \cdot x}{L}\right) + C_{2vv.vlk} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vv.vlk} \cdot x}{L}\right) \dots + C_{3vv.vlk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vv.vlk} \cdot x}{L}\right) + C_{4vv.vlk} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vv.vlk} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$



Okrajové podmienky V-O:

$$M_{vo}(k_{vo}, L) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_{vo} & 0 & 1 & 0 \\ -k_{vo}^2 \cdot \sin(k_{vo} \cdot L) & -k_{vo}^2 \cdot \cos(k_{vo} \cdot L) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{vo}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad |M_{vo}(k_{vo}, L)| \rightarrow k_{vo}^5 \cdot \cos(k_{vo} \cdot m)$$

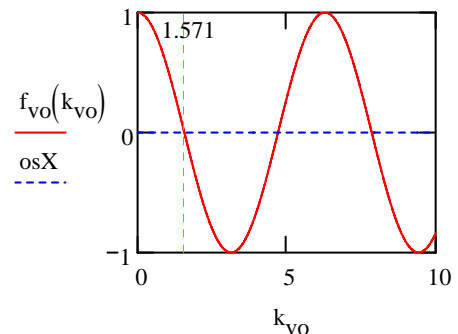
Charakteristická rovnica: $\cos(k_{vo} \cdot L) = 0$

$$f_{vo}(k_{vo}) := \cos(k_{vo} \cdot L)$$

$$k_{vo} := 1 \quad \text{Given} \quad \cos(k_{vo}) = 0$$

$$k_{vo} := \text{Find}(k_{vo}) \quad \boxed{k_{vo} = 1.571}$$

$$\beta_{vo} := \frac{\pi}{k_{vo}} \quad \beta_{vo} = 2 \quad C_{2vo} := -1$$



Vlastný tvar straty stability:

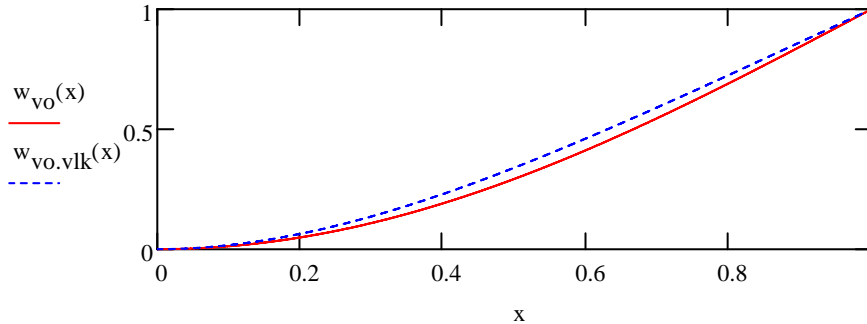
$$w_{vo}(x) := L \cdot \left(C_{2vo} \cdot \cos\left(\frac{k_{vo} \cdot x}{L}\right) - C_{2vo} \right)$$

Funkcia symetrická k predošlej funkcií vzhľadom na priamku $x=0.5L$:

$$w_{vo.sym}(x) := L \cdot \left[C_{2vo} \cdot \cos\left(\frac{k_{vo} \cdot (1m - x)}{L}\right) - C_{2vo} \right]$$

Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{vo.vlk}(x) := \left(C_{1vo.vlk} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vo.vlk} \cdot x}{L}\right) + C_{2vo.vlk} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vo.vlk} \cdot x}{L}\right) \dots + C_{3vo.vlk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vo.vlk} \cdot x}{L}\right) + C_{4vo.vlk} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vo.vlk} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$



Okrajové podmienky O-V:

$$M_{OV}(k_{OV}, L) := \begin{pmatrix} 0 & -k_{OV}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{OV}^2 & 0 \\ \sin(k_{OV} \cdot L) & \cos(k_{OV} \cdot L) & L & 1 \\ k_{OV} \cdot \cos(k_{OV} \cdot L) & -k_{OV} \cdot \sin(k_{OV} \cdot L) & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_{OV}(k_{OV}, L)| \rightarrow k_{OV}^5 \cdot \cos(k_{OV} \cdot m)$$

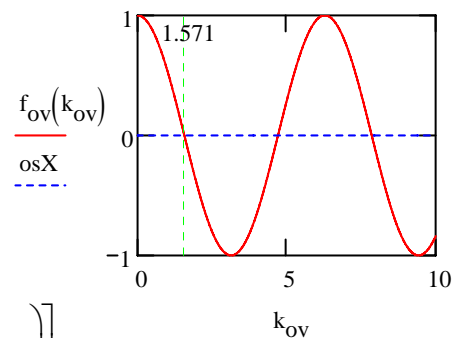
$$f_{OV}(k_{OV}) := \cos(k_{OV} \cdot L)$$

Charakteristická rovnica: $\cos(k_{OV} \cdot L) = 0$

$k_{OV} := 1$ Given $\cos(k_{OV}) = 0$

$k_{OV} := \text{Find}(k_{OV})$ $k_{OV} = 1.571$

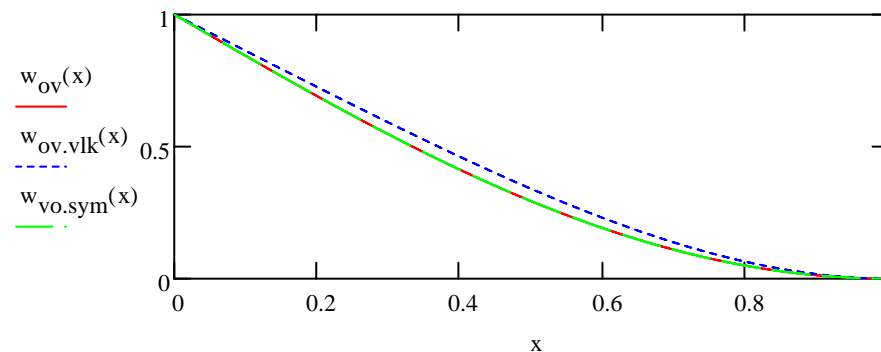
$\beta_{OV} := \frac{\pi}{k_{OV}}$ $\beta_{OV} = 2$ $C_{1ov} := -1$



Vlastný tvar straty stability: $w_{OV}(x) := L \cdot \left[C_{1ov} \cdot \left(\sin\left(\frac{k_{OV} \cdot x}{L}\right) - 1 \right) \right]$

Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{ov.vlk}(x) := \left(C_{1ov.vlk} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{ov.vlk} \cdot x}{L}\right) + C_{2ov.vlk} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{ov.vlk} \cdot x}{L}\right) \dots + C_{3ov.vlk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{ov.vlk} \cdot x}{L}\right) + C_{4ov.vlk} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{ov.vlk} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$



Okrajové podmienky V-P:

$$M_{vp}(k_{vp}, L) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_{vp} & 0 & 1 & 0 \\ k_{vp} \cdot \cos(k_{vp} \cdot L) & -k_{vp} \cdot \sin(k_{vp} \cdot L) & 1 & 0 \\ -k_{vp}^3 \cdot \cos(k_{vp} \cdot L) & k_{vp}^3 \cdot \sin(k_{vp} \cdot L) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|M_{vp}(k_{vp}, L)| \rightarrow k_{vp}^4 \cdot \sin(k_{vp} \cdot m)$$

$$f_{vp}(k_{vp}) := \sin(k_{vp} \cdot L)$$

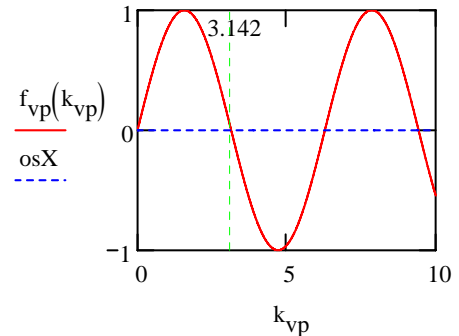
Charakteristická rovnica: $k_{vp}^4 \cdot \sin(k_{vp} \cdot L) = 0$

$k_{vp} := 2$ Given $\sin(k_{vp}) = 0$

$k_{vp} := \text{Find}(k_{vp})$ $k_{vp} = 3.142$

$\beta_{vp} := \frac{\pi}{k_{vp}}$ $\beta_{vp} = 1$

$C_{2vp} := -0.5$ $C_{1vp} := C_{2vp} \cdot \frac{\sin(k_{vp})}{\cos(k_{vp})}$ $C_{1vp} = 0$



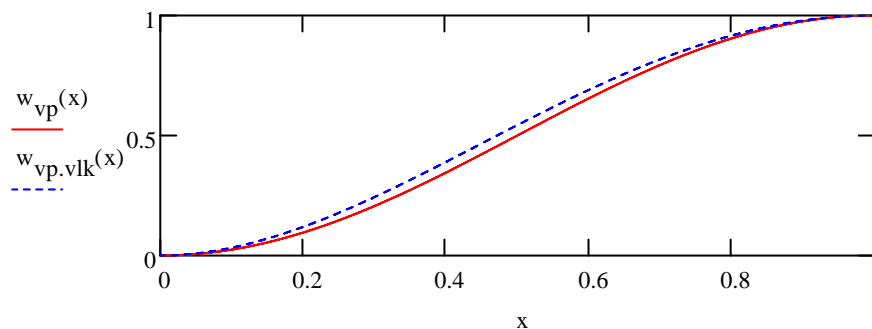
Vlastný tvar straty stability: $w_{vp}(x) := \left(C_{2vp} \cdot \cos\left(\frac{k_{vp} \cdot x}{L}\right) - C_{2vp} \right) \cdot L$

Funkcia symetrická k predošlej funkcií vzhľadom na priamku $x=0.5L$:

$$w_{vp, \text{sym}}(x) := \left[C_{2vp} \cdot \cos\left[\frac{k_{vp} \cdot (1m - x)}{L}\right] - C_{2vp} \right] \cdot L$$

Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{vp, \text{vfk}}(x) := \left(C_{1vp, \text{vfk}} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{vp, \text{vfk}} \cdot x}{L}\right) + C_{2vp, \text{vfk}} \cdot \sinh\left(\frac{\lambda_{vp, \text{vfk}} \cdot x}{L}\right) \dots + C_{3vp, \text{vfk}} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{vp, \text{vfk}} \cdot x}{L}\right) + C_{4vp, \text{vfk}} \cdot \sin\left(\frac{\lambda_{vp, \text{vfk}} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$



Okrajové podmienky P-V:

$$M_{pv}(k_{pv}, L) := \begin{pmatrix} k_{pv} & 0 & 1 & 0 \\ -k_{pv}^3 & 0 & 0 & 0 \\ k_{pv} \cdot \cos(k_{pv} \cdot L) & -k_{pv} \cdot \sin(k_{pv} \cdot L) & 1 & 0 \\ \sin(k_{pv} \cdot L) & \cos(k_{pv} \cdot L) & L & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M_{pv}(k_{pv}, L)| \rightarrow k_{pv}^4 \cdot \sin(k_{pv} \cdot m)$$

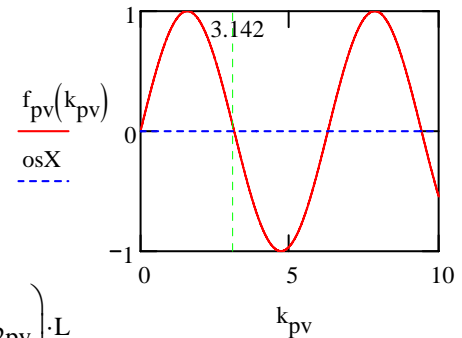
Charakteristická rovnica: $k_{pv}^4 \cdot \sin(k_{pv} \cdot L) = 0$

$f_{pv}(k_{pv}) := \sin(k_{pv} \cdot L)$

$k_{pv} := 2$ Given $\sin(k_{pv}) = 0$

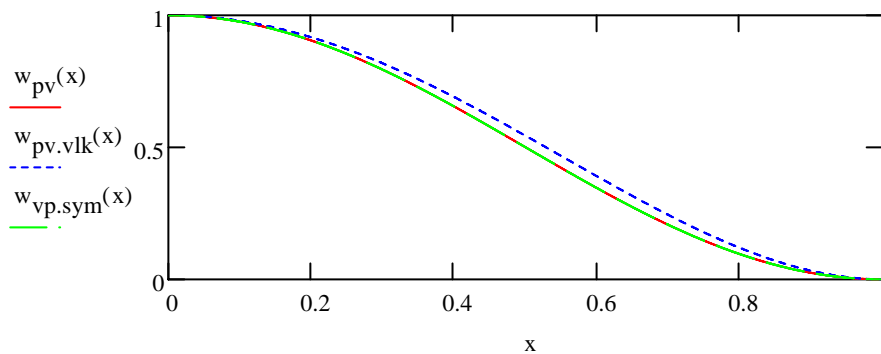
$k_{pv} := \text{Find}(k_{pv})$ $k_{pv} = 3.142$

$\beta_{pv} := \frac{\pi}{k_{pv}}$ $\beta_{pv} = 1$ $C_{2pv} := 0.5$



Vlastný tvar straty stability: $w_{pv}(x) := \left(C_{2pv} \cdot \cos\left(\frac{k_{pv} \cdot x}{L}\right) + C_{2pv} \right) \cdot L$

Vlastný tvar priečného kmitania: $w_{pv.vlk}(x) := \left(C_{1pv.vlk} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda_{pv.vlk} \cdot x}{L}\right) + C_{3pv.vlk} \cdot \cos\left(\frac{\lambda_{pv.vlk} \cdot x}{L}\right) \right) L$



Okrajové podmienky P-K:

$$M_{pk}(k_{pk}, L) := \begin{pmatrix} k_{pk} & 0 & 1 & 0 \\ -k_{pk}^3 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(k_{pk} \cdot L) & \cos(k_{pk} \cdot L) & L & 1 \\ -k_{pk}^2 \cdot \sin(k_{pk} \cdot L) & -k_{pk}^2 \cdot \cos(k_{pk} \cdot L) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|M_{pk}(k_{pk}, L)| \rightarrow (-k_{pk}^5) \cdot \cos(k_{pk} \cdot m)$

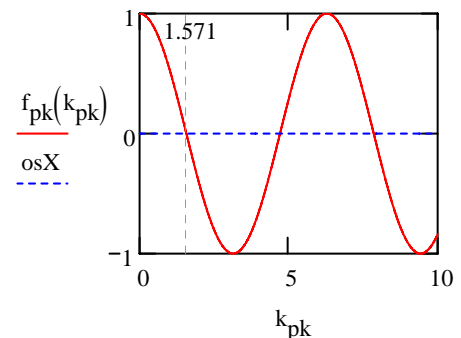
Charakteristická rovnica: $(-k_{pk}^5) \cdot \cos(k_{pk} \cdot L) = 0$

$f_{pk}(k_{pk}) := \cos(k_{pk} \cdot L)$

$k_{pk} := 1$ Given $\cos(k_{pk}) = 0$

$k_{pk} := \text{Find}(k_{pk})$ $k_{pk} = 1.571$

$\beta_{pk} := \frac{\pi}{k_{pk}}$ $\beta_{pk} = 2$ $C_{2pk} := 1$



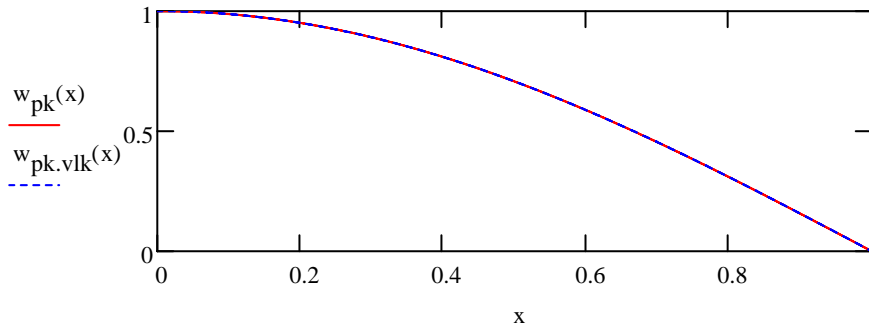
Vlastný tvar straty stability: $w_{pk}(x) := \left(C_{2pk} \cdot \cos\left(\frac{k_{pk} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$

Funkcia symetrická k predošlej funkcií vzhľadom na priamku $x=0.5L$:

$w_{pk.sym}(x) := \left[C_{2pk} \cdot \cos\left[\frac{k_{pk} \cdot (1m - x)}{L}\right] \right] \cdot L$

Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{pk.vlk}(x) := \cos\left(\frac{\lambda_{pk.vlk} \cdot x}{L}\right) L$$



Okrajové podmienky K-P:

$$M_{kp}(k_{kp}, L) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -k_{kp}^2 & 0 & 0 \\ k_{kp} \cdot \cos(k_{kp} \cdot L) & -k_{kp} \cdot \sin(k_{kp} \cdot L) & 1 & 0 \\ -k_{kp}^3 \cdot \cos(k_{kp} \cdot L) & k_{kp}^3 \cdot \sin(k_{kp} \cdot L) & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |M_{kp}(k_{kp}, L)| \rightarrow (-k_{kp}^5) \cdot \cos(k_{kp} \cdot L)$$

Charakteristická rovnica: $(-k_{kp}^5) \cdot \cos(k_{kp} \cdot L) = 0$

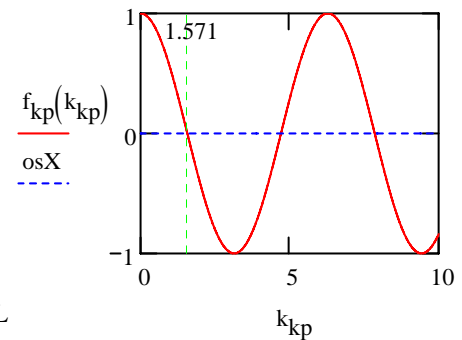
$$f_{kp}(k_{kp}) := \cos(k_{kp} \cdot L)$$

$$k_{kp} := 1 \quad \text{Given} \quad \cos(k_{kp}) = 0$$

$$k_{kp} := \text{Find}(k_{kp}) \quad \boxed{k_{kp} = 1.571}$$

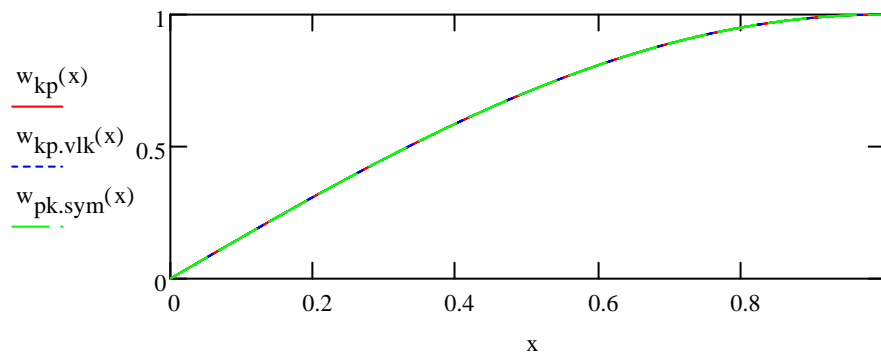
$$\beta_{kp} := \frac{\pi}{k_{kp}} \quad \beta_{kp} = 2 \quad C_{1kp} := 1$$

$$\text{Vlastný tvar straty stability: } w_{kp}(x) := \left(C_{1kp} \cdot \sin\left(\frac{k_{kp} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L$$



Vlastný tvar priečného kmitania:

$$w_{kp.vlk}(x) := \sin\left(\frac{\lambda_{kp.vlk} \cdot x}{L}\right) L$$



Výpočet súčiniteľov α_{zw} resp. α_{yw} pre funkcie vlastných tvarov straty stability :

$i := 1, 2 \dots 10 \quad j := 1, 2 \dots 10$

ORIGIN := 1

Vektor fundamentálnych funkcií (vlastných tvarov) :

Vektor vlastných čísiel:

$$f(x) := \begin{bmatrix} L \cdot C_{1kk} \cdot \sin\left(\frac{k_{kk} \cdot x}{L}\right) \\ \left(C_{1vk} \cdot \sin\left(\frac{k_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{2vk} \cdot \cos\left(\frac{k_{vk} \cdot x}{L}\right) + C_{3vk} \cdot \frac{x}{L} + C_{4vk} \right) \cdot L \\ \left(C_{1kv} \cdot \sin\left(\frac{k_{kv} \cdot x}{L}\right) + C_{3kv} \cdot x \right) \cdot L \\ L \cdot \left(C_{2vv} \cdot \cos\left(\frac{k_{vv} \cdot x}{L}\right) + C_{4vv} \right) \\ L \cdot \left(C_{2vo} \cdot \cos\left(\frac{k_{vo} \cdot x}{L}\right) - C_{2vo} \right) \\ L \cdot \left[C_{1ov} \cdot \left(\sin\left(\frac{k_{ov} \cdot x}{L}\right) - 1 \right) \right] \\ \left(C_{2vp} \cdot \cos\left(\frac{k_{vp} \cdot x}{L}\right) - C_{2vp} \right) \cdot L \\ \left(C_{2pv} \cdot \cos\left(\frac{k_{pv} \cdot x}{L}\right) + C_{2pv} \right) \cdot L \\ \left(C_{2pk} \cdot \cos\left(\frac{k_{pk} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L \\ \left(C_{1kp} \cdot \sin\left(\frac{k_{kp} \cdot x}{L}\right) \right) \cdot L \end{bmatrix}$$

$$\lambda := \begin{bmatrix} k_{kk} \\ k_{vk} \\ k_{kv} \\ k_{vv} \\ k_{vo} \\ k_{ov} \\ k_{vp} \\ k_{pv} \\ k_{pk} \\ k_{kp} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{L}$$

	1
1	3.142
2	4.493
3	4.493
4	6.283
5	1.571
6	1.571
7	3.142
8	3.142
9	1.571
10	1.571

$$\lambda = \frac{1}{m}$$

$$N_{cr} = k_{ii} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{\beta^2 \cdot L^2} \rightarrow k_{ii} = \frac{1}{\beta^2}$$

Všeobecne platný vzorec (3.14) pre koeficienty k_{ii} ($i=1,2,3$):

$$k_{ii} := \frac{L^2 \int_0^L \left(\frac{d^4}{dx^4} f(x)_i \right) \cdot f(x)_i \, dx}{\pi^2 \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f(x)_i \cdot f(x)_i \, dx}$$

	1
1	1
2	2.046
3	2.046
4	4
5	0.25
6	0.25
7	1
8	1
9	0.25
10	0.25

$$\beta_{stab_i} := \sqrt{\frac{1}{k_{ii}}}$$

	1
1	1
2	0.699
3	0.699
4	0.5
5	2
6	2
7	1
8	1
9	2
10	2

Výpočet koeficientov k_{ij} a k_{ji} ($i=1,2,3; j=1,2,3$) podľa (3.15):

$$k_{ij,i,j} := \frac{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f(x)_i \cdot f(x)_j \cdot dx}{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f(x)_j \cdot f(x)_j \cdot dx} \qquad k_{ji,i,j} := \frac{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f(x)_j \cdot f(x)_i \cdot dx}{\int_0^L \frac{d^2}{dx^2} f(x)_i \cdot f(x)_i \cdot dx}$$

 $k_{ij} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.624	0.624	0.424	-6.213	-6.213	2.546	2.546	3.395	3.395
2	1.214	1	0.554	0.567	-12.913	4.137	5	-0.571	0.9	5.559
3	1.216	0.556	1	0.567	4.142	-12.927	-0.572	5.005	5.565	0.901
4	1.698	1.165	1.164	1	4.97	4.97	-0	0	1.358	1.358
5	-0.212	-0.116	-0.145	-0.085	1	2.33	-0.424	-0.849	-1	-0.637
6	-0.212	-0.145	-0.116	-0.085	2.33	1	-0.849	-0.424	-0.637	-1
7	-0	0.073	-0.073	-0	-3.107	3.107	1	-1	-0.849	0.849
8	0	-0.073	0.073	0	3.107	-3.107	-1	1	0.849	-0.849
9	0.212	0.116	0.145	0.085	-1	-2.33	0.424	0.849	1	0.637
10	0.212	0.145	0.116	0.085	-2.33	-1	0.849	0.424	0.637	1

 $k_{ji} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1.214	1.216	1.698	-0.212	-0.212	-0	0	0.212	0.212
2	0.624	1	0.556	1.165	-0.116	-0.145	0.073	-0.073	0.116	0.145
3	0.624	0.554	1	1.164	-0.145	-0.116	-0.073	0.073	0.145	0.116
4	0.424	0.567	0.567	1	-0.085	-0.085	-0	0	0.085	0.085
5	-6.213	-12.913	4.142	4.97	1	2.33	-3.107	3.107	-1	-2.33
6	-6.213	4.137	-12.927	4.97	2.33	1	3.107	-3.107	-2.33	-1
7	2.546	5	-0.572	-0	-0.424	-0.849	1	-1	0.424	0.849
8	2.546	-0.571	5.005	0	-0.849	-0.424	-1	1	0.849	0.424
9	3.395	0.9	5.565	1.358	-1	-0.637	-0.849	0.849	1	0.637
10	3.395	5.559	0.901	1.358	-0.637	-1	0.849	-0.849	0.637	1

Výpočet súčiniteľov α_{zw} resp. α_{yw} pre funkcie vlastných tvarov straty stability :

$$\alpha_{i,j} := k_{ij,i,j} \cdot k_{ji,i,j}$$

 $\alpha =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0.758	0.758	0.721	1.318	1.318	-0	0	0.721	0.721
2	0.758	1	0.308	0.66	1.494	-0.601	0.367	0.042	0.104	0.808
3	0.758	0.308	1	0.66	-0.601	1.494	0.042	0.367	0.808	0.104
4	0.721	0.66	0.66	1	-0.422	-0.422	0	0	0.115	0.115
5	1.318	1.494	-0.601	-0.422	1	5.428	1.318	-2.637	1	1.483
6	1.318	-0.601	1.494	-0.422	5.428	1	-2.637	1.318	1.483	1
7	-0	0.367	0.042	0	1.318	-2.637	1	1	-0.36	0.721
8	0	0.042	0.367	0	-2.637	1.318	1	1	0.721	-0.36
9	0.721	0.104	0.808	0.115	1	1.483	-0.36	0.721	1	0.405
10	0.721	0.808	0.104	0.115	1.483	1	0.721	-0.36	0.405	1

Súčinitele α_{zw} resp. α_{yw} vypočítané pre funkcie vlastného priečného kmitania:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_{vIk} =$	1	0.817	0.817	0.78	1.805	1.805	0.106	0.106	0.721	0.721
	0.817	1	0.472	0.765	1.776	-0.683	0.425	0.008	0.117	0.794
	0.817	0.472	1	0.765	-0.683	1.776	0.008	0.425	0.794	0.117
	0.78	0.765	0.765	1	-0.421	-0.421	0.008	0.008	0.127	0.127
	1.805	1.776	-0.683	-0.421	1	16.783	1.348	-4.583	1.707	1.707
	1.805	-0.683	1.776	-0.421	16.783	1	-4.583	1.348	1.707	1.707
	0.106	0.425	0.008	0.008	1.348	-4.583	1	0.97	-0.378	0.78
	0.106	0.008	0.425	0.008	-4.583	1.348	0.97	1	0.78	-0.378
	0.721	0.117	0.794	0.127	1.707	1.707	-0.378	0.78	1	0.405
	0.721	0.794	0.117	0.127	1.707	1.707	0.78	-0.378	0.405	1

Súčinitele α_{zw} resp. α_{yw} uvedené v prEN 1999-1-1 prebraté od Březinu, ktorý sa odvoláva na výsledky Gołdenczejera:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_{EC} =$	1	0.817	0.817	0.78	1.318	1.318	0.11	0.11	0.72	0.72
	0.817	1	1.45	0.766	1.469	-0.07	-0.49	0.01	0.12	0.23
	0.817	1.45	1	0.766	-0.07	1.469	0.01	-0.49	0.23	0.12
	0.78	0.766	0.766	1	-0.114	-0.114	0.01	0.01	0.13	0.13
	1.318	1.469	-0.07	-0.114	1	0.89	-6.88	-2.86	1	0.63
	1.318	-0.07	1.469	-0.114	0.89	1	-2.86	-6.88	0.63	1
	0.11	-0.49	0.01	0.01	-6.88	-2.86	1	0.34	7.4	0.78
	0.11	0.01	-0.49	0.01	-2.86	-6.88	0.34	1	0.78	7.4
	0.72	0.12	0.23	0.13	1	0.63	7.4	0.78	1	0.41
	0.72	0.23	0.12	0.13	0.63	1	0.78	7.4	0.41	1

Percentuálny rozdiel medzi súčinitelmi vypočítanými pomocou funkcií vlastného priečného kmitania a funkcií tvarov straty stability:

$$\text{rozdiel}_{i,j} := \frac{\alpha_{vIk_{i,j}} - \alpha_{i,j}}{\alpha_{vIk_{i,j}}} \cdot 100 \quad \text{rozdiel}'_{i,j} := \frac{\alpha_{vIk_{i,j}} - \alpha_{i,j}}{\alpha_{i,j}} \cdot 100$$

$$\text{rozdiel}_{i,j} := \max\left(\left|\text{rozdiel}_{i,j}\right|, \left|\text{rozdiel}'_{i,j}\right|\right)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\text{rozdiel} =$	0	8	8	8	37	37	5820901	5820269	0	0
	8	0	53	16	19	14	16	448	13	2
	8	53	0	16	14	19	448	16	2	13
	8	16	16	0	0	0	7156322	70571452	10	10
	37	19	14	0	0	209	2	74	71	15
	37	14	19	0	209	0	74	2	15	71
	5820901	16	448	7156322	2	74	0	3	5	8
	5820269	448	16	70571452	74	2	3	0	8	5
	0	13	2	10	71	15	5	8	0	0
	0	2	13	10	15	71	8	5	0	0

Percentuálny rozdiel medzi súčiniteľmi vypočítanými pomocou funkcií vlastných tvarov straty stability a Březinom uvedenými súčiniteľmi (použitými v prEN 1999-1-1):

$$\text{rozdiel}_{\text{st.EC}_{i,j}} := \frac{\alpha_{i,j} - \alpha_{\text{EC}_{i,j}}}{\alpha_{i,j}} \cdot 100 \quad \text{rozdiel}_{\text{EC.st}_{i,j}} := \frac{\alpha_{\text{EC}_{i,j}} - \alpha_{i,j}}{\alpha_{\text{EC}_{i,j}}} \cdot 100$$

$$\text{rozdiel}_{\text{st.EC}_{i,j}} := \max\left(\left|\text{rozdiel}_{\text{st.EC}_{i,j}}\right|, \left|\text{rozdiel}_{\text{EC.st}_{i,j}}\right|\right)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	8	8	8	0	0	0018649	0018404	0	0
2	8	0	371	16	2	759	233	320	15	251
3	8	371	0	16	759	2	320	233	251	15
4	8	16	16	0	270	270	2634793	5183109	13	13
5	0	2	759	270	0	510	622	8	0	135
6	0	759	2	270	510	0	8	622	135	0
7	0018649	233	320	2634793	622	8	0	194	2154	8
8	0018404	320	233	5183109	8	622	194	0	8	2154
9	0	15	251	13	0	135	2154	8	0	1
10	0	251	15	13	135	0	8	2154	1	0

Percentuálny rozdiel medzi súčiniteľmi vypočítanými pomocou funkcií tvarov vlastného priečného kmitania a Březinom uvedenými súčiniteľmi (použitými v prEN 1999-1-1):

$$\text{rozdiel}_{\text{vlk.EC}_{i,j}} := \frac{\alpha_{\text{vlk}_{i,j}} - \alpha_{\text{EC}_{i,j}}}{\alpha_{\text{vlk}_{i,j}}} \cdot 100 \quad \text{rozdiel}_{\text{EC.vlk}_{i,j}} := \frac{\alpha_{\text{EC}_{i,j}} - \alpha_{\text{vlk}_{i,j}}}{\alpha_{\text{EC}_{i,j}}} \cdot 100$$

$$\text{rozdiel}_{\text{vlk.EC}_{i,j}} := \max\left(\left|\text{rozdiel}_{\text{vlk.EC}_{i,j}}\right|, \left|\text{rozdiel}_{\text{EC.vlk}_{i,j}}\right|\right)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	37	37	4	4	0	0
2	0	0	207	0	21	876	215	31	2	245
3	0	207	0	0	876	21	31	215	245	2
4	0	0	0	0	269	269	32	32	2	2
5	37	21	876	269	0	1786	610	60	71	171
6	37	876	21	269	1786	0	60	610	171	71
7	4	215	31	32	610	60	0	185	2060	0
8	4	31	215	32	60	610	185	0	0	2060
9	0	2	245	2	71	171	2060	0	0	1
10	0	245	2	2	171	71	0	2060	1	0

PRÍLOHA 2

**PRÍKLAD VÝPOČTU KRITICKEJ OSOVEJ SILY PRIBLIŽNOU METÓDOU PRÚTA
S PRIEREZOM S JEDNOU OSOU SYMETRIE S MOŽNOSŤOU VOĽBY PODOPRETIA**

**ZÁVISLOSTI KRITICKÝCH SÍL OD DĹŽKY PRÚTA S PRIEREZOM S JEDNOU OSOU
SYMETRIE**

**PRÍKLAD VÝPOČTU KRITICKEJ OSOVEJ SILY PRÚTA S NESYMETRICKÝM
PRIEREZOM PRIBLIŽNOU METÓDOU**

Výpočet kritickej osovej sily (pri priestorovom vzpere približnou metódou) prúta s jedno-osovo symetrickým prierezom z príkladu 6.4 str.130 [5] s možnosťou voľby okrajových podmienok

Vstupy:

$$b := 500\text{mm} \quad t_f := 40\text{mm} \quad h_w := 300\text{mm} \quad t_w := 20\text{mm}$$

$$L := 4.5\text{m} \quad E := 210\text{GPa} \quad \nu := 0.3 \quad c := 80\text{mm}$$

Prierezové charakteristiky:

$$H := h_w + t_f \quad H = 340\text{mm}$$

$$A_f := b \cdot t_f \quad A_w := t_w \cdot h_w$$

$$A := A_f + 2 \cdot A_w \quad A = 3.2 \times 10^4 \text{mm}^2$$

$$z_{0,Cg} := \frac{A_f \left(H - \frac{t_f}{2} \right) + 2 \cdot A_w \cdot \frac{h_w}{2}}{A} \quad z_{0,Cg} = 256.25 \text{mm}$$

$$I_y := \frac{1}{12} \cdot b \cdot t_f^3 + A_f \left(H - z_{0,Cg} - \frac{t_f}{2} \right)^2 + 2 \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot t_w \cdot h_w^3 + A_w \left(\frac{h_w}{2} - z_{0,Cg} \right)^2 \right]$$

$$I_z := \frac{1}{12} \cdot t_f \cdot b^3 + 2 \cdot \left[\frac{1}{12} \cdot h_w \cdot t_w^3 + A_w \left(\frac{b}{2} - c - \frac{t_w}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_y = 3.094 \times 10^8 \text{mm}^4 \quad I_z = 7.243 \times 10^8 \text{mm}^4$$

Nahradenie prierezu strednicou: $d := c + \frac{t_w}{2} \quad d = 90\text{mm}$

$$h := h_w + \frac{t_f}{2} \quad h = 320\text{mm} \quad a := \frac{b}{2} - d \quad a = 160\text{mm}$$

Súradnice $y(s)$: $y := \begin{pmatrix} 0.5 \cdot b \\ a \\ a \\ -a \\ -a \\ -0.5 \cdot b \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 250 \\ 160 \\ 160 \\ -160 \\ -160 \\ -250 \end{pmatrix} \text{mm}$

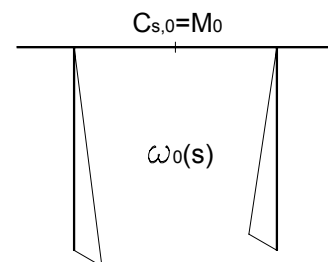
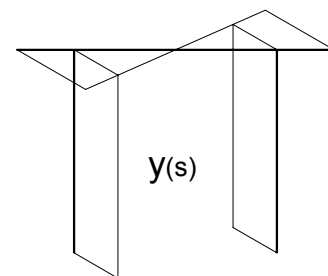
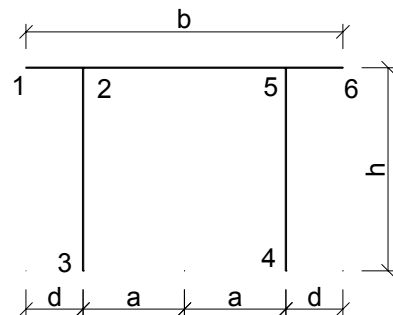
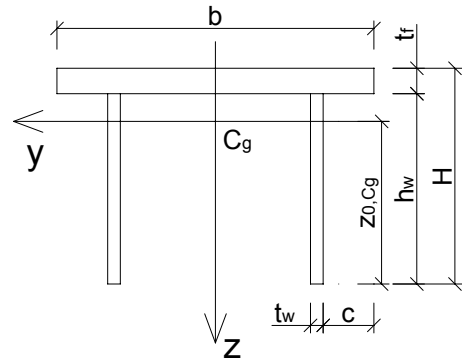
Výsečové súradnice

$\omega_0(s)$ pre zvolený

stred $C_{s,0}$:

$$\omega_0 := \begin{pmatrix} 0\text{mm}^2 \\ 0\text{mm}^2 \\ h \cdot a \\ -h \cdot a \\ 0\text{mm}^2 \\ 0\text{mm}^2 \end{pmatrix} \quad \omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.12 \times 10^4 \\ -5.12 \times 10^4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{mm}^2$$

ORIGIN := 1



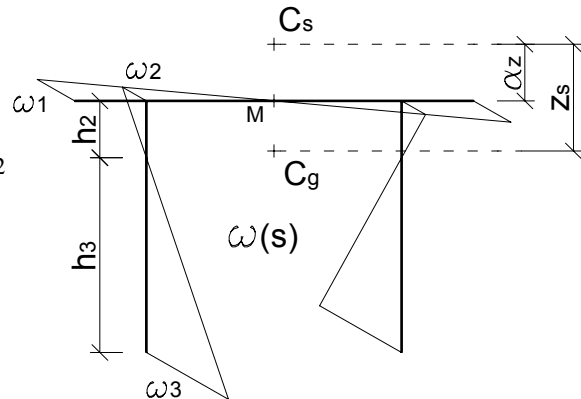
$$\omega(s) = \omega_0(s) - \alpha_z \cdot y(s) \quad \text{kde:} \quad \alpha_z = \frac{\int y(s) \cdot \omega_0(s) dA}{I_z}$$

Poloha stredy šmyku vzhľadom na zvolený stred $C_{s,0}$:

$$\alpha_z := \frac{\left(y_3 \cdot h \cdot \frac{\omega_{03}}{2} + y_4 \cdot h \cdot \frac{\omega_{04}}{2} \right) \cdot t_w}{I_z} \quad \alpha_z = 0.072 \text{ m}$$

Výsledný priebeh výsečovej súradnice $\omega(s)$ vzhľadom na stred šmyku:

$$\omega := \omega_0 - \alpha_z \cdot y \quad \omega = \begin{pmatrix} -1.81 \times 10^4 \\ -1.158 \times 10^4 \\ 3.962 \times 10^4 \\ -3.962 \times 10^4 \\ 1.158 \times 10^4 \\ 1.81 \times 10^4 \end{pmatrix} \text{ mm}^2$$



Poloha stredy šmyku vzhľadom na ťažisko prierezu:

$$z_s := -h + z_0 \cdot C_g - \alpha_z \quad z_s = -136.139 \text{ mm} \quad y_s := 0 \text{ m}$$

Poloha nulovej výsečovej súradnice na stene:

$$h_2 := \frac{h \cdot |\omega_2|}{|\omega_2| + |\omega_3|} \quad h_2 = 0.072 \text{ m} \quad h_3 := h - h_2 \quad h_3 = 0.248 \text{ m}$$

$$\text{Výsečový moment zotrvačnosti:} \quad I_\omega = \int \omega(s)^2 dA = \int \omega(s)^2 \cdot t ds$$

$$I_\omega := \frac{\omega_1 \cdot b}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \omega_1 \cdot t_f^2 + \left(\frac{\omega_2 \cdot h_2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \omega_2 + \frac{\omega_3 \cdot h_3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \omega_3 \right) \cdot 2 \cdot t_w \quad I_\omega = 7.495 \times 10^{12} \text{ mm}^6$$

$$\text{Moment zotrvačnosti vo voľnom krútení:} \quad I_t := \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot h \cdot t_w^3 + b \cdot t_f^3 \right) \quad I_t = 1.237 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

Polárny polomer zotrvačnosti prierezu vzťahnutý k stredy šmyku:

$$i_s := \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A} + y_s^2 + z_s^2} \quad i_s = 0.225 \text{ m}$$

Okrajové podmienky (OP) pre :

ohyb v rovine kolmej na os y (w)

LK_y := "02"

PK_y := "02"

ohyb v rovine kolmej na os z (v)

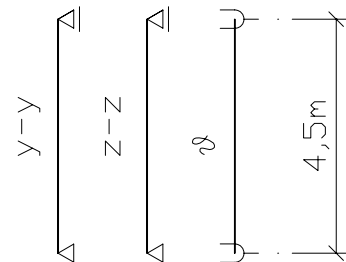
LK_z := "02"

PK_z := "02"

skrútenie okolo osi x (v_x)

LK_x := "02"

PK_x := "02"



Možne typy okrajových podmienok sú: "02" - kĺb
"01" - votknutie
"23" - voľný koniec
"13" - posuvné votknutie

$$\begin{array}{l}
k_y := \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } LK_y = "02" \wedge PK_y = "02" \\ 0.699 \text{ if } (LK_y = "01" \wedge PK_y = "02") \vee (LK_y = "02" \wedge PK_y = "01") \\ 0.5 \text{ if } LK_y = "01" \wedge PK_y = "01" \\ 2 \text{ if } (LK_y = "01" \wedge PK_y = "23") \vee (LK_y = "23" \wedge PK_y = "01") \\ 1 \text{ if } (LK_y = "01" \wedge PK_y = "13") \vee (LK_y = "13" \wedge PK_y = "01") \\ 2 \text{ if } LK_y = "13" \wedge PK_y = "02" \end{array} \right. \quad k_y = 1 \\
k_z := \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } LK_z = "02" \wedge PK_z = "02" \\ 0.699 \text{ if } (LK_z = "01" \wedge PK_z = "02") \vee (LK_z = "02" \wedge PK_z = "01") \\ 0.5 \text{ if } LK_z = "01" \wedge PK_z = "01" \\ 2 \text{ if } (LK_z = "01" \wedge PK_z = "23") \vee (LK_z = "23" \wedge PK_z = "01") \\ 1 \text{ if } (LK_z = "01" \wedge PK_z = "13") \vee (LK_z = "13" \wedge PK_z = "01") \\ 2 \text{ if } LK_z = "13" \wedge PK_z = "02" \end{array} \right. \quad k_z = 1 \\
k_\omega := \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } LK_x = "02" \wedge PK_x = "02" \\ 0.699 \text{ if } (LK_x = "01" \wedge PK_x = "02") \vee (LK_x = "02" \wedge PK_x = "01") \\ 0.5 \text{ if } LK_x = "01" \wedge PK_x = "01" \\ 2 \text{ if } (LK_x = "01" \wedge PK_x = "23") \vee (LK_x = "23" \wedge PK_x = "01") \\ 1 \text{ if } (LK_x = "01" \wedge PK_x = "13") \vee (LK_x = "13" \wedge PK_x = "01") \\ 2 \text{ if } LK_x = "13" \wedge PK_x = "02" \end{array} \right. \quad k_\omega = 1 \\
i := \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } LK_z = "02" \wedge PK_z = "02" \\ 2 \text{ if } LK_z = "01" \wedge PK_z = "02" \\ 3 \text{ if } LK_z = "02" \wedge PK_z = "01" \\ 4 \text{ if } LK_z = "01" \wedge PK_z = "01" \\ 5 \text{ if } LK_z = "01" \wedge PK_z = "23" \\ 6 \text{ if } LK_z = "23" \wedge PK_z = "01" \\ 7 \text{ if } LK_z = "01" \wedge PK_z = "13" \\ 8 \text{ if } LK_z = "13" \wedge PK_z = "01" \\ 9 \text{ if } LK_z = "13" \wedge PK_z = "02" \end{array} \right. \quad j := \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ if } LK_x = "02" \wedge PK_x = "02" \\ 2 \text{ if } LK_x = "01" \wedge PK_x = "02" \\ 3 \text{ if } LK_x = "02" \wedge PK_x = "01" \\ 4 \text{ if } LK_x = "01" \wedge PK_x = "01" \\ 5 \text{ if } LK_x = "01" \wedge PK_x = "23" \\ 6 \text{ if } LK_x = "23" \wedge PK_x = "01" \\ 7 \text{ if } LK_x = "01" \wedge PK_x = "13" \\ 8 \text{ if } LK_x = "13" \wedge PK_x = "01" \\ 9 \text{ if } LK_x = "13" \wedge PK_x = "02" \end{array} \right.
\end{array}$$

$\underline{F} := 1$

Súčiniteľ α_{zw} je: pre F=1 odvodený z vlastných funkcií riešenia diferenciálnej rovnice stability prúta
pre F=2 odvodený z vl. funkcií riešenia diferenciálnej rovnice pr. kmitania nosníka
pre F=3 odčítaný z EC
pre F=4 bez ohľadu na okrajové podmienky rovný 1

$$\alpha_{i,j} := \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{i,j} \text{ if } F = 1 \\ \alpha_{\text{vl}k_{i,j}} \text{ if } F = 2 \\ \alpha_{\text{EC}_{i,j}} \text{ if } F = 3 \\ 1 \text{ if } F = 4 \end{array} \right.$$

Matice, z ktorých sa odčítavajú súčinitele α_{zw} , sú uvedené v predošlej prílohe:

$$\alpha_{zw} := \alpha_{i,j}$$

$$\alpha_{zw} = 1$$

Kritické sily ideálneho prúta:

Štíhlosti ekvivalentné kritickým silám vyjadrené z rovnice:

$$\frac{N_{cr}}{A} = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_e^2}$$

$$N_{cr,y} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{k_y^2 \cdot L^2}$$

$$N_{cr,y} = 3.167 \times 10^4 \text{ kN}$$

$$\lambda_{e,y} := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{N_{cr,y}}}$$

$$\lambda_{e,y} = 45.763$$

$$N_{cr,z} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{k_z^2 \cdot L^2}$$

$$N_{cr,z} = 7.41297 \times 10^4 \text{ kN}$$

$$\lambda_{e,z} := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{N_{cr,z}}}$$

$$\lambda_{e,z} = 29.912$$

$$N_{cr,T} := \frac{1}{i_s^2} \cdot \left(G \cdot I_t + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\omega}{k_\omega^2 \cdot L^2} \right)$$

$$N_{cr,T} = 3.47485 \times 10^4 \text{ kN}$$

$$\lambda_{e,T} := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{N_{cr,T}}}$$

$$\lambda_{e,T} = 43.688$$

Strata stability ohybom kolmo na os y (v smere osi symetrie):

$$N_{cr,y} = 31669.2 \text{ kN}$$

Strata stability ohybom kolmo na os z pri súčasnom skrútení - približná metóda:

$$N_{cr,TF} := \frac{1}{2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{zw} \cdot z_s^2}{i_s^2} \right)} \cdot \left[(N_{cr,z} + N_{cr,T}) - \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4 \cdot N_{cr,z} \cdot N_{cr,T} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{zw} \cdot z_s^2}{i_s^2} \right)} \right]$$

$$N_{cr,TF} = 28348.6 \text{ kN}$$

Štíhlost ekvivalentná strate stability ohybom kolmo na os z pri súčasnom skrútení:

$$\lambda_{e,TF} := \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot A}{N_{cr,TF}}}$$

$$\lambda_{e,TF} = 48.369$$

Kritická sila pri strate stability ohybom kolmo na os z pri súčasnom skrútení vypočítaná za pomoci programu vo VBA na základe MKP pri delení na 4 elementy a pre dané OP:

$$N_{cr,MKP,4} := 28356.8 \text{ kN}$$

$$\text{rozdiel}_{TF,MKP4} := \frac{\max(N_{cr,TF}, N_{cr,MKP,4}) - \min(N_{cr,TF}, N_{cr,MKP,4})}{\min(N_{cr,TF}, N_{cr,MKP,4})}$$

$$\text{rozdiel}_{TF,MKP4} = 0.029 \%$$

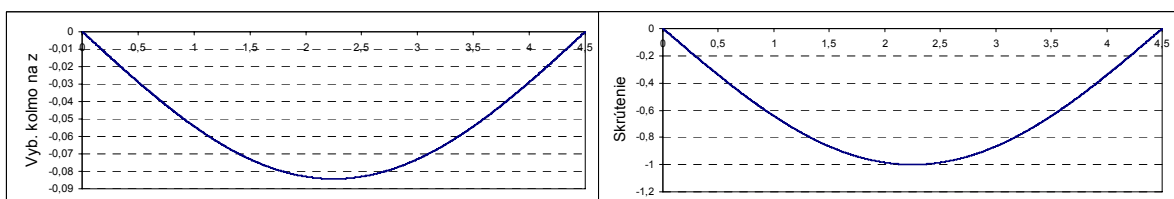
Kritická sila pri strate stability ohybom kolmo na os z pri súčasnom skrútení vypočítaná za pomoci programu vo VBA na základe MKP pri delení na 10 elementov a pre dané OP:

$$N_{cr,MKP,10} := 28348.8 \text{ kN}$$

$$\text{rozdiel}_{TF,MKP10} := \frac{\max(N_{cr,TF}, N_{cr,MKP,10}) - \min(N_{cr,TF}, N_{cr,MKP,10})}{\min(N_{cr,TF}, N_{cr,MKP,10})}$$

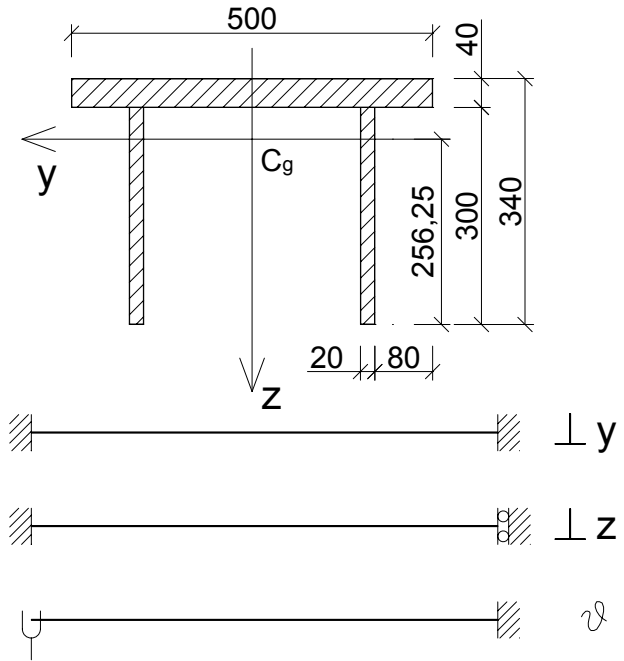
$$\text{rozdiel}_{TF,MKP10} = 0.00056 \%$$

Zložky vlastného tvaru pri priestorovom vybočení pre dané OP:



Závislosti kritických osových síl od délky prúta s prierezmom z predošlého príkladu. Približná metóda v porovnaní s výsledkami z programu vo VBA Excel na základe MKP

$L_{\text{ww}} :=$	1	632161.2
	1.5	291159.0
	2	171764.4
	2.5	116451.5
	3	86348.3
	3.5	68132.7
	4	56235.9
	4.5	47991.1
	5	41983.2
	5.5	37391.5
	6	33692.2
	6.25	32056.8
	6.5	30513.0
	6.7311	29141.7
m	$N_{\text{cr.MKP}} :=$	kN
	7	27593.5
	7.25	26193.9
	7.5	24837.7
	8	22295.5
	8.5	20025.3
	9	18035.4
	9.5	16302.7
	10	14794.7
	10.5	13478.7
	11	12326.2
	11.5	11312.3
	12	10416.5
	12.5	9621.7
	13	8913.5



Vstupy: $E := 210 \cdot \text{GPa}$ $\nu := 0.3$ $\text{ORIGIN} := 1$

$$G_{\text{ww}} := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad G = 80.7692 \text{ GPa}$$

Prierezové charakteristiky vypočítané v prog. DRILL:

$$A_{\text{ww}} := 32800 \text{ mm}^2$$

$$I_y := 3.11698211 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4 \quad I_z := 7.4474667 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$I_{\omega} := 7.49193584 \cdot 10^{-6} \text{ m}^6 \quad I_t := 1.23733333 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$y_s := 0 \text{ m} \quad z_s := 0.132875 \text{ m}$$

Polárny polomer zotravnosti prierezu vztiahnutý k stredú šmyku:

$$i_s := \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A} + y_s^2 + z_s^2} \quad i_s = 0.2233 \text{ m}$$

Súčinitele vzperných dĺžok pre okrajové podmienky :

ohyb v rovine kolmej na os y (w)

$$k_y := 0.5$$

ohyb v rovine kolmej na os z (v)

$$k_z := 1$$

skrútenie (ϑ)

$$k_w := 0.7$$

Kritické sily ideálneho prúta:

$$N_{\text{cr.y}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{k_y^2 \cdot L^2}$$

$$N_{\text{cr.z}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{k_z^2 \cdot L^2}$$

$$N_{\text{cr.T}} := \frac{1}{i_s^2} \cdot \left(G \cdot I_t + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\omega}}{k_w^2 \cdot L^2} \right)$$

Dĺžka prúta pri ktorej sú kritické sily $N_{cr,z}$ a $N_{cr,T}$ rovnaké :

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{k_z^2 \cdot L_p^2} = \frac{1}{i_s^2} \cdot \left(G \cdot I_t + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\omega}{k_w^2 \cdot L_p^2} \right)$$

$$L_p := \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_z \cdot k_w^2 \cdot i_s^2 - E \cdot I_\omega \cdot k_z^2}{G \cdot I_t \cdot k_z^2 \cdot k_w^2}}$$

$$L_p = 6.7311 \text{ m}$$

Súčiniteľ zohľadňujúci vplyv kombinácie okrajových podmienok v ohybe kolmo na os z a okr. podmienok v krútení:

$$\alpha_{zw} := 0.042$$

Pre porovnanie približnej metódy so súčiniteľom položeným:

$$\alpha_1 := 1$$

Strata stability ohybom kolmo na os z pri súčasnom skrútením - približná metóda:

$$n := \text{rows}(L) \quad i := 1, 2 \dots n \quad n = 28$$

$$N_{cr,TF_i} := \frac{1}{2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{zw} \cdot z_s^2}{i_s^2} \right)} \cdot \left[\left(N_{cr,z_i} + N_{cr,T_i} \right) - \sqrt{\left(N_{cr,z_i} + N_{cr,T_i} \right)^2 - 4 \cdot N_{cr,z_i} \cdot N_{cr,T_i} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{zw} \cdot z_s^2}{i_s^2} \right)} \right]$$

$$MN := 10^6 \text{ N}$$

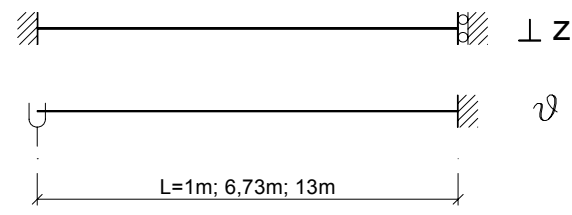
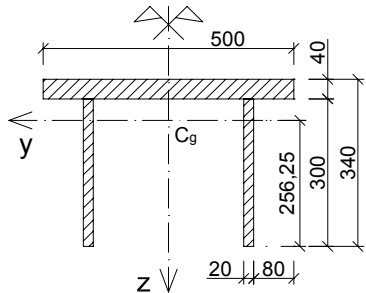
	1		1		1		1						
	1	1543.575		1	655.557		1	648.568		1	632.161		
	2	686.033		2	302.493		2	299.056		2	291.159		
	3	385.894		3	178.921		3	176.701		3	171.764		
	4	246.972		4	121.724		4	120.036		4	116.451		
	5	171.508		5	90.655		5	89.216		5	86.348		
	6	126.006		6	71.921		6	70.584		6	68.133		
	7	96.473		7	59.762		7	58.427		7	56.236		
	8	76.226		8	51.425		8	50.007		8	47.991		
	9	61.743		9	45.463		9	43.863		9	41.983		
	10	51.027		10	41.051		10	39.135		10	37.392		
	11	42.877		11	37.695		11	35.265		11	33.692		
	12	39.516		12	36.311		12	33.523		12	32.057		
	13	36.534		13	35.084		13	31.857		13	30.513		
$N_{cr,z} =$	14	34.069	$N_{cr,T} =$	14	34.069	MN	$N_{cr,TF} =$	14	30.366	$N_{cr,MKP} =$	14	29.142	MN
	15	31.502		15	33.012		15	28.679		15	27.593		
	16	29.366		16	32.133		16	27.16		16	26.194		
	17	27.441		17	31.34		17	25.7		17	24.838		
	18	24.118		18	29.972		18	22.992		18	22.296		
	19	21.364		19	28.838		19	20.599		19	20.025		
	20	19.056		20	27.888		20	18.513		20	18.035		
	21	17.103		21	27.084		21	16.704		21	16.303		
	22	15.436		22	26.397		22	15.133		22	14.795		
	23	14.001		23	25.806		23	13.767		23	13.479		
	24	12.757		24	25.294		24	12.572		24	12.326		
	25	11.672		25	24.847		25	11.523		25	11.312		
	26	10.719		26	24.455		26	10.599		26	10.416		
	27	9.879		27	24.109		27	9.78		27	9.622		
	28	9.134		28	23.802		28	9.051		28	8.914		
		[MN]			[MN]			[MN]				[MN]	

Strata stability ohybom kolmo na os z pri súčasnom skrútením - približná metóda pre $\alpha_{zw} = \alpha_1 = 1$:

$$N_{cr.TF.\alpha_1 i} := \frac{1}{2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1 \cdot z_s^2}{i_s^2} \right)} \left[\left(N_{cr.z_i} + N_{cr.T_i} \right) - \sqrt{\left(N_{cr.z_i} + N_{cr.T_i} \right)^2 - 4 \cdot N_{cr.z_i} \cdot N_{cr.T_i} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_1 \cdot z_s^2}{i_s^2} \right)} \right]$$

$$\text{chyba}_{TF.MKP_i} := \frac{N_{cr.MKP_i} - N_{cr.TF_i}}{\min(N_{cr.TF_i}, N_{cr.MKP_i})} \cdot 100$$

$$\text{chyba}_{TF\alpha_1.MKP_i} := \frac{N_{cr.MKP_i} - N_{cr.TF.\alpha_1 i}}{\min(N_{cr.TF.\alpha_1 i}, N_{cr.MKP_i})} \cdot 100$$

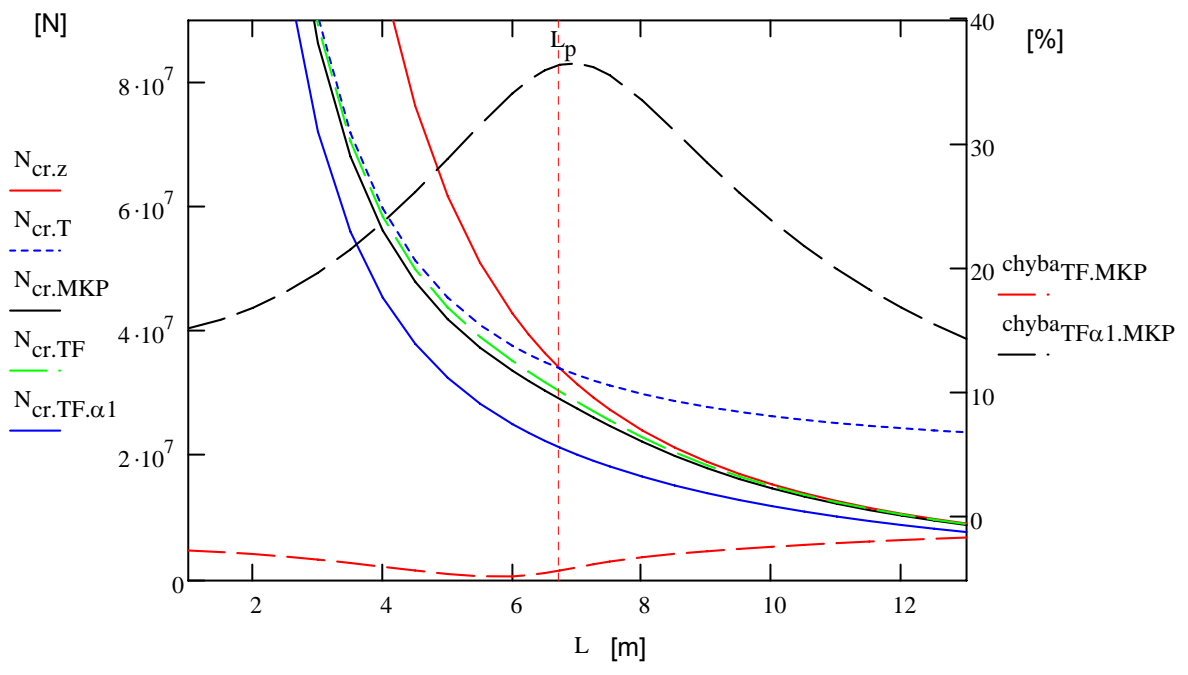
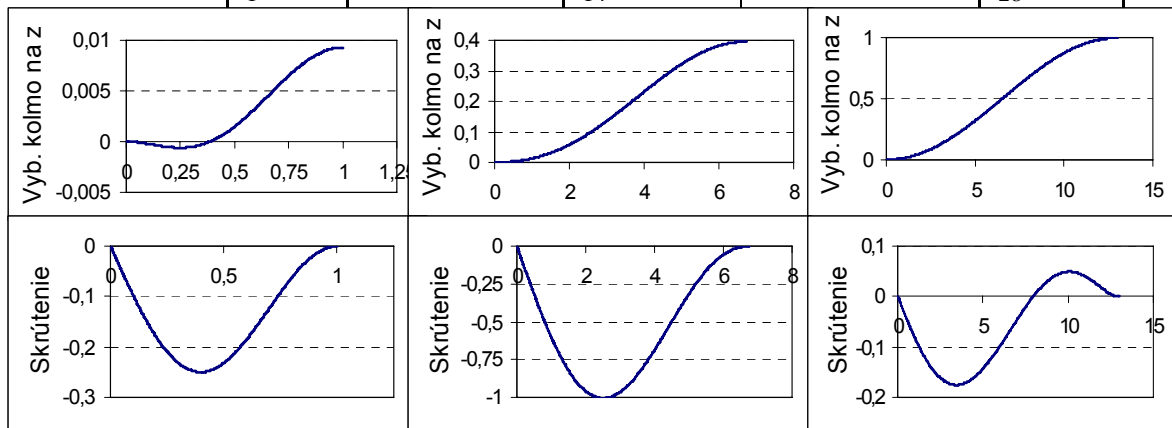


Pre dĺžku prúta:

$L_1 = 1 \text{ m}$

$L_{14} = 6.731 \text{ m}$

$L_{28} = 13 \text{ m}$



Výpočet kritickej osovej sily prúta s prierezom bez osi symetrie približnou metódou

Prierezové charakteristiky:

$$A := 8.7 \cdot 10^3 \cdot \text{mm}^2$$

Momenty zotrvačnosti k hlavným ťažiskovým osiam prierezu:

$$I_y := 62 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

$$I_z := 150 \cdot 10^6 \cdot \text{mm}^4$$

Poloha stredy šmyku vzhľadom na ťažisko prierezu:

$$y_s := 14.9 \text{ mm}$$

$$z_s := -48.9 \text{ mm}$$

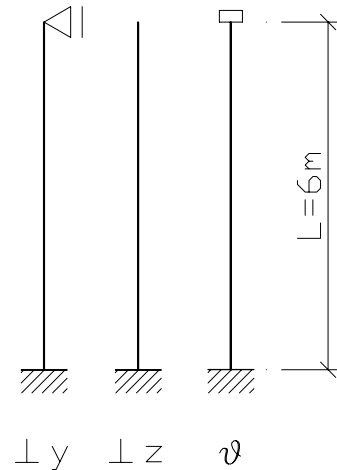
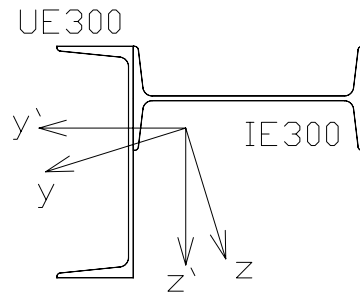
Polárny polomer zotrvačnosti prierezu k stredy šmyku:

$$i_s := \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A} + y_s^2 + z_s^2}$$

$$i_s = 0.164 \text{ m}$$

$$I_\omega := 181.5 \cdot 10^9 \text{ mm}^6$$

$$I_t := 0.399 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$



Dĺžka prúta:

$$L := 6.0 \text{ m}$$

Okrajové podmienky a príslušné vzperné dĺžky:

$$k_y := 0.7 \quad L_y := k_y \cdot L \quad L_y = 4.2 \text{ m}$$

$$k_z := 2 \quad L_z := k_z \cdot L \quad L_z = 12 \text{ m}$$

$$k_\omega := 1 \quad L_\omega := k_\omega \cdot L \quad L_\omega = 6 \text{ m}$$

Vplyv rôznosti okrajových podmienok v ohybe a krútení:

$$\alpha_{y\omega} := 0.367 \quad \alpha_{z\omega} := 1.318 \quad \text{Súčinitele sú odčítané z Tab. 3.1}$$

Materiálové charakteristiky:

$$E := 210 \text{ GPa} \quad \nu := 0.3$$

$$G := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad G = 80.769 \text{ GPa}$$

Kritické sily ideálneho prúta pri uvážení jednotlivých separovaných deformácií:

$$N_{cr,y} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{k_y^2 \cdot L^2}$$

$$N_{cr,z} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{k_z^2 \cdot L^2}$$

$$N_{cr,T} := \frac{1}{i_s^2} \cdot \left(G \cdot I_t + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_\omega}{k_\omega^2 \cdot L^2} \right)$$

$$N_{cr,y} = 7.285 \times 10^3 \text{ kN}$$

$$N_{cr,z} = 2.159 \times 10^3 \text{ kN}$$

$$N_{cr,T} = 1.582 \times 10^3 \text{ kN}$$

Kritická sila priestorovej straty stability približnou metódou sa určí ako najmenší koreň kubickej rovnice:

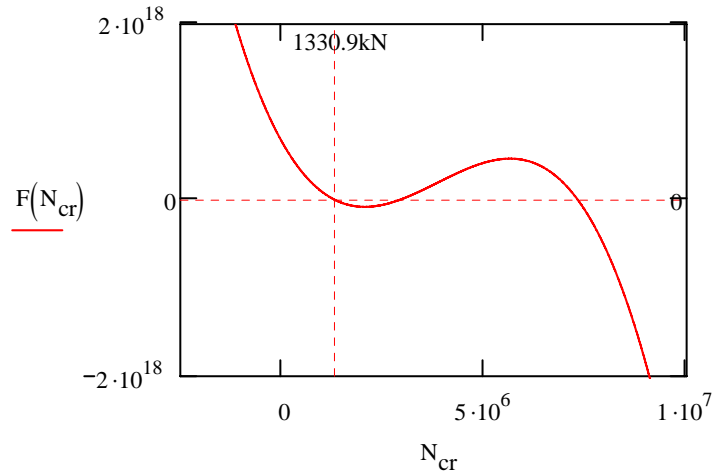
$$(N_{cr,y} - N_{cr}) \cdot (N_{cr,z} - N_{cr}) \cdot (N_{cr,T} - N_{cr}) \cdot i_s^2 - \alpha_{y\omega} \cdot y_s^2 \cdot N_{cr}^2 \cdot (N_{cr,z} - N_{cr}) - \alpha_{z\omega} \cdot z_s^2 \cdot N_{cr}^2 \cdot (N_{cr,y} - N_{cr}) = 0$$

Upravená ľavá strana kubickej rovnice pre N_{cr} :

$$F(N_{cr}) := \left(N_{cr,y} \cdot N_{cr,z} \cdot N_{cr,T} \cdot i_s^2 \right) + i_s^2 \cdot \left(-N_{cr,y} \cdot N_{cr,T} - N_{cr,z} \cdot N_{cr,T} - N_{cr,y} \cdot N_{cr,z} \right) N_{cr} \dots$$

$$+ \left[\left(N_{cr,T} + N_{cr,y} + N_{cr,z} \right) \cdot i_s^2 - \alpha_{zw} \cdot z_s^2 \cdot N_{cr,y} - \alpha_{yw} \cdot y_s^2 \cdot N_{cr,z} \right] N_{cr}^2 \dots$$

$$+ \left(-i_s^2 + \alpha_{zw} \cdot z_s^2 + \alpha_{yw} \cdot y_s^2 \right) N_{cr}^3$$



Vektor koeficientov kubickej rovnice pre N_{cr} (s odstránenými jednotkami):

$$k := \begin{bmatrix} \frac{N_{cr,y} \cdot N_{cr,z} \cdot N_{cr,T} \cdot i_s^2}{N \cdot N \cdot N \cdot m^2} \\ \frac{i_s^2}{m^2} \cdot \left(\frac{-N_{cr,y} \cdot N_{cr,T}}{N \cdot N} - \frac{N_{cr,z} \cdot N_{cr,T}}{N \cdot N} - \frac{N_{cr,y} \cdot N_{cr,z}}{N \cdot N} \right) \\ \left(\frac{N_{cr,T}}{N} + \frac{N_{cr,y}}{N} + \frac{N_{cr,z}}{N} \right) \cdot \frac{i_s^2}{m^2} - \alpha_{zw} \cdot \frac{z_s^2}{m^2} \cdot \frac{N_{cr,y}}{N} - \alpha_{yw} \cdot \frac{y_s^2}{m^2} \cdot \frac{N_{cr,z}}{N} \\ \frac{-i_s^2}{m^2} + \alpha_{zw} \cdot \frac{z_s^2}{m^2} + \alpha_{yw} \cdot \frac{y_s^2}{m^2} \end{bmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 6.712 \times 10^{17} \\ -8.274 \times 10^{11} \\ 2.743 \times 10^5 \\ -0.024 \end{pmatrix}$$

Vektor koreňov kubickej rovnice pre N_{cr} : $v_{kor} := \text{polyroots}(k)$

Doplnenie jednotiek:

$$v_{kor.} := N \cdot v_{kor}$$

$$v_{kor.} = \begin{pmatrix} 1.331 \times 10^6 \\ 2.901 \times 10^6 \\ 7.32 \times 10^6 \end{pmatrix} N$$

Kritická sila priestorovej straty stability približnou metódou:

$$N_{cr} := \left(\min(v_{kor.}) \right)$$

$$N_{cr} = 1330.9 \text{ kN}$$

Kritická sila priestorovej straty stability vypočítaná MKP:

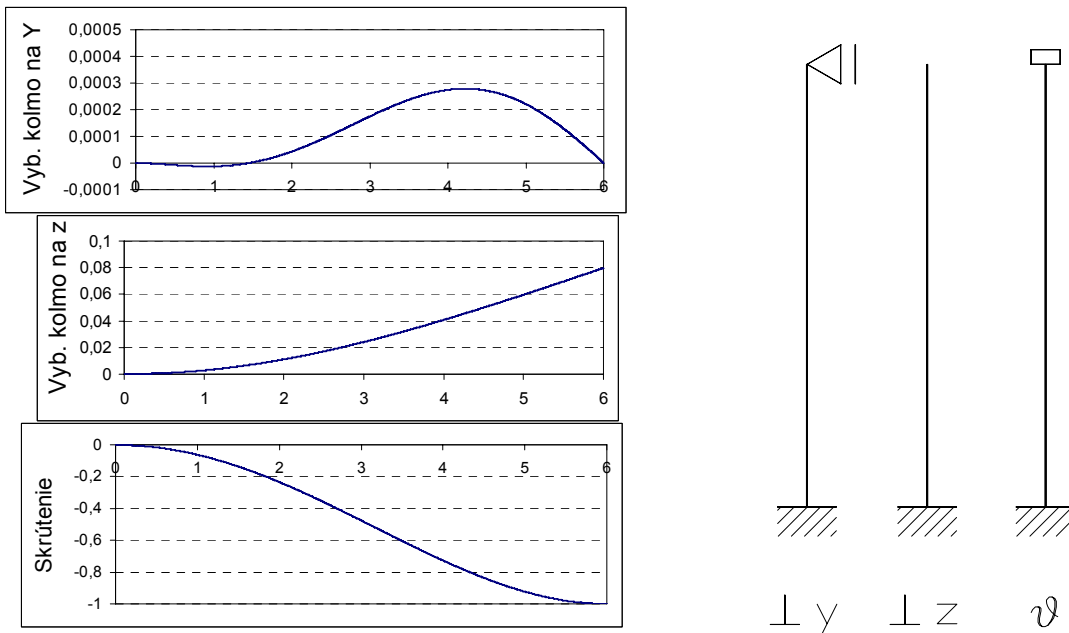
$$N_{cr,MKP} := 1406.9 \text{ kN}$$

Rozdiel približnej metódy s MKP v danom príklade:

$$\text{roz} := \frac{N_{cr,MKP} - N_{cr}}{\min(N_{cr,MKP}, N_{cr})}$$

$$\text{roz} = 5.708 \%$$

Zložky vlastného tvaru priestorovej straty stability vypočítané v MKP:



Približná metóda pri položení súčiniteľov α_{zw} a α_{yw} rovných 1 bez ohľadu na kombináciu okrajových podmienok:

Potom vektor koeficientov (s odstránenými jednotkami) upravenej kubickej rovnice pre N_{cr} je:

$$k_{\alpha 1} := \begin{bmatrix} \frac{N_{cr,y} \cdot N_{cr,z} \cdot N_{cr,T} \cdot i_s^2}{N \cdot N \cdot N \cdot m^2} \\ \frac{i_s^2}{m^2} \cdot \left(\frac{-N_{cr,y} \cdot N_{cr,T}}{N} - \frac{N_{cr,z} \cdot N_{cr,T}}{N} - \frac{N_{cr,y} \cdot N_{cr,z}}{N} \right) \\ \left(\frac{N_{cr,T}}{N} + \frac{N_{cr,y}}{N} + \frac{N_{cr,z}}{N} \right) \cdot \frac{i_s^2}{m^2} - \frac{z_s^2}{m^2} \cdot \frac{N_{cr,y}}{N} - \frac{y_s^2}{m^2} \cdot \frac{N_{cr,z}}{N} \\ \frac{-i_s^2}{m^2} + \frac{z_s^2}{m^2} + \frac{y_s^2}{m^2} \end{bmatrix} \quad k_{\alpha 1} = \begin{pmatrix} 6.712 \times 10^{17} \\ -8.274 \times 10^{11} \\ 2.796 \times 10^5 \\ -0.024 \end{pmatrix}$$

Vektor koreňov kubickej rovnice pre N_{cr} : $v_{kor,\alpha 1} := \text{polyroots}(k_{\alpha 1})$

Doplnenie jednotiek:

$$v_{kor\alpha 1} := N \cdot v_{kor,\alpha 1}$$

$$v_{kor\alpha 1} = \begin{pmatrix} 1.369 \times 10^6 \\ 2.728 \times 10^6 \\ 7.377 \times 10^6 \end{pmatrix} \text{ N}$$

Kritická sila priestorovej straty stability z približnej metódy pre $\alpha_{zw} = \alpha_{yw} = 1$:

$$N_{cr,\alpha 1} := (\min(v_{kor\alpha 1}))$$

$$N_{cr,\alpha 1} = 1368.9 \text{ kN}$$

Rozdiel približnej metódy pre súčinitele rovné 1 (bez ohľadu na kombináciu okrajových podmienok) s MKP v danom prípade:

$$\text{roz} := \frac{N_{cr,MKP} - N_{cr,\alpha 1}}{\min(N_{cr,MKP}, N_{cr,\alpha 1})}$$

$$\text{roz} = 2.775 \%$$

PRÍLOHA 3

VÝPOČET TUHOSTNÝCH MATÍC PRE MKP

PRÍKLAD VÝPOČTU KRITICKÝCH OSOVÝCH SÍL PRÚTA MKP PRÚTOVÝM MODELOM PODĽA POSTUPU V 3.3.1

Výpočet tuhostných matíc k_1 a k_2 pre element s 4 neznámymi a kubickým polynómom v MKP

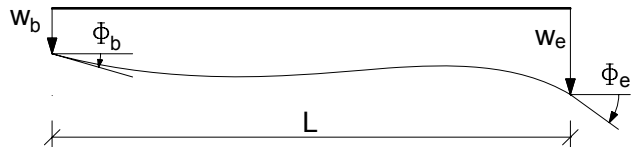
Aproximačná funkcia:

$$w := C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3 \quad \phi := \frac{d}{dx} w \quad \phi \rightarrow C_2 + 2 \cdot C_3 \cdot x + 3 \cdot C_4 \cdot x^2$$

Prevod aproximačného polynómu na Galerkinov rozklad s koeficientmi rovnými hodnotám primárnych a sekundárnych neznámých v uzlových bodoch:

$$\begin{aligned} w_b &= C_1 \\ \phi_b &= C_2 \\ w_e &= C_1 + C_2 \cdot L + C_3 \cdot L^2 + C_4 \cdot L^3 \\ \phi_e &= C_2 + 2C_3 \cdot L + 3C_4 \cdot L^2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} w_b \\ \phi_b \\ w_e \\ \phi_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{pmatrix} \quad |M| \rightarrow L^4$$



$$M_1 := \begin{pmatrix} w_b & 0 & 0 & 0 \\ \phi_b & 1 & 0 & 0 \\ w_e & L & L^2 & L^3 \\ \phi_e & 1 & 2L & 3L^2 \end{pmatrix} \quad |M_1| \rightarrow w_b \cdot L^4$$

$$C_1 := \frac{|M_1|}{|M|} \quad C_1 \rightarrow w_b$$

$$M_2 := \begin{pmatrix} 1 & w_b & 0 & 0 \\ 0 & \phi_b & 0 & 0 \\ 1 & w_e & L^2 & L^3 \\ 0 & \phi_e & 2L & 3L^2 \end{pmatrix} \quad |M_2| \rightarrow \phi_b \cdot L^4$$

$$C_2 := \frac{|M_2|}{|M|} \quad C_2 \rightarrow \phi_b$$

$$M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_b & 0 \\ 0 & 1 & \phi_b & 0 \\ 1 & L & w_e & L^3 \\ 0 & 1 & \phi_e & 3L^2 \end{pmatrix} \quad |M_3| \rightarrow 3 \cdot w_e \cdot L^2 - L^3 \cdot \phi_e - 2 \cdot L^3 \cdot \phi_b - 3 \cdot w_b \cdot L^2$$

$$C_3 := \frac{|M_3|}{|M|} \quad C_3 \rightarrow \frac{3 \cdot w_e \cdot L^2 - L^3 \cdot \phi_e - 2 \cdot L^3 \cdot \phi_b - 3 \cdot w_b \cdot L^2}{L^4}$$

$$M_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w_b \\ 0 & 1 & 0 & \phi_b \\ 1 & L & L^2 & w_e \\ 0 & 1 & 2L & \phi_e \end{pmatrix} \quad |M_4| \rightarrow L^2 \cdot \phi_e - 2 \cdot w_e \cdot L + \phi_b \cdot L^2 + 2 \cdot w_b \cdot L$$

$$C_4 := \frac{|M_4|}{|M|} \quad C_4 \rightarrow \frac{L^2 \cdot \phi_e - 2 \cdot w_e \cdot L + \phi_b \cdot L^2 + 2 \cdot w_b \cdot L}{L^4}$$

$$w := C_1 + C_2 \cdot x + C_3 \cdot x^2 + C_4 \cdot x^3$$

$$w \rightarrow w_b + \phi_b \cdot x + \frac{3 \cdot w_e \cdot L^2 - L^3 \cdot \phi_e - 2 \cdot L^3 \cdot \phi_b - 3 \cdot w_b \cdot L^2}{L^4} \cdot x^2 + \frac{L^2 \cdot \phi_e - 2 \cdot w_e \cdot L + \phi_b \cdot L^2 + 2 \cdot w_b \cdot L}{L^4} \cdot x^3$$

Galerkinov rozklad aproximačného polynómu s koeficientmi rovnými hodnotám primárnych a sekundárnych neznámych v uzlových bodoch:

$$w := w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) + w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)$$

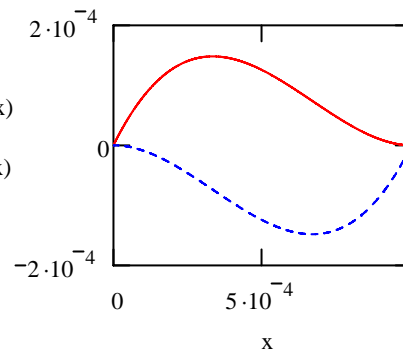
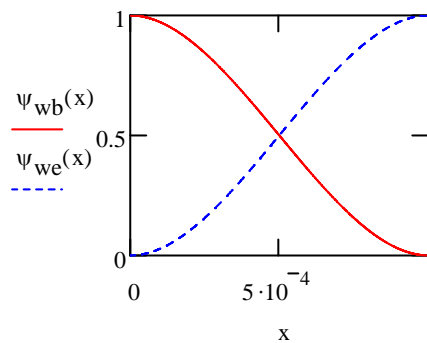
Bázové funkcie:

$$\psi_{wb}(x) := 1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}$$

$$\psi_{\phi b}(x) := x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$\psi_{we}(x) := \frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}$$

$$\psi_{\phi e}(x) := \frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$



Výpočet tuhostnej matice k_1 z výrazu:

$$EI_y \cdot \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} w(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} u(x) dx \quad , \text{v ktorom pre každý riadok matice } k_1 \text{ sa za funkciu } u(x) \text{ volí príslušná bázová funkcia.}$$

$$k_{1,1i} := EI_y \cdot \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left[w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) + \dots \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) dx$$

$$+ w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3}\right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)$$

1. riadok tuhostnej matice k_1 : $k_{1,1i} \rightarrow 6 \cdot \frac{EI_y}{L^3} \cdot (2 \cdot w_b + \phi_b \cdot L - 2 \cdot w_e + \phi_e \cdot L)$

$$k_{1,2i} := EI_y \cdot \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left[w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \dots \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) dx$$

$$+ w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right)$$

2. riadok tuhostnej matice k_1 : $k_{1,2i} \rightarrow 2 \cdot EI_y \cdot \frac{3 \cdot w_b + 2 \cdot \phi_b \cdot L - 3 \cdot w_e + \phi_e \cdot L}{L^2}$

$$k_{1,3i} := EI_y \cdot \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left[w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \dots \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) dx$$

$$+ w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right)$$

3. riadok tuhostnej matice k_1 : $k_{1,3i} \rightarrow (-6) \cdot \frac{EI_y}{L^3} \cdot (2 \cdot w_b + \phi_b \cdot L - 2 \cdot w_e + \phi_e \cdot L)$

$$k_{1,4i} := EI_y \cdot \int_0^L \frac{d^2}{dx^2} \left[w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \dots \right] \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) dx$$

$$+ w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right)$$

4. riadok tuhostnej matice k_1 : $k_{1,4i} \rightarrow 2 \cdot \frac{EI_y}{L^2} \cdot (3 \cdot w_b + \phi_b \cdot L - 3 \cdot w_e + 2 \cdot \phi_e \cdot L)$

Tuhostná matica k_1 prúta so 4 neznámymi pre kubický polynóm:

$$k_{y1} := E \cdot I_y \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ \frac{-12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{-6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{-6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{pmatrix}$$

Výpočet matice k_2 z výrazu:

$$- \int_0^L \frac{d}{dx} w(x) \cdot \frac{d}{dx} u(x) dx$$

,v ktorom pre každý riadok matice k_2 sa za funkciu $u(x)$ volí príslušná bázová funkcia.

$$k_{2.1i} := - \int_0^L \left[\frac{d}{dx} \left[w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \dots \right] \cdot \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) dx \right. \\ \left. + w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \right]$$

1. riadok matice k_2 : $k_{2.1i} \rightarrow \frac{-1}{10 \cdot L} \cdot (12 \cdot w_b + \phi_b \cdot L - 12 \cdot w_e + \phi_e \cdot L)$

$$k_{2.2i} := - \int_0^L \left[\frac{d^1}{dx^1} \left[w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \dots \right] \cdot \frac{d^1}{dx^1} \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) dx \right. \\ \left. + w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \right]$$

2. riadok matice k_2 : $k_{2.2i} \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot w_b - \frac{2}{15} \cdot \phi_b \cdot L + \frac{1}{10} \cdot w_e + \frac{1}{30} \cdot \phi_e \cdot L$

$$k_{2.3i} := - \int_0^L \left[\frac{d^1}{dx^1} \left[w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \dots \right] \cdot \frac{d^1}{dx^1} \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) dx \right. \\ \left. + w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \right]$$

3. riadok matice k_2 : $k_{2.3i} \rightarrow \frac{1}{10 \cdot L} \cdot (12 \cdot w_b + \phi_b \cdot L - 12 \cdot w_e + \phi_e \cdot L)$

$$k_{2.4i} := - \int_0^L \left[\frac{d^1}{dx^1} \left[w_b \cdot \left(1 - \frac{3 \cdot x^2}{L^2} + \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_b \cdot \left(x - \frac{2 \cdot x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \dots \right] \cdot \frac{d^1}{dx^1} \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) dx \right. \\ \left. + w_e \cdot \left(\frac{3 \cdot x^2}{L^2} - \frac{2 \cdot x^3}{L^3} \right) + \phi_e \cdot \left(\frac{-x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right) \right]$$

4. riadok matice k_2 : $k_{2.4i} \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot w_b + \frac{1}{30} \cdot \phi_b \cdot L + \frac{1}{10} \cdot w_e - \frac{2}{15} \cdot \phi_e \cdot L$

Matrica k_2 prúta so 4
neznámymi pre kubický
polynóm:

$$k_{y2} := \frac{-1}{10 \cdot L} \cdot \begin{pmatrix} 12 & L & -12 & L \\ L & \frac{4}{3} \cdot L^2 & -L & \frac{-1}{3} \cdot L^2 \\ -12 & -L & 12 & -L \\ L & \frac{-1}{3} \cdot L^2 & -L & \frac{4}{3} \cdot L^2 \end{pmatrix}$$

Výpočet kritickej sily prúta jednoducho uloženého v ohyboch aj v krútení s prierezom podľa prílohy 2 približnou metódou a MKP - prúťovým modelom

Prierezové charakteristiky

(podľa výpočtov z prílohy 2): $I_y := 3.09417 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$ $I_z := 7.24267 \cdot 10^8 \cdot \text{mm}^4$ $E := 210 \text{ GPa}$ $\nu := 0.3$

$$\underline{A} := 3.2 \cdot 10^4 \text{ mm}^2 \quad I_{\omega} := 7.49477 \cdot 10^{12} \cdot \text{mm}^6 \quad I_t := 1.23733 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \quad \underline{G} := \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Poloha stredy šmyku: $y_s := 0 \text{ m}$ $z_s := 136.139 \text{ mm}$ $G = 80769 \text{ MPa}$ **ORIGIN := 1**

Polárny polomer zotrvačnosti prierezu vztiahnutý k stredy šmyku: $i_s := \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A} + y_s^2 + z_s^2}$ $i_s = 225.469 \text{ mm}$

Výpočet kritickej sily približnou metódou:

$\underline{L} := 4.5 \text{ m}$

Pre jednoduché uloženie v ohybe okolo osi y, z aj v krútení:

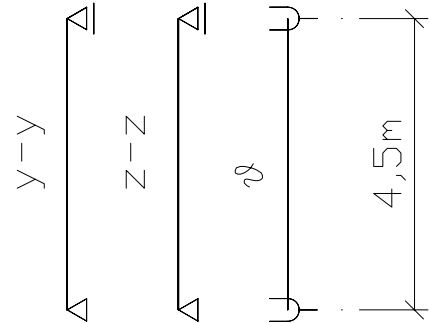
$k_y := 1$ $k_z := 1$ $k_{\omega} := 1$

Kritické sily:

$$N_{cr,y} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{k_y^2 \cdot L^2} \quad N_{cr,y} = 31669.28 \text{ kN}$$

$$N_{cr,z} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{k_z^2 \cdot L^2} \quad N_{cr,z} = 74129.78 \text{ kN}$$

$$N_{cr,T} := \frac{1}{i_s^2} \cdot \left(G \cdot I_t + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\omega}}{k_{\omega}^2 \cdot L^2} \right) \quad N_{cr,T} = 34748.344 \text{ kN}$$



Strata stability ohybom v rovine kolmej na os y (v smere osi symetrie) - Eulerová kritická sila:

$$N_{cr,y} = 31669.28 \text{ kN}$$

Strata stability ohybom kolmo na os symetrie (os z) pri súčasnom skrútením - približná metóda:

$\alpha_{zw} := 1$

$$N_{cr,TF} := \frac{1}{2 \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{zw} \cdot z_s^2}{i_s^2} \right)} \cdot \left[(N_{cr,z} + N_{cr,T}) - \sqrt{(N_{cr,z} + N_{cr,T})^2 - 4 \cdot N_{cr,z} \cdot N_{cr,T} \cdot \left(1 - \frac{\alpha_{zw} \cdot z_s^2}{i_s^2} \right)} \right]$$

$$N_{cr,TF} = 28348.567 \text{ kN}$$

Kritické sily vypočítané v programe ANSYS s použitím doskostenového obdĺžnikového elementu SHELL63

$$N_{cr,y,AS} := 30530 \cdot \text{kN}$$

$$N_{cr,TF,AS} := 28540 \cdot \text{kN}$$

Výpočet kritickej sily pomocou MKP použitím prútového modelu pre prút pozostávajúci so 4 elementov:

Na zostrojenie všetkých matíc je použitý program MS EXCEL.

Elementárne matice k_1 a k_2 pre všetky štyri elementy sú zostrojené podľa (3.29):

$$k_1 := \begin{pmatrix} 8.428 & 4.741 & -8.428 & 4.741 \\ 4.741 & 3.556 & -4.741 & 1.778 \\ -8.428 & -4.741 & 8.428 & -4.741 \\ 4.741 & 1.778 & -4.741 & 3.556 \end{pmatrix}$$

$$k_2 := \begin{pmatrix} -1.067 & -0.1 & 1.067 & -0.1 \\ -0.1 & -0.15 & 0.1 & 0.038 \\ 1.067 & 0.1 & -1.067 & 0.1 \\ -0.1 & 0.038 & 0.1 & -0.15 \end{pmatrix}$$

Prútové matice K_1 a K_2 sú zostrojené podľa obr.3.6 ale pre prút zložený zo 4 elementov:

$$K_1 :=$$

$$K_2 :=$$

$$K_1 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8.428	4.741	-8.428	4.741	0	0	0	0	0	0
2	4.741	3.556	-4.741	1.778	0	0	0	0	0	0
3	-8.428	-4.741	16.856	0	-8.428	4.741	0	0	0	0
4	4.741	1.778	0	7.111	-4.741	1.778	0	0	0	0
5	0	0	-8.428	-4.741	16.856	0	-8.428	4.741	0	0
6	0	0	4.741	1.778	0	7.111	-4.741	1.778	0	0
7	0	0	0	0	-8.428	-4.741	16.856	0	-8.428	4.741
8	0	0	0	0	4.741	1.778	0	7.111	-4.741	1.778
9	0	0	0	0	0	0	-8.428	-4.741	8.428	-4.741
10	0	0	0	0	0	0	4.741	1.778	-4.741	3.556

$$K_2 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-1.067	-0.1	1.067	-0.1	0	0	0	0	0	0
2	-0.1	-0.15	0.1	0.038	0	0	0	0	0	0
3	1.067	0.1	-2.133	0	1.067	-0.1	0	0	0	0
4	-0.1	0.038	0	-0.3	0.1	0.038	0	0	0	0
5	0	0	1.067	0.1	-2.133	0	1.067	-0.1	0	0
6	0	0	-0.1	0.038	0	-0.3	0.1	0.038	0	0
7	0	0	0	0	1.067	0.1	-2.133	0	1.067	-0.1
8	0	0	0	0	-0.1	0.038	0	-0.3	0.1	0.038
9	0	0	0	0	0	0	1.067	0.1	-1.067	0.1
10	0	0	0	0	0	0	-0.1	0.038	0.1	-0.15

Matice A a B sú zostavené podľa vzorcov (3.36) a (3.37) prípadne podľa obr. 3.5 a majú rozmer 30x30, po aplikovaní okrajových podmienok sú matice A' a B' rozmeru 24x24. Vzhľadom na rozsiahlosť matíc A, B a A', B' tu nie sú uvedené.

$$A' :=$$

$$B' :=$$

Riešenie zovšeobecneného problému vlastných čísel a vlastných vektorov matíc A' a B':

Matica vlastných vektorov (každý stĺpec predstavuje jeden vlastný vektor s primárnymi a sekundárnymi neznámymi v uzlových bodoch vlastného tvaru):

$$M := \text{genvecs}(A', B')$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	0.698	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.042	-0.118	-0.121	0	-0.349	-0.718	0.707	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	0.707	0	-0.707	1	0.707	0	-0.494	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0.059	0	0.171	0	0.494	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-1	0	-1	0	-1	0	1	-0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0.042	0.118	-0.121	0	-0.349	0.718	-0.707	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	-1	0.707	-0	0.707	1	-0.707	0	0.494	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0.698	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.328	0.328	0.328	-0.327	0.326	0.032	-0.323	0.032	0.032	0.316	-0.033	-0.034	0.059	0.043	-0.036	0.197
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.014	-0.039	0.039	0	0	-0.113	-0.001	-0.004	0.227	0.004	-0	-0.06	0.031	-0.013	0.2
11	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.328	-0.232	0	0.231	-0.326	0.032	0.229	0.023	0	-0	0.023	0.034	-0.042	-0	0.026	0.14
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.019	0	-0.056	0	0	0.16	-0.002	0	0	-0.006	0	-0.084	-0	0.018	0.283
13	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.328	-0	-0.328	0	0.326	0.032	-0	-0	-0.032	-0.316	-0	-0.034	0	-0.043	-0	-0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.014	0.039	0.039	0	0	-0.113	-0.001	0.004	0.227	0.004	0	-0.06	-0.031	-0.013	0.2
15	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.328	0.232	0	-0.231	-0.326	0.032	-0.229	0.023	0	0	-0.023	0.034	0.042	0	-0.026	-0.14
16	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.328	0.328	0.328	0.327	0.326	0.032	0.323	0.032	0.032	0.316	0.033	-0.034	0.059	0.043	0.036	0.197
17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-0.698	1	-1	0.698
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.042	0.118	-0.121	0	0	0.349	-0.042	-0.118	-0.718	0.121	-0	-0.707	0.718	-0.349	-0.707
19	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0.707	-0	-0.707	1	1	-0.707	0.707	0	-0	0.707	1	-0.494	-0	0.707	0.494
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.059	0	0.171	0	-0	-0.494	-0.059	0	0	-0.171	0	-1	0	0.494	-1
21	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	1	0	-0	-1	1	0	-1	0	-1	0	-0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.042	0.118	-0.121	0	0	0.349	-0.042	0.118	0.718	0.121	0	-0.707	0.718	-0.349	-0.707
23	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-0.707	0	0.707	1	1	0.707	0.707	0	0	0.707	1	0.494	0	-0.707	0.494
24	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	0.698

$$\frac{L}{w} := \frac{L}{m} \quad L_4 := \frac{L}{4}$$

Vektor vlastných čísel :
(po prenasobení jednotkou [kN] dostávame hodnoty kritických síl)

$$\lambda := \text{genvals}(A', B')$$

	1
1	-3080418.133
2	-2550310.294
3	-1652167.119
4	-989111.188
5	-616083.627
6	-294515.774
7	-127630.025
8	-31685.499
9	-12318138.968
10	-10200800.401
11	-6613474.327
12	-3965140.597
13	-2475244.578
14	-1370198.182
15	-1190965.577
16	-1137240.789
17	-742542.598
18	-524693.698
19	-451139.24
20	-287173.334
21	-28356.758
22	-72107.254
23	-145743.133
24	-143062.76

$\lambda =$

1. vlastný tvar vybočenia zodpovedá vybočeniu kolmo na os symetrie prierezu pri súčasnom skrútení:

$$\delta_1 := M^{(21)}$$

kritická sila v kN

$$\lambda_{21} = -28356.758$$

	1
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	-0.059
10	-0.06
11	-0.042
12	-0.084
13	0
14	-0.06
15	0.042
16	0.059
17	-0.698
18	-0.707
19	-0.494
20	-1
21	0
22	-0.707
23	0.494
24	0.698

$\delta_1 =$

ϕ_{v1} v_2
 ϕ_{v2} v_3
 ϕ_{v3} v_4
 ϕ_{v4} ϕ_{v5}
 δ_1 v_1
 δ_2 v_2
 δ_3 v_3
 δ_4 δ_5

2. vlastný tvar vybočenia zodpovedá vybočeniu v rovine symetrie:

$$\delta_2 := M^{(8)}$$

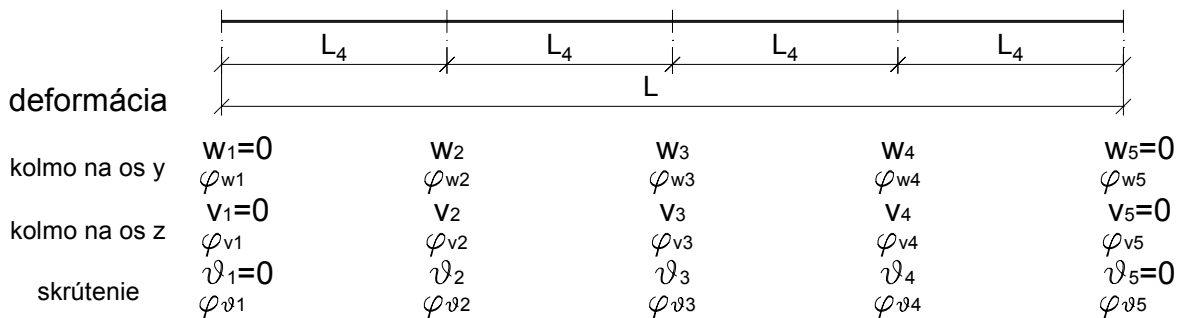
kritická sila v kN

$$\lambda_8 = -31685.499$$

	1
1	-0.698
2	-0.707
3	-0.494
4	-1
5	-0
6	-0.707
7	0.494
8	0.698
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
22	0
23	0
24	0

$\delta_2 =$

ϕ_{w1} w_2
 ϕ_{w2} w_3
 ϕ_{w3} w_4
 ϕ_{w4} ϕ_{w5}



1. vlastný tvar vybočenia zodpovedá vybočeniu kolmo na os symetrie prierezu pri súčasnom skrútení:

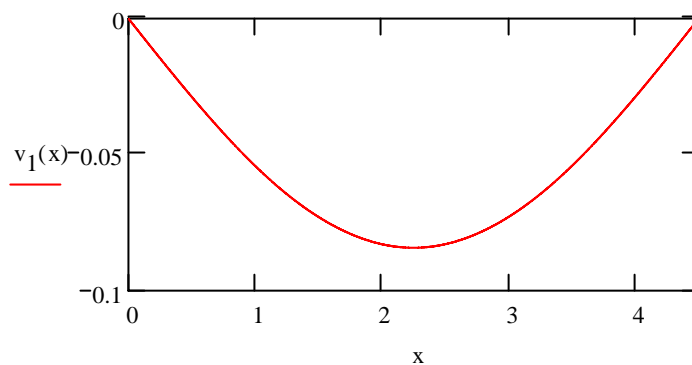
Aproximačný polynóm:

$$w(x) := \mathbf{w}_b + \phi_b \cdot x + (3 \cdot w_e - \phi_e \cdot L - 2 \cdot \phi_b \cdot L - 3 \cdot w_b) \cdot \frac{x^2}{L^2} + (\phi_e \cdot L - 2 \cdot w_e + \phi_b \cdot L + 2 \cdot w_b) \cdot \frac{x^3}{L^3}$$

Dosadenie už známych uzlových deformácií z príslušného vektora deformácií δ_1 :

$$v_1(x) := \begin{cases} 0 + \delta_{1_9} \cdot x + \left(3 \cdot \delta_{1_{10}} - \delta_{1_{11}} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{1_9} \cdot L_4 - 3 \cdot 0\right) \cdot \frac{x^2}{L_4^2} \dots & \text{if } x \leq L_4 \\ + \left(\delta_{1_{11}} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{1_{10}} + \delta_{1_9} \cdot L_4 + 2 \cdot 0\right) \cdot \frac{x^3}{L_4^3} \\ \delta_{1_{10}} + \delta_{1_{11}} \cdot (x - L_4) \dots & \text{if } L_4 < x \leq 2 \cdot L_4 \\ + \left(3 \cdot \delta_{1_{12}} - \delta_{1_{13}} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{1_{11}} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{1_{10}}\right) \cdot \frac{(x - L_4)^2}{L_4^2} \dots \\ + \left(\delta_{1_{13}} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{1_{12}} + \delta_{1_{11}} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{1_{10}}\right) \cdot \frac{(x - L_4)^3}{L_4^3} \\ \delta_{1_{12}} + \delta_{1_{13}} \cdot (x - 2 \cdot L_4) \dots & \text{if } 2 \cdot L_4 < x \leq 3 \cdot L_4 \\ + \left(3 \cdot \delta_{1_{14}} - \delta_{1_{15}} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{1_{13}} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{1_{12}}\right) \cdot \frac{(x - 2 \cdot L_4)^2}{L_4^2} \dots \\ + \left(\delta_{1_{15}} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{1_{14}} + \delta_{1_{13}} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{1_{12}}\right) \cdot \frac{(x - 2 \cdot L_4)^3}{L_4^3} \\ \delta_{1_{14}} + \delta_{1_{15}} \cdot (x - 3 \cdot L_4) \dots & \text{if } 3 \cdot L_4 < x \leq 4 \cdot L_4 \\ + \left(3 \cdot 0 - \delta_{1_{16}} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{1_{15}} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{1_{14}}\right) \cdot \frac{(x - 3 \cdot L_4)^2}{L_4^2} \dots \\ + \left(\delta_{1_{16}} \cdot L_4 - 2 \cdot 0 + \delta_{1_{15}} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{1_{14}}\right) \cdot \frac{(x - 3 \cdot L_4)^3}{L_4^3} \end{cases}$$

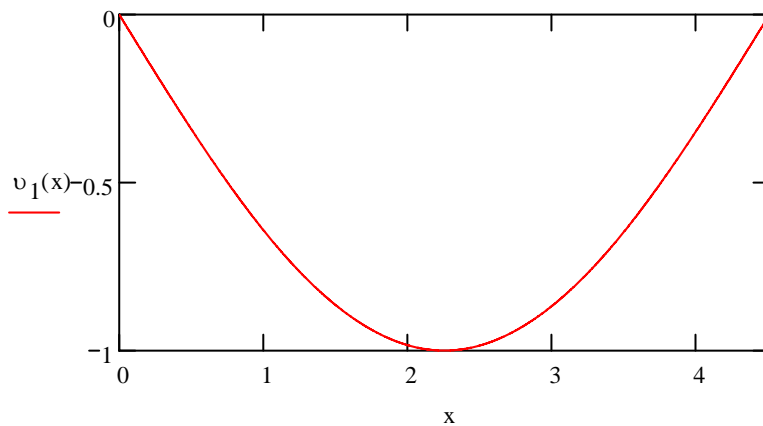
Vybočenie kolmo na os symetrie v rámci priestorového tvaru vybočenia:



Dosadenie už známych uzlových deformácií z príslušného vektora deformácií δ_1 do aproximačného polynómu definovanom na podoblasti elementov :

$$\begin{aligned}
 v_1(x) := & \left[\begin{aligned}
 & 0 + \delta_{117} \cdot x + \left(3 \cdot \delta_{118} - \delta_{119} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{117} \cdot L_4 - 3 \cdot 0 \right) \cdot \frac{x^2}{L_4^2} \dots \quad \text{if } x \leq L_4 \\
 & + \left(\delta_{119} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{118} + \delta_{117} \cdot L_4 + 2 \cdot 0 \right) \cdot \frac{x^3}{L_4^3} \\
 & \delta_{118} + \delta_{119} \cdot (x - L_4) \dots \quad \text{if } L_4 < x \leq 2 \cdot L_4 \\
 & + \left(3 \cdot \delta_{120} - \delta_{121} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{119} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{118} \right) \cdot \frac{(x - L_4)^2}{L_4^2} \dots \\
 & + \left(\delta_{121} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{120} + \delta_{119} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{118} \right) \cdot \frac{(x - L_4)^3}{L_4^3} \\
 & \delta_{120} + \delta_{121} \cdot (x - 2 \cdot L_4) \dots \quad \text{if } 2 \cdot L_4 < x \leq 3 \cdot L_4 \\
 & + \left(3 \cdot \delta_{122} - \delta_{123} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{121} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{120} \right) \cdot \frac{(x - 2 \cdot L_4)^2}{L_4^2} \dots \\
 & + \left(\delta_{123} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{122} + \delta_{121} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{120} \right) \cdot \frac{(x - 2 \cdot L_4)^3}{L_4^3} \\
 & \delta_{122} + \delta_{123} \cdot (x - 3 \cdot L_4) \dots \quad \text{if } 3 \cdot L_4 < x \leq 4 \cdot L_4 \\
 & + \left(3 \cdot 0 - \delta_{124} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{123} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{122} \right) \cdot \frac{(x - 3 \cdot L_4)^2}{L_4^2} \dots \\
 & + \left(\delta_{124} \cdot L_4 - 2 \cdot 0 + \delta_{123} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{122} \right) \cdot \frac{(x - 3 \cdot L_4)^3}{L_4^3}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Priebeh skrútenia v rámci priestorového tvaru vybočenia:



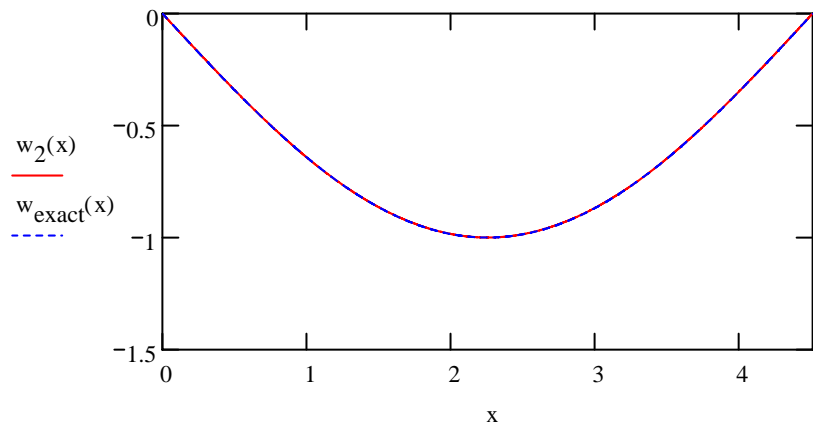
2. vlastný tvar vybočenia zodpovedá vybočeniu v rovine symetrie:

Aproximačný polynóm:

$$w(x) := w_b + \phi_b \cdot x + (3 \cdot w_e - \phi_e \cdot L - 2 \cdot \phi_b \cdot L - 3 \cdot w_b) \cdot \frac{x^2}{L^2} + (\phi_e \cdot L - 2 \cdot w_e + \phi_b \cdot L + 2 \cdot w_b) \cdot \frac{x^3}{L^3}$$

$$w_2(x) := \left| \begin{array}{l} 0 + \delta_{2_1} \cdot x + \left(3 \cdot \delta_{2_2} - \delta_{2_3} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{2_1} \cdot L_4 - 3 \cdot 0\right) \cdot \frac{x^2}{L_4^2} \dots \text{ if } x \leq L_4 \\ + \left(\delta_{2_3} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{2_2} + \delta_{2_1} \cdot L_4 + 2 \cdot 0\right) \cdot \frac{x^3}{L_4^3} \\ \delta_{2_2} + \delta_{2_3} \cdot (x - L_4) \dots \text{ if } L_4 < x \leq 2 \cdot L_4 \\ + \left(3 \cdot \delta_{2_4} - \delta_{2_5} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{2_3} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{2_2}\right) \cdot \frac{(x - L_4)^2}{L_4^2} \dots \\ + \left(\delta_{2_5} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{2_4} + \delta_{2_3} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{2_2}\right) \cdot \frac{(x - L_4)^3}{L_4^3} \\ \delta_{2_4} + \delta_{2_5} \cdot (x - 2 \cdot L_4) \dots \text{ if } 2 \cdot L_4 < x \leq 3 \cdot L_4 \\ + \left(3 \cdot \delta_{2_6} - \delta_{2_7} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{2_5} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{2_4}\right) \cdot \frac{(x - 2 \cdot L_4)^2}{L_4^2} \dots \\ + \left(\delta_{2_7} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{2_6} + \delta_{2_5} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{2_4}\right) \cdot \frac{(x - 2 \cdot L_4)^3}{L_4^3} \\ \delta_{2_6} + \delta_{2_7} \cdot (x - 3 \cdot L_4) \dots \text{ if } 3 \cdot L_4 < x \leq 4 \cdot L_4 \\ + \left(3 \cdot 0 - \delta_{2_8} \cdot L_4 - 2 \cdot \delta_{2_7} \cdot L_4 - 3 \cdot \delta_{2_6}\right) \cdot \frac{(x - 3 \cdot L_4)^2}{L_4^2} \dots \\ + \left(\delta_{2_8} \cdot L_4 - 2 \cdot 0 + \delta_{2_7} \cdot L_4 + 2 \cdot \delta_{2_6}\right) \cdot \frac{(x - 3 \cdot L_4)^3}{L_4^3} \end{array} \right.$$

$$w_{\text{exact}}(x) := -\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$



PRÍLOHA 4

**PROGRAM NA VÝPOČET KRITICKÝCH OSOVÝCH SÍL NA ZÁKLADE MKP
PRÚTOVÝM MODELOM VO VBA PRE EXCEL – UŽÍVATEĽSKÉ PROSTREDIE**

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1	VSTUPY- PRIEREZOVÉ CHARAKTERISTIKY, DĹŽKA A DELENIE PRÚTA:									POZNÁMKY:								
2	L=	11	m	E=	210000000	kPa	Ely=	64977,57	Vstupné hodnoty									
3	n=	10	pocet el	G=	80769231	kPa	Elz=	152096,07	Výsledky									
4	Le=	1,1	m	ν =	0,3	Všetky 4 súbory programu sa musia nachádzať v C:\ProgMKPstabPruta\												
5	ly=	3,0942E-04	m ⁴	ys=	0	m	lt=	1,237330E-05	m ⁴	Pri zmene "n" alebo "m" treba zmeniť pole vykreslovaných dát pre vykreslenie v grafoch.								
6	lz=	7,2427E-04	m ⁴	zs=	0,136139	m	lw=	7,494770E-06	m ⁶	Všetkých 6 okrajových podmienok musí byť zadaných ako "K", "V", "P" alebo "O"								
7	A=	0,032	m ²	is=	0,2254694	m	Glt=	999,3819231	Vzhľadom na to, že je použitý kubický aproximačný polynóm, pre vystihnutie zložitejších vlastných tvarov a väčšiu presnosť je potrebné zvoliť väčší počet elementov									
8				is ² =	0,0508365	m ²	Elw=	1573,9017										

9		VÝPOČET:																							
10	1)	Vymaž vstupy				3)	Dopočítaj vstupy				6)	Urči čísla eliminácií				10)	Importuj vlastné tvary a čísla				12)	Vid' dole			
11																									
12																									
13	2)	Vymaž výsledky				4)	Zostav matice k1el, k2el, K1 a K2				7)	Aplikuj OP na matice A a B				11)	Aplikuj OP na vlastné tvary								
14																									
15																									
16						5)	Zostroj matice A a B				8)	Zatvor Excel(pri zatvarani ulozit zmeny) a potom Otvor prilozeny MathCAD subor													
17											9)	Spocitaj MathCAD subor az dokonca a zatvor(pri zatvarani netreba ulozit zmeny)													
18																									

19				Y-Y		4		Počet odstránených	
20				Z-Z		3		riadkov a stĺpcov	
21				ϑ - ϑ		3		z titulu aplikovania OP.	
22				Σ =		10			

19				Y-Y		4		Počet odstránených	
20				Z-Z		3		riadkov a stĺpcov	
21				ϑ - ϑ		3		z titulu aplikovania OP.	
22				Σ =		10			

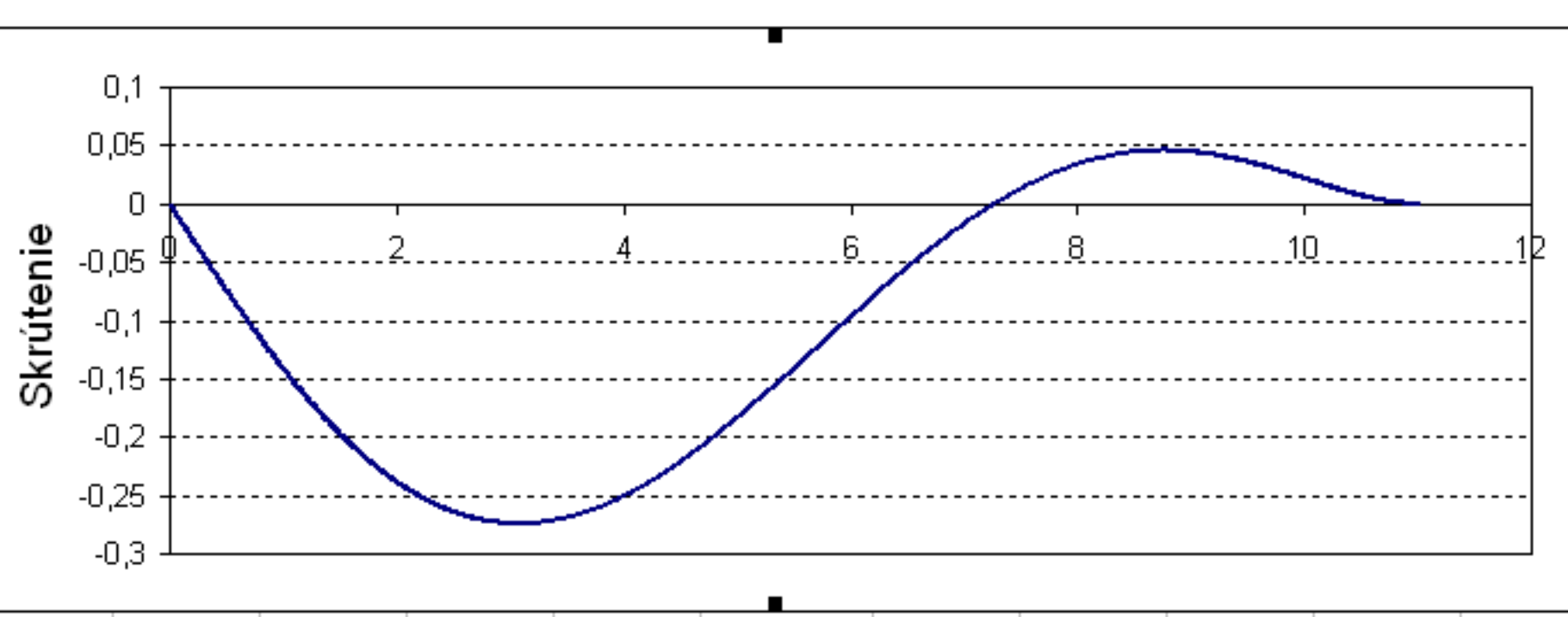
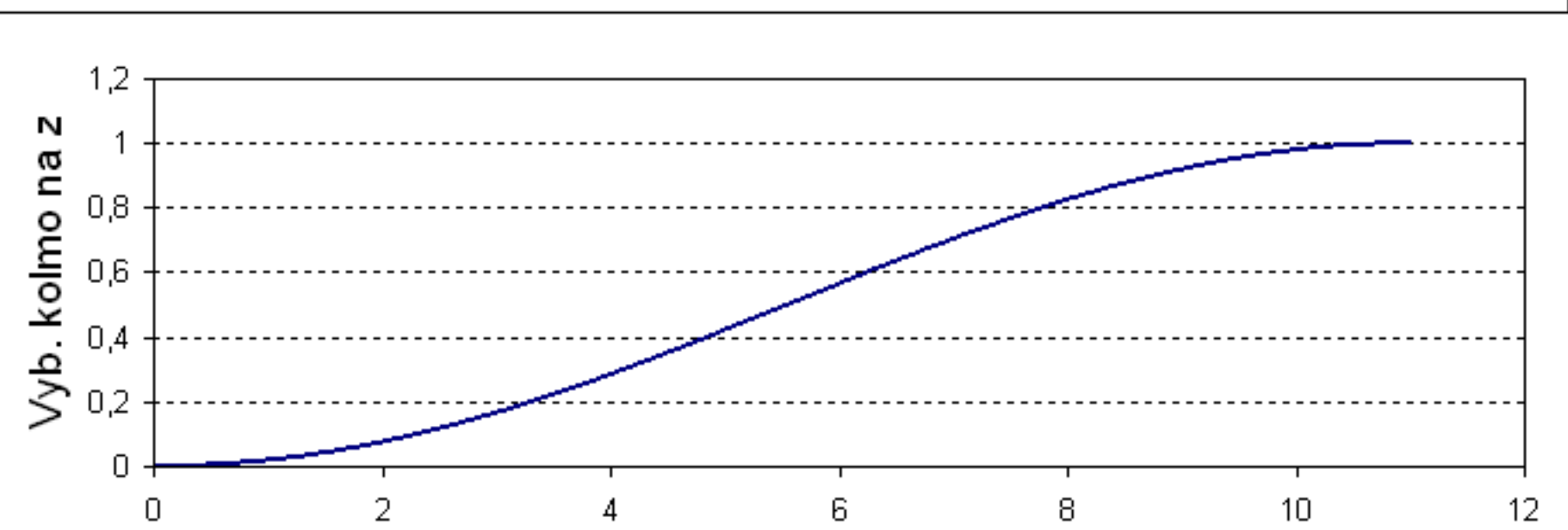
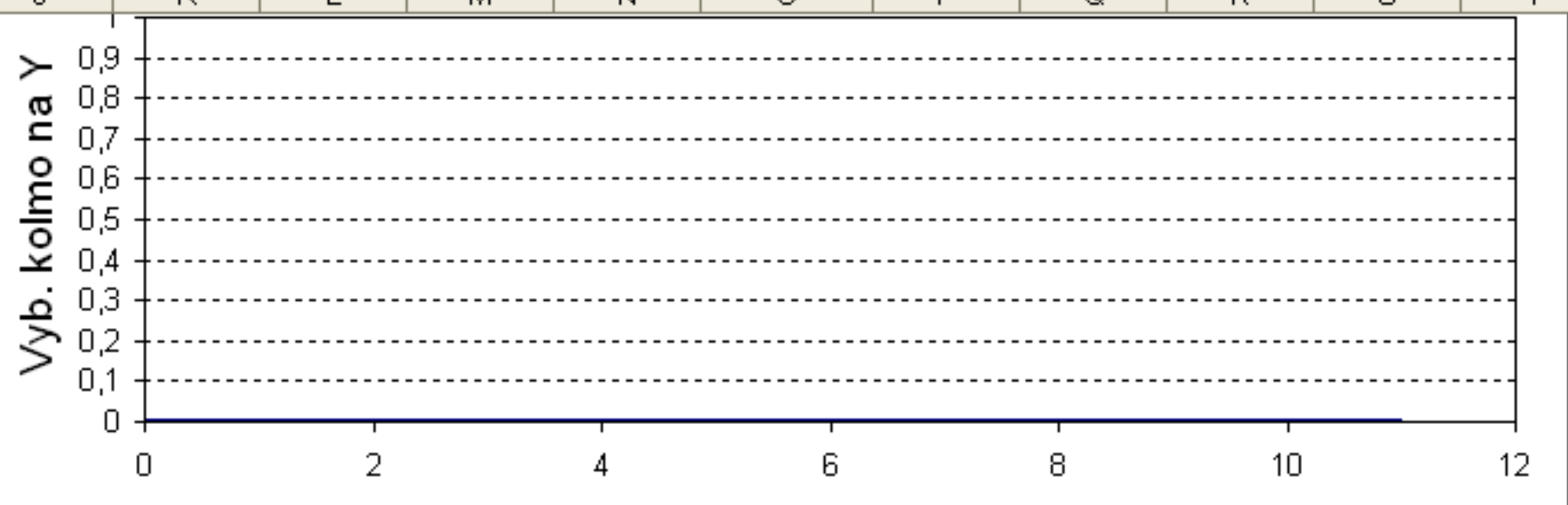
19				Y-Y		4		Počet odstránených	
20				Z-Z		3		riadkov a stĺpcov	
21				ϑ - ϑ		3		z titulu aplikovania OP.	
22				Σ =		10			
23				okraj prúta		ĽAVÝ		PRAVÝ	
24				ohyb okolo osi y-y		V		V	
25				osi prierezu osi z-z		V		P	
26				krútenie ϑ - ϑ		K		V	
27				K		$\vartheta=0$			
28				V		$\vartheta=\vartheta'=0$			
29				O					
30				P		$\vartheta=0$			

- Postup:
- 1) Vymazať vstupy
 - 2) Vymazať matice (pred vymazavaním ponechať zadané "n" z predošlého výpočtu)
 - 3) Zadať nové vstupy (len žlté bunky) + dopočítať ostatné vstupy od nich závislé
 - 4) Zostaviť matice k1el, k2el, K1, K2
 - 5) Zostaviť matice A a B
 - 6) Vypísať čísla eliminácií
 - 7) Aplikovať okrajové podmienky na matice A a B
 - 8) Zatvoriť Excel súbor (uložiť zmeny) a otvoriť priložený MathCAD súbor
 - 9) Spočítať worksheet až dokonca a zatvoriť MathCAD súbor (netreba uložiť zmeny)
 - 10) Otvoriť Excel súbor + Importovať vlastné tvary a čísla
 - 11) Aplikovať OP na vlastné tvary
 - 12) Vypísať kritické sily pre jednotlivé tvary
 - 13) Zadať poradové číslo požadovaného vl.tvaru do bunky E46 a vykresliť

38	VÝSLEDKY:			
39	Kritická sila pre prvý vlastný tvar:			
40	Ncr,min= 11981,473 kN			
41				
42	13) Vykresli vlastný tvar s por.č. [E46] a vypíš prísl. Ncr			
43				
44	m=	delenie na elemente pre vykreslenie:		100
45				
46	Vlastný tvar číslo:			49
47	Príslušné vlastné číslo- kritická sila:			-11981,5 kN
48	Vlastné tvary - deformácie			11981,5
49	súr. X [m]	kolmo Y-Y	kolmo Z-Z	skrútenie
50	0	0	0	0
51	0,011	0	2,3256E-06	-0,001651
52	0,022	0	9,3024E-06	-0,0033016
53	0,033	0	2,093E-05	-0,0049516
54	0,044	0	3,7208E-05	-0,0066011
55	0,055	0	5,8137E-05	-0,0082498
56	0,066	0	8,3716E-05	-0,0098979
57	0,077	0	0,00011395	-0,0115452
58	0,088	0	0,00014882	-0,0131917
59	0,099	0	0,00018835	-0,0148373
60	0,11	0	0,00023253	-0,0164819
61	0,121	0	0,00028136	-0,0181256
62	0,132	0	0,00033483	-0,0197682
63	0,143	0	0,00039296	-0,0214096
64	0,154	0	0,00045573	-0,0230499
65	0,165	0	0,00052315	-0,0246889
66	0,176	0	0,00059522	-0,0263267
67	0,187	0	0,00067194	-0,0279631
68	0,198	0	0,00075331	-0,029598
69	0,209	0	0,00083932	-0,0312315
70	0,22	0	0,00092998	-0,0328635
71	0,231	0	0,00102529	-0,0344939
72	0,242	0	0,00112524	-0,0361226
73	0,253	0	0,00122984	-0,0377496
74	0,264	0	0,00133909	-0,0393749
75	0,275	0	0,00145298	-0,0409983
76	0,286	0	0,00157152	-0,0426198
77	0,297	0	0,00169471	-0,0442394
78	0,308	0	0,00182254	-0,045857
79	0,319	0	0,00195502	-0,0474726

12) Vypíš kritické sily

poradie	Ncr [kN]
1	3118705
2	2845072
3	2473734
4	2088988
5	1723600
6	1413887
7	1144976
8	930464
9	749552
10	537005
11	448274
12	353263
13	261785
14	193642
15	21205
16	43408
17	85072
18	129091
19	12472813
20	11379829
21	9905207
22	8362172
23	6913845
24	5666510
25	4602701
26	3735463
27	3019015
28	2166696
29	1830217
30	1459043
31	1402840
32	1329246
33	1190653
34	1076569
35	1012553
36	855906
37	786927
38	702606



PRÍLOHA 5

**PRÍKLAD VÝPOČTU VZPERNEJ ODOLNOSTI HLINÍKOVÉHO PRÚTA S POZDĹŽNYM
ZVAROM**

**PRÍKLAD VÝPOČTU VZPERNEJ ODOLNOSTI HLINÍKOVÉHO PRÚTA S PRIEČNYM
ZVAROM**

Výpočet odolnosti prúta z hliníkovej zliatiny s pozdĺžnymi zvarmi podľa EN 1999-1-1 (marec 2007) [11] a opráv podľa Tab. 4.1

Rozmery prierezu:

$$b := 70\text{mm} \quad t_w := 1.9\text{mm}$$

Materiál :

EN-AW 6063 heat treated T66

- zliatina tepelne spracovaná:

$$f_o := 200\text{MPa} \quad f_u := 245\text{MPa} \quad \text{Tab. 3.2b [11]}$$

$$f_{o.haz} := 75\text{MPa} \quad f_{u.haz} := 130\text{MPa}$$

$$\text{Vzperná krivka:} \quad BC := "A" \quad BC = \text{buckling class}$$

$$\text{Zváraný profil:} \quad \text{welds} := "with"$$

$$E := 70000\text{MPa} \quad G := 27000\text{MPa} \quad 3.2.5 (1) [11]$$

Dĺžka a okrajové podmienky:

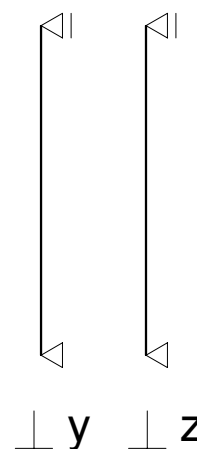
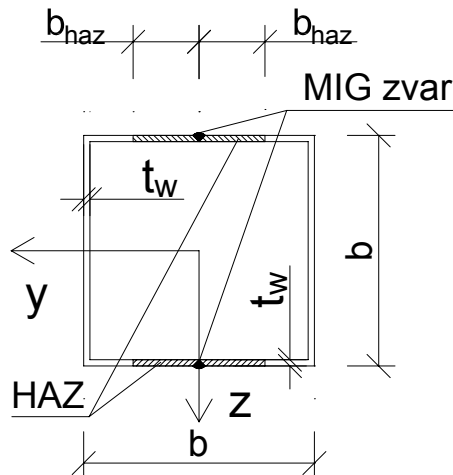
$$L := 3000\text{mm}$$

$$k_y := 1 \quad L_{cr,y} := k_y \cdot L \quad L_{cr,y} = 3 \text{ m}$$

Prierezové charakteristiky:

$$A := b \cdot t_w \cdot 2 + (b - 2 \cdot t_w) \cdot t_w \cdot 2 \quad A = 517.56 \text{ mm}^2$$

$$I_y := \frac{1}{12} \cdot b^4 - \frac{1}{12} \cdot (b - 2 \cdot t_w)^4 \quad I_y = 4.004 \times 10^5 \text{ mm}^4$$



Z integrálneho vzťahu pre tenkostenné profily:

$$I_y = \int_s z(s)^2 t(s) ds$$

$$I_{yy} := t_w \cdot \left[4 \cdot \left[\left(\frac{b - t_w}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right] + 2 \cdot \left[\left(\frac{b - t_w}{2} \right)^2 \cdot (b - t_w) \right] \right] \quad I_y = 4 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\text{Štíhlosť steny:} \quad b_w := b - 2 \cdot t_w \quad b_w = 66.2 \text{ mm} \quad \beta_w := \frac{b_w}{t_w} \quad \beta_w = 34.842 \quad 6.1.4.3 (1) a) [11]$$

$$\xi := \sqrt{\frac{250\text{MPa}}{f_o}} \quad \varepsilon = 1.118 \quad \text{Tab. 6.2 [11]}$$

$$\beta_{1,w} := \begin{cases} 11 \cdot \varepsilon & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "without" \\ 9\varepsilon & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "with" \\ 13 \cdot \varepsilon & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "without" \\ 10\varepsilon & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "with" \end{cases}$$

$$\beta_{1,w} = 10.062$$

$$\beta_{3,w} := \begin{cases} 22 \cdot \varepsilon & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "without" \\ 18\varepsilon & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "with" \\ 18 \cdot \varepsilon & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "without" \\ 15\varepsilon & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "with" \end{cases}$$

$$\beta_{3,w} = 20.125$$

Prierez je triedy : $class_w = "4"$

$$\beta_{2,w} := \begin{cases} 16 \cdot \varepsilon & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "without" \\ 13\varepsilon & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "with" \\ 16.5 \cdot \varepsilon & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "without" \\ 13.5\varepsilon & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "with" \end{cases}$$

$$\beta_{2,w} = 14.534$$

$$class_w := \begin{cases} "1" & \text{if } \beta_w \leq \beta_{1,w} \\ "2" & \text{if } \beta_{1,w} < \beta_w \leq \beta_{2,w} \\ "3" & \text{if } \beta_{2,w} < \beta_w \leq \beta_{3,w} \\ "4" & \text{if } \beta_{3,w} < \beta_w \end{cases}$$

Tab. 6.2 [11]

$$C_1 := \begin{cases} 32 & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "without" \\ 29 & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "with" \\ 29 & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "without" \\ 25 & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "with" \end{cases}$$

$$C_1 = 29$$

$$C_2 := \begin{cases} 220 & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "without" \\ 198 & \text{if } BC = "A" \wedge \text{welds} = "with" \\ 198 & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "without" \\ 150 & \text{if } BC = "B" \wedge \text{welds} = "with" \end{cases}$$

$$C_2 = 198$$

Tab. 6.3 [11]

$$\rho_c := \begin{cases} \rho \left(\frac{C_1}{\beta_w} - \frac{C_2}{\left(\frac{\beta_w}{\varepsilon}\right)^2} \right) & \\ 1 & \text{if } \beta_w \leq \beta_{3,w} \\ \rho & \text{otherwise} \end{cases}$$

(6.12) [11]

(6.11) [11]

$$\rho_c = 0.727$$

Efektívne charakteristiky prierezu z titulu lokálnej straty stability:

$$t_{\text{eff},w} := \rho_c \cdot t_w$$

$$t_{\text{eff},w} = 1.381 \text{ mm}$$

6.1.5 [11]

$$A_{\text{eff},\text{buckling}} := A \cdot \rho_c$$

$$A_{\text{eff},\text{buckling}} = 376.107 \text{ mm}^2$$

Zohľadnenie oslabenia materialu z titulu pozdĺžnych zvarov v teplom ovplyvnenej oblasti - HAZ (heat-affected zone):

Ovplyvnená šírka pre MIG:

$$b_{\text{haz}} := \begin{cases} 20\text{mm} & \text{if } t_w \leq 6\text{mm} \\ 30\text{mm} & \text{if } 6\text{mm} < t_w \leq 12\text{mm} \\ 35\text{mm} & \text{if } 12\text{mm} < t_w \leq 25\text{mm} \\ 40\text{mm} & \text{otherwise} \end{cases}$$

6.1.6.3 (3) [11]

$$b_{\text{haz}} = 20 \text{ mm}$$

Redukčný faktor pre HAZ:

$$\rho_{o,\text{haz}} := \frac{f_{o,\text{haz}}}{f_o}$$

$$\rho_{o,\text{haz}} = 0.375$$

(6.13) [11]

V oblasti HAZ, ktorá spadá do triedy 4 platí menší z redukčných faktorov:

$$\min(\rho_c, \rho_{o.haz}) = 0.375$$

6.2.5.2 (2) c) [11]

Výpočet efektívnej plochy prierezu s ohľadom na lokálnu stratu stability aj na mäknutie v HAZ:

$$A_{eff} := b \cdot t_w \cdot 2 \cdot \rho_c + (b - 2 \cdot t_w - 2 \cdot b_{haz}) \cdot t_w \cdot 2 \cdot \rho_c + 4 \cdot b_{haz} \cdot t_w \cdot \min(\rho_c, \rho_{o.haz})$$

$$A_{eff} = 322.65 \text{ mm}^2$$

6.3.1.1 (2) [11] s opravou podľa Tab. 4.1

Návrhová odolnosť prierezu: $N_{c.Rd} := A_{eff} \cdot \frac{f_o}{\gamma_{M1}}$

$$\gamma_{M1} := 1.1$$

$$N_{c.Rd} = 58.664 \text{ kN} \quad (6.22) [11]$$

Kritická sila:

$$N_{cr} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L_{cr,y}^2}$$

$$N_{cr} = 30.709 \text{ kN}$$

Pomerná štíhlosť:

$$\lambda_p := \sqrt{\frac{A_{eff} \cdot f_o}{N_{cr}}}$$

$$\lambda_p = 1.45 \quad (6.51) [11]$$

Výpočet súčiniteľa vzperu:

$$\alpha := \begin{cases} 0.2 & \text{if BC = "A"} \\ 0.32 & \text{if BC = "B"} \end{cases}$$

$$\lambda_0 := \begin{cases} 0.1 & \text{if BC = "A"} \\ 0 & \text{if BC = "B"} \end{cases}$$

$$\alpha = 0.2$$

$$\lambda_0 = 0.1 \quad \text{Tab. 6.6 [11]}$$

$$\phi := 0.5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_p - \lambda_0) + \lambda_p^2 \right]$$

$$\phi = 1.686$$

$$\chi' := \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda_p^2}}$$

$$\chi' = 0.393 \quad (6.50) [11]$$

$$\chi := \min(\chi', 1)$$

$$\chi = 0.393$$

Faktor κ pre prúty s pozdĺžnymi zvarmi:

$$A = 517.56 \text{ mm}^2$$

$$A_{haz} := 4 \cdot b_{haz} \cdot t_w$$

$$A_1 := A - A_{haz} \cdot (1 - \rho_{o.haz})$$

$$A_1 = 422.56 \text{ mm}^2$$

$$\kappa := \begin{cases} \kappa_A \leftarrow 1 - \left(1 - \frac{A_1}{A}\right) \cdot 10^{-\lambda_p} - \left(0.05 + 0.1 \cdot \frac{A_1}{A}\right) \cdot \lambda_p^{1.3 \cdot (1 - \lambda_p)} & \text{if BC = "A"} \\ \kappa_B \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda_p \leq 0.2 \\ 1 + 0.04 \cdot (4 \cdot \lambda_p)^{0.5 - \lambda_p} - 0.22 \cdot \lambda_p^{1.4 \cdot (1 - \lambda_p)} & \text{otherwise} \end{cases} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Tab. 6.5 [11]

BC = "A"

$$\kappa = 0.888$$

(6.49) [11]

Návrhová odolnosť prúta s pozdĺžnymi zvarmi:

$$N_{b.Rd.w} := \kappa \cdot \chi \cdot A_{eff} \cdot \frac{f_o}{\gamma_{M1}}$$

$$N_{b.Rd.w} = 20.451 \text{ kN}$$

Výpočet odolnosti prúta z hliníkovej zliatiny podľa EN 1999-1-1 (marec 2007) [11] s pričným zvarom v mieste x_s od inflexneho bodu

Rozmery prierezu:

$$b := 70\text{mm} \quad t_w := 1.9\text{mm}$$

Materiál :

EN-AW 6063 heat treated T66

- zliatina tepelne spracovaná:

$$f_o := 200\text{MPa} \quad f_u := 245\text{MPa} \quad \text{Tab. 3.2b [11]}$$

$$f_{o.haz} := 75\text{MPa} \quad f_{u.haz} := 130\text{MPa}$$

$$\text{Vzperná krivka:} \quad BC := "A" \quad BC = \text{buckling class}$$

$$\text{Zváraný profil:} \quad \text{welds} := "with" \quad 6.1.4.4 (3) [11]$$

Na prúte sa nenachádzajú priečne výstuhy.

$$E := 70000\text{MPa} \quad G := 27000\text{MPa} \quad 3.2.5 (1) [11]$$

Dĺžka a okrajové podmienky:

$$L := 2000\text{mm} \quad k_y := 0.7 \quad l_c := k_y \cdot L \quad l_c = 1.4 \text{ m}$$

Priečný zvar sa nachádza v strede prúta.

Poloha priečného zvaru vzhľadom na inflexný bod vlastného tvaru vybočenia:

$$x_s := 0.5L$$

Prierezové charakteristiky:

$$A := b \cdot t_w \cdot 2 + (b - 2 \cdot t_w) \cdot t_w \cdot 2 \quad A = 517.56 \text{ mm}^2$$

$$I_y := \frac{1}{12} \cdot b^4 - \frac{1}{12} \cdot (b - 2 \cdot t_w)^4 \quad I_y = 4.004 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

Z integrálneho vzťahu pre tenkostenné profily:

$$I_y = \int_s z(s)^2 t(s) ds$$

$$I_{yy} := t_w \cdot \left[4 \cdot \left[\left(\frac{b - t_w}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right] + 2 \cdot \left[\left(\frac{b - t_w}{2} \right)^2 \cdot (b - t_w) \right] \right]$$

$$I_y = 4 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

Štíhlosť steny:

$$b_w := b - 2 \cdot t_w \quad b_w = 66.2 \text{ mm}$$

$$\beta_w := \frac{b_w}{t_w}$$

$$\beta_w = 34.842 \quad 6.1.4.3 (1) a) [11]$$

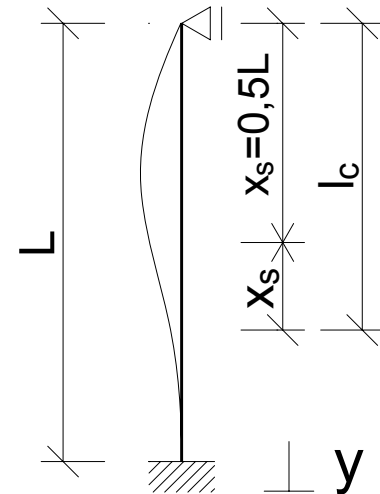
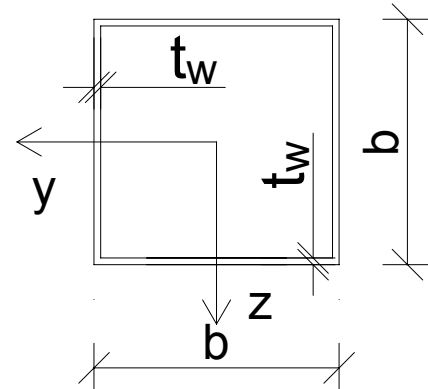
$$\xi_w := \sqrt{\frac{250\text{MPa}}{f_o}}$$

$$\xi = 1.118$$

Tab. 6.2 [11]

$$\gamma_{M1} := 1.1$$

6.1.3 [11]



$$\beta_{1,w} := \begin{cases} 11 \cdot \varepsilon & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 9\varepsilon & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "with"} \\ 13 \cdot \varepsilon & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 10\varepsilon & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "with"} \end{cases}$$

$$\beta_{1,w} = 10.062$$

$$\beta_{3,w} := \begin{cases} 22 \cdot \varepsilon & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 18\varepsilon & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "with"} \\ 18 \cdot \varepsilon & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 15\varepsilon & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "with"} \end{cases}$$

$$\beta_{3,w} = 20.125$$

Prierez je triedy : $\text{class}_w = "4"$

$$\beta_{2,w} := \begin{cases} 16 \cdot \varepsilon & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 13\varepsilon & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "with"} \\ 16.5 \cdot \varepsilon & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 13.5\varepsilon & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "with"} \end{cases}$$

$$\beta_{2,w} = 14.534$$

$$\text{class}_w := \begin{cases} "1" & \text{if } \beta_w \leq \beta_{1,w} \\ "2" & \text{if } \beta_{1,w} < \beta_w \leq \beta_{2,w} \\ "3" & \text{if } \beta_{2,w} < \beta_w \leq \beta_{3,w} \\ "4" & \text{if } \beta_{3,w} < \beta_w \end{cases}$$

Tab. 6.2 [11]

$$C_1 := \begin{cases} 32 & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 29 & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "with"} \\ 29 & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 25 & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "with"} \end{cases}$$

$$C_1 = 29$$

$$C_2 := \begin{cases} 220 & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 198 & \text{if BC = "A" } \wedge \text{ welds = "with"} \\ 198 & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "without"} \\ 150 & \text{if BC = "B" } \wedge \text{ welds = "with"} \end{cases}$$

$$C_2 = 198$$

Tab. 6.3 [11]

$$\rho_c := \begin{cases} \rho \leftarrow \frac{C_1}{\frac{\beta_w}{\varepsilon}} - \frac{C_2}{\left(\frac{\beta_w}{\varepsilon}\right)^2} \\ 1 & \text{if } \beta_w \leq \beta_{3,w} \\ \rho & \text{otherwise} \end{cases}$$

(6.12) [11]

$$\rho_c = 0.727$$

(6.11) [11]

Efektívne charakteristiky prierezu z titulu lokalnej straty stability:

$$t_{\text{eff},w} := \rho_c \cdot t_w$$

$$t_{\text{eff},w} = 1.381 \text{ mm}$$

6.1.5 [11]

$$A_{\text{eff}} := A \cdot \rho_c$$

$$A_{\text{eff}} = 376.107 \text{ mm}^2$$

Kritická sila:

$$N_{\text{cr}} := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l_c^2}$$

$$N_{\text{cr}} = 141.009 \text{ kN}$$

Pomerná štíhlosť:

$$\lambda_p := \sqrt{\frac{A_{\text{eff}} \cdot f_0}{N_{\text{cr}}}}$$

$$\lambda_p = 0.73$$

(6.51) [11]

Výpočet súčiniteľa vzperu:

$$\alpha := \begin{cases} 0.2 & \text{if BC = "A"} \\ 0.32 & \text{if BC = "B"} \end{cases}$$

$$\lambda_0 := \begin{cases} 0.1 & \text{if BC = "A"} \\ 0 & \text{if BC = "B"} \end{cases}$$

$$\alpha = 0.2$$

$$\lambda_0 = 0.1$$

Tab. 6.6 [11]

$$\phi := 0.5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_p - \lambda_0) + \lambda_p^2 \right]$$

$$\phi = 0.83$$

$$\chi' := \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda_p^2}} \quad \chi' = 0.817 \quad (6.50) [11]$$

$$\chi := \min(\chi', 1) \quad \chi = 0.817$$

Návrhová odolnosť prúta určená ako pre prút bez priečného zvaru (vyjadrená vzhľadom na rez v strede vzpernej dĺžky prúta):

$$\kappa := 1 \quad 6.3.1.1 (2) [11] \text{ s doplňujúcou poznámkou 1 z Tab. 4.1}$$

$$N_{b.Rd.s} := \kappa \cdot \chi \cdot A_{eff} \cdot \frac{f_o}{\gamma_{M1}} \quad N_{b.Rd.s} = 55.89 \text{ kN} \quad (6.49) [11]$$

Výpočet odolnosti prúta s priečnym zvarom (vyjadrenej vzhľadom na rez v mieste priečného zvaru):

Redukčný faktor: $\rho_{u.haz} := \frac{f_{u.haz}}{f_u} \quad \rho_{u.haz} = 0.531 \quad 6.1.6.2 (1) [11]$

$$\gamma_{M2} := 1.25 \quad 6.1.3 [11]$$

$$\omega'_0 := \frac{\rho_{u.haz} \cdot \frac{f_u}{\gamma_{M2}}}{f_o} \quad \omega'_0 = 0.572 \quad \omega_0 := \min(1, \omega'_0) \quad (6.67) [11]$$

$$\omega_0 = 0.572$$

Upravená pomerná štíhlosť: $\lambda_{haz} := \lambda_p \cdot \sqrt{\omega_0} \quad \lambda_{haz} = 0.552 \quad 6.3.3.3 (3) [11]$

$$\phi_{haz} := 0.5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_{haz} - \lambda_0) + \lambda_{haz}^2 \right] \quad 6.3.1.2 [11] \text{ so zohľadnením pridanej poznámky (5) podľa Tab. 4.1}$$

$$\phi_{haz} = 0.698$$

Súčiniteľ vzperu vyjadrený pre upravenú pomernú štíhlosť :

$$\chi'_{haz} := \frac{1}{\phi_{haz} + \sqrt{\phi_{haz}^2 - \lambda_{haz}^2}} \quad \chi'_{haz} = 0.89 \quad (6.50) [11]$$

$$\chi_{haz} := \min(\chi'_{haz}, 1) \quad \chi_{haz} = 0.89$$

Zohľadnenie polohy priečného zvaru a zníženej pevnosti:

$$\omega_x := \frac{\omega_0}{\chi_{haz} + (1 - \chi_{haz}) \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{x_s}{l_c}\right)} \quad \omega_x = 0.586 \quad (6.65) [11]$$

$$\kappa_{ww} := \omega_x \quad 6.3.1.1 (2) [11]$$

Návrhová odolnosť prúta s ohľadom na priečny zvar v mieste x_s od inflexného bodu:

$$N_{b.Rd.w} := \kappa \cdot \chi_{haz} \cdot A_{eff} \cdot \frac{f_o}{\gamma_{M1}} \quad N_{b.Rd.w} = 35.653 \text{ kN} \quad (6.49) [11]$$

Celková odolnosť prúta

$$N_{b.Rd} := \min(N_{b.Rd.s}, N_{b.Rd.w}) \quad \boxed{N_{b.Rd} = 35.653 \text{ kN}}$$

PRÍLOHA 6

**RIEŠENIE VLASTNÝCH TVAROV A ČÍSIEL PRÚTA S PREMENNÝM PRIEREZOM A
S NEKONŠTANTNOU OSOVOVOU SILOU DIFERENČNOU METÓDOU A OVERENIE
(5.8) AK PLATÍ (5.5)**

**RIEŠENIE PRÍDAVNÉHO PRIEHYBU TLAČENÉHO PRÚTA S PREMENNÝM
PRIEREZOM A S IMPERFEKCIOU V TVARE PARABOLY**

Program na výpočet vlastných tvarov a vlastných čísel riešenia dif. rovnice rovnováhy ideálneho prúta s premenným prierezom a premennou osovou silou. Program na výpočet priehybu skutočného prúta so začiatočnou imperfekciou a overenie vlastností prídavného priehybu prúta ak za začiatočnú imperfekciu zvolíme vlastný tvar prúta.

Diferenciálna rovnica rovnováhy ideálneho prúta:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \cdot \frac{d}{dx} w(x) + N(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0$$

Dĺžka prúta: $L := 10$ [m]

Počet elementov: $p_e := 500$

Počet rovníc: $n := p_e - 1$ $n = 499$

Dĺžka kroku: $l_k := \frac{L}{n+1}$ $l_k = 0.02$

Celkový vektor uzlov: $i := 0..n+1$
 $x_{u_i} := i \cdot l_k$

Celkový počet uzlov: $n+2 = 501$

Zadefinovanie premenného prierezu:

$t := 0.02$ [m]

$a_h := 0.1$

$a_b := 0.1$

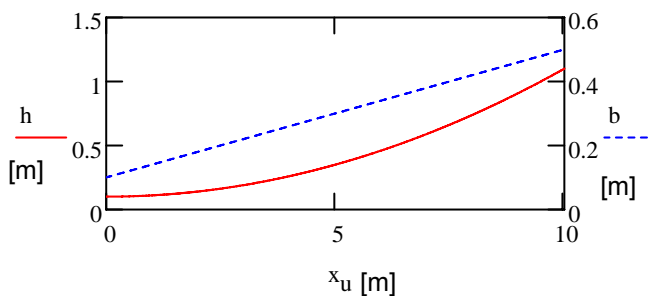
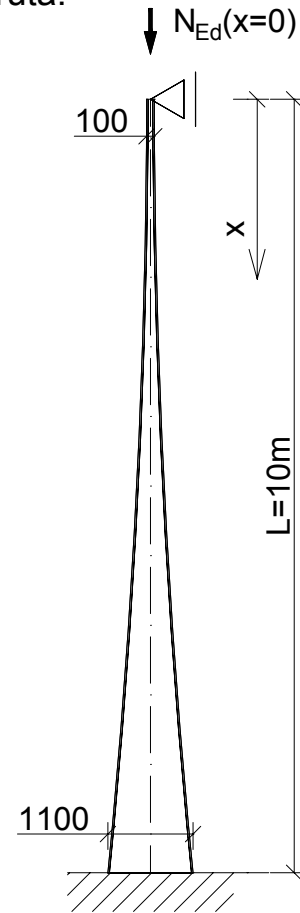
$b_h := 0.01$

$b_b := 0.04$

$h_i := a_h + b_h \cdot (i \cdot l_k)^2$ [m] $b_i := a_b + b_b \cdot i \cdot l_k$ [m]

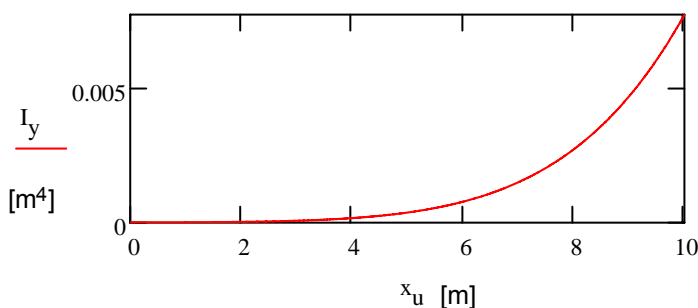
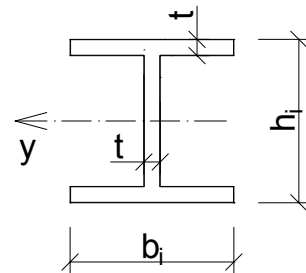
ORIGIN = 0

	0
0	0
1	0.02
2	0.04
3	0.06
4	0.08
5	0.1
6	0.12
7	0.14
8	0.16
9	0.18
10	0.2



$h_0 = 0.1$ [m]

$h_{n+1} = 1.1$ [m]



$$I_y := \left[\frac{1}{12} b \cdot h^3 - \frac{1}{12} (b-t) \cdot (h-2t)^3 \right]$$

$$I_{y_0} = 6.893 \times 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$I_{y_{n+1}} = 7.818 \times 10^{-3} \text{ [m}^4\text{]}$$

$$\frac{I_{y_{n+1}}}{I_{y_0}} = 1.134 \times 10^3$$

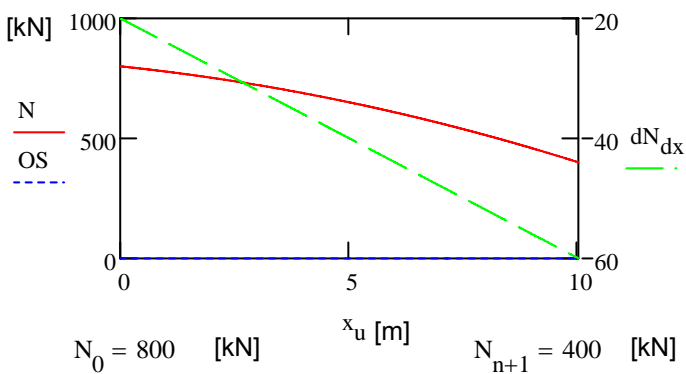
	0		0		0		0		0
0	0	0	0.1	0	0.1	0	0.1	0	6.893·10 ⁻⁶
1	0.02	1	0.1	1	0.101	1	0.101	1	6.946·10 ⁻⁶
2	0.04	2	0.10002	2	0.102	2	0.102	2	7.001·10 ⁻⁶
3	0.06	3	0.10004	3	0.102	3	0.102	3	7.057·10 ⁻⁶
4	0.08	4	0.10006	4	0.103	4	0.103	4	7.114·10 ⁻⁶
5	0.1	5	0.1001	5	0.104	5	0.104	5	7.173·10 ⁻⁶
6	0.12	6	0.10014	6	0.105	6	0.105	6	7.234·10 ⁻⁶
7	0.14	7	0.1002	7	0.106	7	0.106	7	7.296·10 ⁻⁶
8	0.16	8	0.10026	8	0.106	8	0.106	8	7.36·10 ⁻⁶
9	0.18	9	0.10032	9	0.107	9	0.107	9	7.425·10 ⁻⁶
10	0.2	10	0.1004	10	0.108	10	0.108	10	7.493·10 ⁻⁶

Zadefinovanie premennej osovej sily:

$$N_1 := -800 \quad N_2 := 20 \quad N_3 := 2$$

$$N := -(N_1 + N_2 \cdot x_u + N_3 \cdot x_u^2)$$

$$dN_{dx} := -(N_2 + 2 \cdot N_3 \cdot x_u)$$



$$\text{os x: } OS := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ OS_i \leftarrow 0 \cdot i \\ OS \end{cases}$$

	0
0	800
1	799.599
2	799.197
3	798.793
4	798.387
5	797.98
6	797.571
7	797.161
8	796.749
9	796.335
10	795.92

	0
0	-20
1	-20.08
2	-20.16
3	-20.24
4	-20.32
5	-20.4
6	-20.48
7	-20.56
8	-20.64
9	-20.72
10	-20.8

$$E := 210000000 \text{ [kPa]}$$

Zadanie okrajových podmienok:

ak je na začiatku kĺb potom $OP_z = -1$ ak votknutie potom $OP_z = 1$
na konci kĺb potom $OP_k = -1$ ak votknutie potom $OP_k = 1$

$$OP_z := -1$$

$$OP_k := 1$$

$$\underline{\text{ORIGIN}} := 1 \quad n = 499$$

Matica zohľadňujúca okrajové podmienky:

$$p := 1..n \quad r := 1..n$$

$$M_{EI.op_{p,r}} := 0$$

$$M_{EI.op_{1,1}} := \left(E \cdot I_{y_1} \cdot \frac{1}{4} \right) OP_z$$

$$M_{EI.op_{n,n}} := \left(E \cdot I_{y_{n+2}} \cdot \frac{1}{4} \right) OP_k$$

	1	2
1	-9.048·10 ⁹	0
2	0	0

	1	2
1	-9.048·10 ⁹	0
2	0	0

Poznámka:

Členy v argumentoch matíc majú posunuté indexy o "+1" v porovnaní so vzťahom (5.27) vzhľadom na to, že pri definovaní vektorov I_y , N a dN_{dx} bolo ORIGIN=0 a teraz je predefinované na ORIGIN=1.

Matica podľa (5.31):

Matica podľa (5.29):

$$M'_{EI} := \begin{matrix} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{cases} \frac{E \cdot I_{y_i} + 4 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}} + E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} & \text{if } i = j \\ \frac{-2 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}} - 2 \cdot E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} & \text{if } i = j - 1 \\ \frac{E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} & \text{if } i = j - 2 \\ \frac{-2 \cdot E \cdot I_{y_i} - 2 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}}}{l_k^4} & \text{if } i = j + 1 \\ \frac{E \cdot I_{y_i}}{l_k^4} & \text{if } i = j + 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{matrix} \quad M$$

$$M'_N := \begin{matrix} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{cases} N_{i+1} \cdot \frac{-2}{l_k^2} & \text{if } i = j \\ N_{i+1} \cdot \frac{1}{l_k^2} & \text{if } i = j - 1 \\ N_{i+1} \cdot \frac{1}{l_k^2} & \text{if } i = j + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{matrix} \quad M$$

Matica podľa (5.30):

$$M_{dN} := \begin{matrix} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{cases} dN_{dx_{i+1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot l_k} & \text{if } i = j - 1 \\ dN_{dx_{i+1}} \cdot \frac{-1}{2 \cdot l_k} & \text{if } i = j + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{matrix} \quad M$$

$$M_{dN} =$$

	1	2	3	4
1	0	-502	0	0
2	504	0	-504	0
3	0	506	0	-506
4	0	0	508	0

$$M_N := M'_N + M_{dN}$$

Aplikovanie okrajových podmienok: $M_{EI} := M'_{EI} + M_{EI,op}$

$$M_{EI} =$$

	1	2	3	4	5	6
1	4.566·10 ¹⁰	-3.661·10 ¹⁰	9.188·10 ⁹	0	0	0
2	-3.661·10 ¹⁰	5.513·10 ¹⁰	-3.69·10 ¹⁰	9.262·10 ⁹	0	0
3	9.188·10 ⁹	-3.69·10 ¹⁰	5.557·10 ¹⁰	-3.72·10 ¹⁰	9.337·10 ⁹	0
4	0	9.262·10 ⁹	-3.72·10 ¹⁰	5.603·10 ¹⁰	-3.75·10 ¹⁰	9.415·10 ⁹
5	0	0	9.337·10 ⁹	-3.75·10 ¹⁰	5.649·10 ¹⁰	-3.782·10 ¹⁰
6	0	0	0	9.415·10 ⁹	-3.782·10 ¹⁰	5.697·10 ¹⁰

$$M_N =$$

	1	2	3	4	5	6
1	-3.998·10 ⁶	1.998·10 ⁶	0	0	0	0
2	1.998·10 ⁶	-3.996·10 ⁶	1.997·10 ⁶	0	0	0
3	0	1.997·10 ⁶	-3.994·10 ⁶	1.996·10 ⁶	0	0
4	0	0	1.996·10 ⁶	-3.992·10 ⁶	1.995·10 ⁶	0
5	0	0	0	1.995·10 ⁶	-3.99·10 ⁶	1.994·10 ⁶
6	0	0	0	0	1.994·10 ⁶	-3.988·10 ⁶

Riešenie zovšeobecneného problému vlastných čísel a vlastných vektorov matíc M_{EI} a M_N :

Vlastné vektory η_{cr} sú
jednotlivé stĺpce matice M_{η} :

$$M_{\eta} := \text{genvecs}(M_{EI}, M_N)$$

Vlastné čísla α_{cr} sú jednotlivé
argumenty vektora α :

$$\alpha := \text{genvals}(M_{EI}, M_N)$$

ORIGIN := 0

$$M_{\eta} =$$

	422	423	424	425	426	427	428
0	0.025	0.017	-0.026	0.022	0.029	-0.026	-0.032
1	0.05	0.034	-0.052	0.044	0.058	-0.052	-0.063
2	0.075	0.051	-0.077	0.065	0.085	-0.076	-0.093
3	0.1	0.067	-0.102	0.085	0.111	-0.098	-0.119
4	0.125	0.083	-0.127	0.105	0.136	-0.117	-0.142
5	0.149	0.099	-0.15	0.122	0.158	-0.134	-0.16
6	0.174	0.115	-0.173	0.139	0.178	-0.146	-0.174
7	0.198	0.13	-0.194	0.153	0.195	-0.155	-0.182
8	0.223	0.144	-0.215	0.166	0.209	-0.16	-0.186

$$\alpha^T =$$

	422	423	424	425	426	427	428
0	-5.473	-16.407	-32.798	-54.761	-82.232	-115.265	-153.806

Pre každý vlastný vektor a jemu prislúchajúce vlastné číslo platí: $M_{EI} \eta_{cr_i} = \alpha_{cr_i} \cdot M_N \eta_{cr_i}$

Koeficient rozdojenia rovnováhy a jeho poloha vo vektore vlastných čísel:

ORIGIN := 0

$$\alpha_{cr} := \left| \begin{array}{l} \alpha_{abs} \leftarrow \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \alpha'_i \leftarrow |\alpha_i| \\ \alpha' \end{array} \right. \\ \alpha_{min.abs} \leftarrow \min(\alpha_{abs}) \\ i \leftarrow \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad i \text{ if } |\alpha_i| = \alpha_{min.abs} \\ -\alpha_{min.abs} \text{ if } \alpha_i < 0 \\ \alpha_{min.abs} \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$cr := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad i \text{ if } |\alpha_i| = |\alpha_{cr}| \end{array} \right.$$

$$cr = 422$$

$$\alpha_{cr} = -5.4734$$

$$\alpha_{cr+1} = -16.4071$$

$$\alpha_{cr+2} = -32.8$$

Koeficient rozdojenia rovnováhy vypočítaný v programe IQ100:

$$\alpha_{cr.IQ100} := 5.4737$$

$$\frac{\alpha_{cr.IQ100} - |\alpha_{cr}|}{|\alpha_{cr}|} = 4.785 \times 10^{-3} \%$$

Prvé 4 vlastné tvary a doplnenie krajných uzlov, v ktorých je hodnota priehybu nulová:

$$\eta_{cr.1} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \left| \begin{array}{l} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1, cr}} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \eta \end{array} \right.$$

$$\eta_{cr.2} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \left| \begin{array}{l} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1, cr+1}} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \eta \end{array} \right.$$

$$\eta_{cr.3} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \left| \begin{array}{l} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1, cr+2}} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \eta \end{array} \right.$$

$$\eta_{cr.4} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \left| \begin{array}{l} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1, cr+3}} \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ \eta \end{array} \right.$$

Prvé 2 vlastné tvary s pridanými krajnými uzlami nachádzajúcimi sa mimo prúta podľa okrajových podmienok:

$$\eta_{cr.1.u} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+3 \\ \eta_i \leftarrow \left| \begin{array}{l} \eta_{cr.1,i+1} \text{ if } i = 0 \wedge OP_Z = 1 \\ -\eta_{cr.1,i+1} \text{ if } i = 0 \wedge OP_Z = -1 \\ \eta_{cr.1,n} \text{ if } i = n+3 \wedge OP_k = 1 \\ -\eta_{cr.1,n} \text{ if } i = n+3 \wedge OP_k = -1 \\ 0 \text{ if } i = n+2 \vee i = 1 \\ \eta_{cr.1,i-1} \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right| \eta$$

$$\eta_{cr.2.u} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+3 \\ \eta_i \leftarrow \left| \begin{array}{l} \eta_{cr.2,i+1} \text{ if } i = 0 \wedge OP_Z = 1 \\ -\eta_{cr.2,i+1} \text{ if } i = 0 \wedge OP_Z = -1 \\ \eta_{cr.2,n} \text{ if } i = n+3 \wedge OP_k = 1 \\ -\eta_{cr.2,n} \text{ if } i = n+3 \wedge OP_k = -1 \\ 0 \text{ if } i = n+2 \vee i = 1 \\ \eta_{cr.2,i-1} \text{ otherwise} \end{array} \right. \end{array} \right| \eta$$

 $\eta_{cr.1} =$

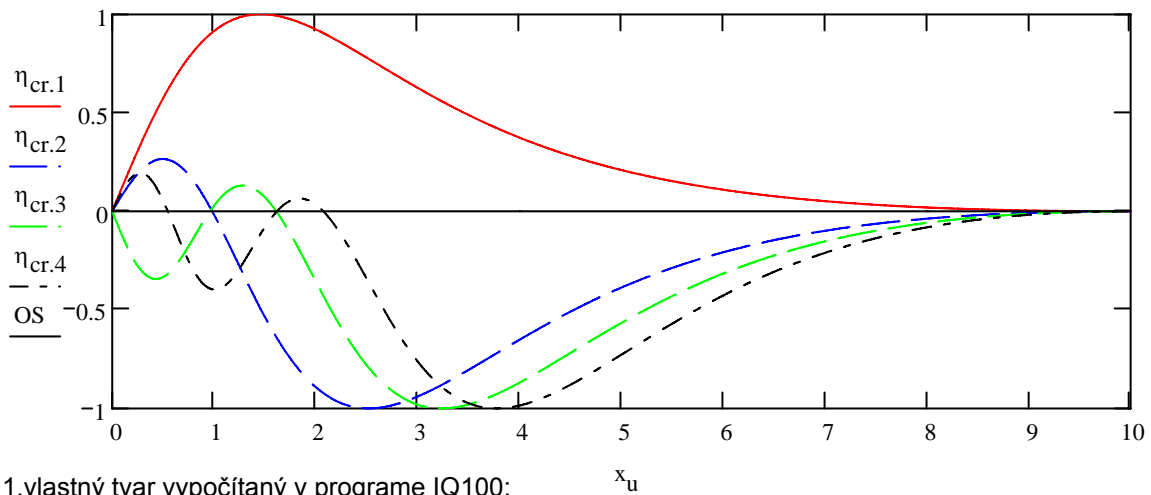
	0
0	0
1	0.025
2	0.05
3	0.075
4	0.1
5	0.125
6	0.149
7	0.174
8	0.198
9	0.223
10	0.247

 $\eta_{cr.2} =$

	0
0	0
1	0.017
2	0.034
3	0.051
4	0.067
5	0.083
6	0.099
7	0.115
8	0.13
9	0.144
10	0.158

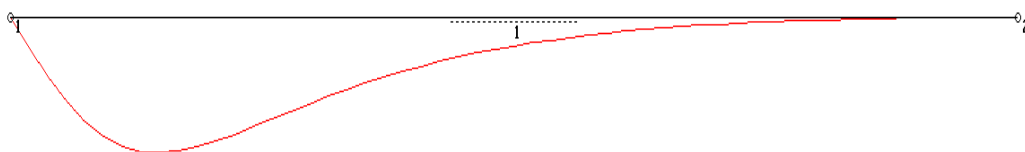
 $\eta_{cr.1.u} =$

	0
0	-0.025
1	0
2	0.025
3	0.05
4	0.075
5	0.1
6	0.125
7	0.149
8	0.174
9	0.198
10	0.223



1.vlastný tvar vypočítaný v programe IQ100:

Knickfigur (Systemknicken):
Verzweigungslastfaktoren:
MII (Normalkräfte nach Theorie II. Ordnung): eingegebene MII
System : 5.4737



Tvary ohybových momentov pre prvé 2 vlastné tvary:

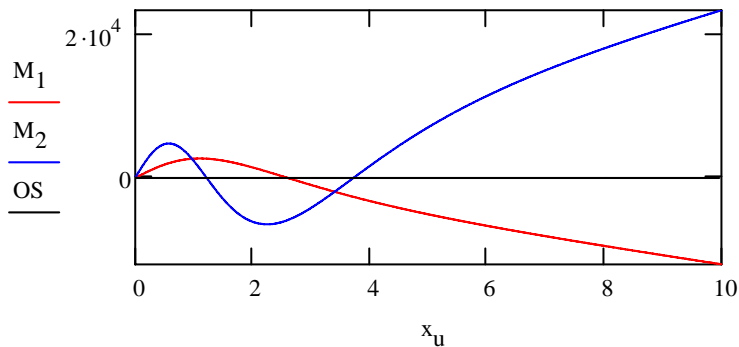
$$M_1 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_i \leftarrow -E \cdot I_{y_i} \cdot \left(\frac{\eta_{cr.1.u_i} - 2 \cdot \eta_{cr.1.u_{i+1}} + \eta_{cr.1.u_{i+2}}}{l_k^2} \right) \\ M \end{cases}$$

$$M_2 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_i \leftarrow -E \cdot I_{y_i} \cdot \left(\frac{\eta_{cr.2.u_i} - 2 \cdot \eta_{cr.2.u_{i+1}} + \eta_{cr.2.u_{i+2}}}{l_k^2} \right) \\ M \end{cases}$$

	0
0	0
1	84.3367
2	168.5172
3	252.442
4	336.0136
5	419.1367
6	501.7185
7	583.6683
8	664.8982
9	745.3226
10	824.8589

$$\text{MaxM} := \max(\max(M_1), \max(M_2)) \quad \text{MinM} := \min(\min(M_1), \min(M_2))$$

	0
0	0
1	273.2215
2	545.34852
3	815.41865
4	1.08249·103
5	1.34566·103
6	1.60405·103
7	1.8568·103
8	2.10311·103
9	2.3422·103
10	2.57335·103



Výpočet priehybu skutočného prúta so začiatočnou imperfekciou diferencnou metódou a overenie dvoch vlastností uvedených v časti 5.1 (overenie (5.8) ak platí (5.5))

Diferenciálna rovnica rovnováhy skutočného prúta s nekonztantným prierezom a osovou silou:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} w(x) + \frac{d}{dx} w_0(x) \right) + N(x) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{d^2}{dx^2} w_0(x) \right) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \cdot \frac{d}{dx} w(x) + N(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = \frac{d}{dx} N(x) \frac{d}{dx} w_0(x) - N(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w_0(x)$$

Prútu z prvej časti výpočtu je zadefinovaná počiatočná imperfekcia v tvare priebehu C-násobku jeho 1. vlastného tvaru:

$$C := 0.5$$

ORIGIN = 0

$$\eta_0 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+3 \\ \eta_{0_i} \leftarrow C \cdot \eta_{cr.1.u_i} \\ \eta_0 \end{cases}$$

	0
0	-0.025
1	0
2	0.025
3	0.05
4	0.075
5	0.1

	0
0	-0.01252
1	0
2	0.01252
3	0.02503
4	0.03751
5	0.04996

Prvá a druhá derivácia priebehu imperfekcie:

$$\eta'_{0,i} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta'_{0,i} \leftarrow \frac{\eta_{0,i+2} - \eta_{0,i}}{2 \cdot l_k} \\ \eta'_{0,0} \end{cases} \quad \eta''_{0,i} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta''_{0,i} \leftarrow \frac{\eta_{0,i} - 2 \cdot \eta_{0,i+1} + \eta_{0,i+2}}{l_k^2} \\ \eta''_{0,0} \end{cases}$$

$$\eta'_{0,i} =$$

	0
0	0.6259
1	0.6257
2	0.6248
3	0.6234
4	0.6214

$$\eta''_{0,i} =$$

	0
0	0
1	-0.029
2	-0.057
3	-0.085
4	-0.112

$$N =$$

	0
0	800
1	799.599
2	799.197
3	798.793
4	798.387

$$dN_{dx} =$$

	0
0	-20
1	-20.08
2	-20.16
3	-20.24
4	-20.32

Prispôsobenie veľkosti vektorov počtu rovníc:

ORIGIN := 1

$$\eta'_{0,p} := \begin{cases} \text{for } j \in 1..n \\ \eta'_{0,p,j} \leftarrow \eta'_{0,j+1} \\ \eta'_{0,p} \end{cases} \quad \eta''_{0,p} := \begin{cases} \text{for } j \in 1..n \\ \eta''_{0,p,j} \leftarrow \eta''_{0,j+1} \\ \eta''_{0,p} \end{cases}$$

$$\eta'_{0,p} =$$

	1
1	0.626
2	0.625
3	0.623
4	0.621
5	0.619

$$\eta''_{0,p} =$$

	1
1	-0.029
2	-0.057
3	-0.085
4	-0.112
5	-0.139

$$N_p := \begin{cases} \text{for } j \in 1..n \\ N_{p,j} \leftarrow N_{j+1} \\ N_p \end{cases} \quad dN_{dx,p} := \begin{cases} \text{for } j \in 1..n \\ dN_{dx,p,j} \leftarrow dN_{dx,j+1} \\ dN_{dx,p} \end{cases}$$

$$N_p =$$

	1
1	799.599
2	799.197
3	798.793
4	798.387
5	797.98

$$dN_{dx,p} =$$

	1
1	-20.08
2	-20.16
3	-20.24
4	-20.32
5	-20.4

Zostavenie matice (ktorá je rovná súčtu matíc M_{EI} a M_N z prvej časti výpočtu) pre sústavu rovníc:

$$M := M_{EI} + M_N$$

Vektor pravých strán:

$$VPS := \overrightarrow{(-dN_{dx,p} \cdot \eta'_{0,p} - N_p \cdot \eta''_{0,p})} \quad VPS =$$

	1
1	35.678
2	58.4
3	80.654
4	102.411
5	123.642

$$M =$$

	1	2	3	4	5
1	4.565·10 ¹⁰	-3.661·10 ¹⁰	9.188·10 ⁹	0	0
2	-3.661·10 ¹⁰	5.513·10 ¹⁰	-3.69·10 ¹⁰	9.262·10 ⁹	0
3	9.188·10 ⁹	-3.69·10 ¹⁰	5.557·10 ¹⁰	-3.72·10 ¹⁰	9.337·10 ⁹
4	0	9.262·10 ⁹	-3.72·10 ¹⁰	5.602·10 ¹⁰	-3.75·10 ¹⁰
5	0	0	9.337·10 ⁹	-3.75·10 ¹⁰	5.649·10 ¹⁰

Riešenie sústavy nehomogénnych rovníc: $M \cdot w = VPS$

$$w := M^{-1} \cdot VPS$$

$$w =$$

	1
1	2.798·10 ⁻³
2	5.594·10 ⁻³
3	8.385·10 ⁻³
4	0.011
5	0.014

Výsledný priebeh prídavného priehybu:

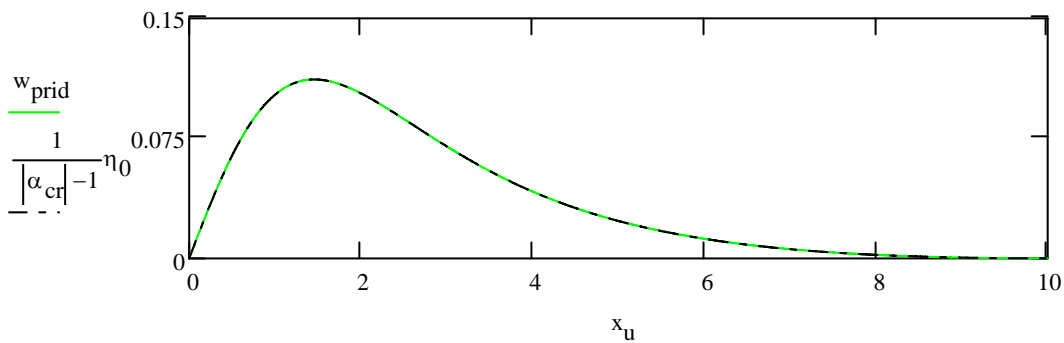
$$\text{ORIGIN} := 0 \quad w_{\text{prid}} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ w_{\text{prid}_i} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } i = n+1 \vee i = 0 \\ w_{i-1} & \text{otherwise} \end{cases} \\ w_{\text{prid}} \end{cases}$$

$$w_{\text{prid}} =$$

	0
0	0
1	2.798·10 ⁻³
2	5.594·10 ⁻³
3	8.385·10 ⁻³
4	0.011
5	0.014
6	0.017

Priebeh prídavného priehybu w_{prid} a $\left(\frac{1}{|\alpha_{\text{cr}}| - 1}\right)$ -násobku začiatočnej imperfekcie η_0 , ktorá je rovná C-násobku 1 vlastného tvaru $\eta_{\text{cr},1}$:

$$\eta_0 := C \cdot \eta_{\text{cr},1}$$



Overenie platnosti (5.8) ak platí (5.5):

$$w = \frac{1}{\alpha_{\text{cr}} - 1} \eta_0 \quad \frac{1}{|\alpha_{\text{cr}}| - 1} = 0.224 \quad \alpha_{\text{cr}} = -5.4734$$

$$\text{rozdiel} := \left(w_{\text{prid}} - \eta_0 \cdot \frac{1}{|\alpha_{\text{cr}}| - 1} \right)$$

$$w_{\text{prid}} =$$

	0
0	0
1	2.798·10 ⁻³
2	5.594·10 ⁻³
3	8.385·10 ⁻³
4	0.011
5	0.014
6	0.017
7	0.019
8	0.022
9	0.025
10	0.028

$$\eta_0 \cdot \frac{1}{|\alpha_{\text{cr}}| - 1} =$$

	0
0	0
1	2.798·10 ⁻³
2	5.594·10 ⁻³
3	8.385·10 ⁻³
4	0.011
5	0.014
6	0.017
7	0.019
8	0.022
9	0.025
10	0.028

$$\text{rozdiel} =$$

	0
0	0
1	1.132·10 ⁻¹⁰
2	2.257·10 ⁻¹⁰
3	3.395·10 ⁻¹⁰
4	4.524·10 ⁻¹⁰
5	5.661·10 ⁻¹⁰
6	6.788·10 ⁻¹⁰
7	7.941·10 ⁻¹⁰
8	9.073·10 ⁻¹⁰
9	1.024·10 ⁻⁹
10	1.137·10 ⁻⁹

Program na riešenie vlastných tvarov a vlastných hodnôt riešenia dif. rovnice stability ideálneho prúta s premenným prierezom a program na výpočet prídavného priehybu skutočného prúta so začiatočnou imperfekciou a spojitým priečnym zaťažením

Diferenciálna rovnica rovnováhy ideálneho prúta:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \cdot \frac{d}{dx} w(x) + N(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0$$

Použité jednotky: kN kPa m

ORIGIN = 0

Dĺžka a počet elementov: $L := 12$ [m]

$p_e := 600$

Počet rovníc: $n := p_e - 1$ $n = 599$

Dĺžka kroku $l_k := \frac{L}{n+1}$ $l_k = 0.02$ [m]

Celkový vektor uzlov: $i := 0..n+1$
 $x_{u_i} := i \cdot l_k$

$x_u =$

	0
0	0
1	0.02
2	0.04
3	0.06
4	0.08
5	0.1
6	0.12
7	0.14
8	0.16
9	0.18
10	0.2

Celkový počet uzlov: $n + 2 = 601$

Výpočet koeficientov funkcie paraboly definujúcej premennú výšku prierezu:

$h_{str} := 0.272$ [m] $h_k := 0.152$ [m]

$$K := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 6^2 \\ 1 & 12 & 12^2 \end{pmatrix} \quad v_k := \begin{pmatrix} h_k \\ h_{str} \\ h_k \end{pmatrix}$$

$$k := K^{-1} \cdot v_k \quad k = \begin{pmatrix} 0.152 \\ 0.04 \\ -3.333 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

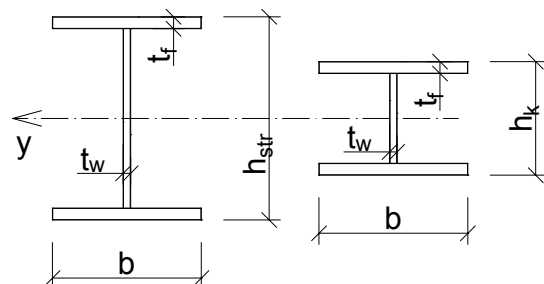
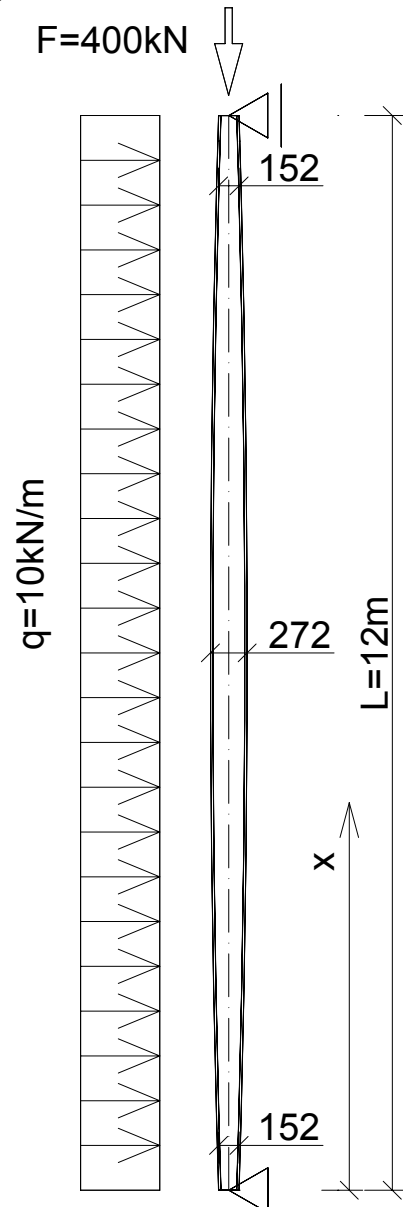
Zadefinovanie premenného prierezu:

$t_f := 0.016$ [m] $b := 0.2$ [m] $t_w := 0.01$ [m]

$$h_i := k_0 + k_1 \cdot (i \cdot l_k) + k_2 \cdot (i \cdot l_k)^2$$

$$I_y := \left[\frac{1}{12} b \cdot h^3 - \frac{1}{12} \cdot (b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f)^3 \right]$$

$$A := \left[b \cdot h - (b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f) \right]$$



	0
0	0.152
1	0.152799
2	0.153595
3	0.154388
4	0.155179
5	0.155967
6	0.156752
7	0.157535
8	0.158315
9	0.159092
10	0.159867

$h =$ [m]

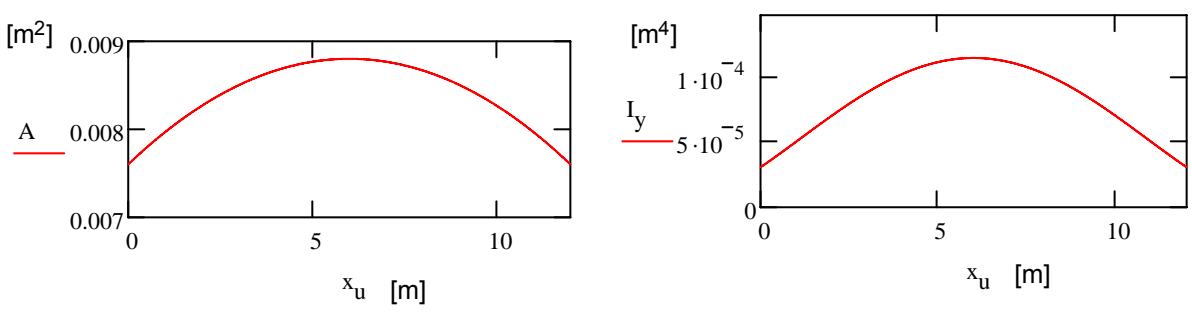
	0
0	$7.6 \cdot 10^{-3}$
1	$7.608 \cdot 10^{-3}$
2	$7.616 \cdot 10^{-3}$
3	$7.624 \cdot 10^{-3}$
4	$7.632 \cdot 10^{-3}$
5	$7.64 \cdot 10^{-3}$
6	$7.648 \cdot 10^{-3}$
7	$7.655 \cdot 10^{-3}$
8	$7.663 \cdot 10^{-3}$
9	$7.671 \cdot 10^{-3}$
10	$7.679 \cdot 10^{-3}$

$A =$ [m²]

	0
0	$3.117 \cdot 10^{-5}$
1	$3.155 \cdot 10^{-5}$
2	$3.193 \cdot 10^{-5}$
3	$3.231 \cdot 10^{-5}$
4	$3.269 \cdot 10^{-5}$
5	$3.307 \cdot 10^{-5}$
6	$3.345 \cdot 10^{-5}$
7	$3.384 \cdot 10^{-5}$
8	$3.422 \cdot 10^{-5}$
9	$3.461 \cdot 10^{-5}$
10	$3.499 \cdot 10^{-5}$

$I_y =$ [m⁴]

$\frac{A_{n+1}}{A_0} = 1$
 $\frac{A_n}{A_1} = 1$
 $\frac{I_{y_{n+1}}}{I_{y_0}} = 1$
 $\frac{I_{y_n}}{I_{y_1}} = 1$



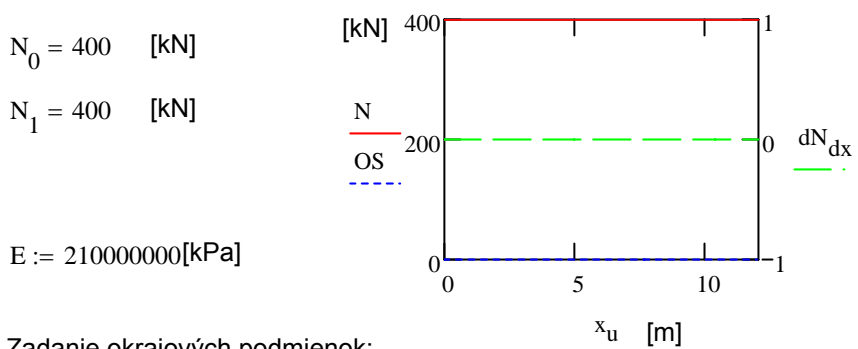
Zadefinovanie osovej sily (v tomto príklade je osová sila konštantná):

$N_1 := 400$ $N_2 := 0$ $N_3 := 0$ os x:
 $N := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ OS_i \leftarrow 0 \cdot i \\ OS \end{cases}$

$N_w := (N_1 + N_2 \cdot x_u + N_3 \cdot x_u^2)$
 $dN_{dx} := (N_2 + 2 \cdot N_3 \cdot x_u)$

	0
0	400
1	400
2	400
3	400
4	400
5	400
6	400
7	400
8	400
9	400
10	400

$N =$ [kN]



Zadanie okrajových podmienok:

ak je na začiatku kĺb potom $OP_z = -1$ ak votknutie potom $OP_z = 1$ $OP_z := -1$
 na konci kĺb potom $OP_k = -1$ ak votknutie potom $OP_k = 1$ $OP_k := -1$

Matica zohľadňujúca okrajové podmienky:

$p := 1..n$ $r := 1..n$ $n = 599$ $M_{EI.op_{p,r}} := 0$ ORIGIN := 1

$M_{EI.op_{1,1}} := \left(E \cdot I_{y_1} \cdot \frac{1}{l_k^4} \right) OP_z$ $M_{EI.op} =$

	1	2
1	$-4.091 \cdot 10^{10}$	0
2	0	0

$$M_{EI.op_{n,n}} := \left(E \cdot I_{y_{n+2}} \cdot \frac{1}{l_k^4} \right) OP_k$$

$$M_{EI.op} =$$

	1	2
1	-4.091·1010	0
2	0	0

Poznámka:

Členy v argumentoch matíc majú posunuté indexy o "+1" v porovnaní so vzťahom (5.27) vzhľadom na to, že pri definovaní vektorov I_y , N a dN_{dx} bolo ORIGIN=0 a teraz je predefinované na ORIGIN=1.

Matica podľa (5.29):

$$M'_{EI} :=$$

for i ∈ 1..n	
for j ∈ 1..n	
$M_{i,j} \leftarrow \frac{E \cdot I_{y_i} + 4 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}} + E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4}$	if i = j
$\frac{-2 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}} - 2 \cdot E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4}$	if i = j - 1
$\frac{E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4}$	if i = j - 2
$\frac{-2 \cdot E \cdot I_{y_i} - 2 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}}}{l_k^4}$	if i = j + 1
$\frac{E \cdot I_{y_i}}{l_k^4}$	if i = j + 2
0	otherwise

M

$$M_{dN} =$$

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Matica podľa (5.31):

$$M'_N :=$$

for i ∈ 1..n	
for j ∈ 1..n	
$M_{i,j} \leftarrow \frac{N_{i+1} \cdot \frac{-2}{l_k^2}}$	if i = j
$\frac{N_{i+1} \cdot \frac{1}{l_k^2}}$	if i = j - 1
$\frac{N_{i+1} \cdot \frac{1}{l_k^2}}$	if i = j + 1
0	otherwise

M

Matica podľa (5.30):

$$M_{dN} :=$$

for i ∈ 1..n	
for j ∈ 1..n	
$M_{i,j} \leftarrow \frac{dN_{dx_{i+1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot l_k}}$	if i = j - 1
$\frac{dN_{dx_{i+1}} \cdot \frac{-1}{2 \cdot l_k}}$	if i = j + 1
0	otherwise

M

$$M_N := M'_N + M_{dN}$$

Aplikovanie okrajových podmienok: $M_{EI} := M'_{EI} + M_{EI.op}$

$$M_{EI} =$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	2.075·1011	-1.666·1011	4.19·1010	0	0	0	0
2	-1.666·1011	2.514·1011	-1.686·1011	4.24·1010	0	0	0
3	4.19·1010	-1.686·1011	2.544·1011	-1.706·1011	4.29·1010	0	0
4	0	4.24·1010	-1.706·1011	2.574·1011	-1.726·1011	4.34·1010	0
5	0	0	4.29·1010	-1.726·1011	2.604·1011	-1.746·1011	4.391·1010
6	0	0	0	4.34·1010	-1.746·1011	2.634·1011	-1.766·1011
7	0	0	0	0	4.391·1010	-1.766·1011	2.665·1011

$$M_N = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -2 \cdot 106 & 1 \cdot 106 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 \cdot 106 & -2 \cdot 106 & 1 \cdot 106 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 106 & -2 \cdot 106 & 1 \cdot 106 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 106 & -2 \cdot 106 & 1 \cdot 106 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 106 & -2 \cdot 106 & 1 \cdot 106 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 106 & -2 \cdot 106 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Riešenie zovšeobecneného problému vlastných čísel a vlastných vektorov matíc M_{EI} a M_N :

ORIGIN := 0

Vlastné vektory η_{cr} sú

Vlastné čísla α_{cr} sú jednotlivé

jednotlivé stĺpce matice M_{η} :

argumenty vektora α :

$M_{\eta} := \text{genvecs}(M_{EI}, M_N)$

$\alpha := \text{genvals}(M_{EI}, M_N)$

$$M_{\eta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 462 & 463 & 464 & 465 & 466 & 467 & 468 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -5.911 \cdot 10^{-3} & 0.013 & 0.018 & 0.024 & 0.029 & 0.036 & -0.041 \\ -0.012 & 0.026 & 0.035 & 0.048 & 0.059 & 0.071 & -0.082 \\ -0.018 & 0.039 & 0.053 & 0.072 & 0.088 & 0.107 & -0.123 \\ -0.024 & 0.051 & 0.071 & 0.096 & 0.117 & 0.142 & -0.163 \\ -0.03 & 0.064 & 0.088 & 0.12 & 0.146 & 0.177 & -0.203 \\ -0.035 & 0.077 & 0.106 & 0.144 & 0.175 & 0.211 & -0.243 \\ -0.041 & 0.09 & 0.123 & 0.167 & 0.203 & 0.245 & -0.281 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\alpha^T = \begin{matrix} & \begin{matrix} 462 & 463 & 464 & 465 & 466 & 467 & 468 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -3.563 & -11.763 & -25.467 & -44.651 & -69.317 & -99.462 & -135.086 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Pre ktorékoľvek vlastné číslo a jemu prislúchajúci vektor musí platiť: $M_{EI} \eta_{cr_i} = \alpha_{cr_i} \cdot M_N \eta_{cr_i}$

Koeficient rozdzvojenia rovnováhy a jeho poloha vo vektore vlastných čísel:

$$\alpha_{cr} := \begin{cases} \alpha_{abs} \leftarrow \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \alpha'_i \leftarrow |\alpha_i| \\ \alpha' \end{cases} & \text{cr} := \text{for } i \in 0..n-1 \\ & i \text{ if } |\alpha_i| = |\alpha_{cr}| \\ \alpha_{min.abs} \leftarrow \min(\alpha_{abs}) & \text{cr} = 462 \\ i \leftarrow \text{for } i \in 0..n-1 & \alpha_{cr} = -3.5626 \\ i \text{ if } |\alpha_i| = \alpha_{min.abs} & \alpha_{cr+1} = -11.7634 \\ -\alpha_{min.abs} \text{ if } \alpha_i < 0 & \alpha_{cr+2} = -25.4666 \\ \alpha_{min.abs} \text{ otherwise} & \text{Kritická sila: } \alpha_{cr} \cdot N_1 = -1425.03 \text{ [kN]} \end{cases}$$

Koeficient rozdzvojenia rovnováhy vypočítaný v programe IQ100:
 $\alpha_{cr.IQ100} := 3.5626$
 $\text{roz}_{\alpha} := \frac{\alpha_{cr.IQ100} - |\alpha_{cr}|}{|\alpha_{cr}|}$
 $\text{roz}_{\alpha} = 8.42 \times 10^{-4} \%$

Prvé 4 vlastné tvary a doplnenie krajných uzlov, v ktorých je hodnota priehybu nulová:

$$\eta_{cr.1} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1, cr}} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.2} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1, cr+1}} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.3} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr+2} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.4} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr+3} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

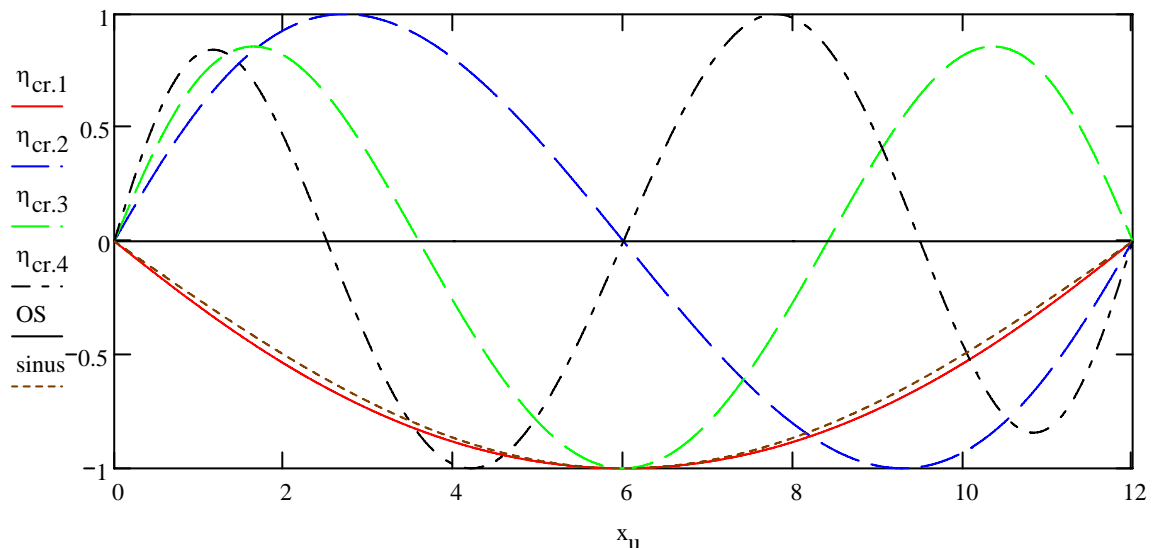
$$\eta_{cr.1} =$$

	0
0	0
1	-5.911·10 ⁻³
2	-0.012
3	-0.018
4	-0.024
5	-0.03
6	-0.035
7	-0.041
8	-0.047

$$\eta_{cr.2} =$$

	0
0	0
1	0.013
2	0.026
3	0.039
4	0.051
5	0.064
6	0.077
7	0.09
8	0.102

$$\text{sinus} := \begin{cases} i \leftarrow \text{for } i \in 1..n \\ i & \text{if } x_{u_i} = 0.5 \cdot L \\ \sin\left(\frac{\pi \cdot x_u}{L}\right) & \text{if } \eta_{cr.1_i} > 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi \cdot x_u}{L}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$



Výpočet prídavného priehtu skutočného prúta so začiatočnou imperfekciou zaťažného konštantnou osovou silou a spojitém priečnym zaťažením

Diferenciálna rovnica rovnováhy skutočného prúta (so začiatočnou imperfekciou) s nekonštantným prierezom zaťažného nekonštantnou osovou silou a spojitém priečnym zaťažením:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} w(x) + \frac{d}{dx} w_0(x) \right) + N(x) \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} w(x) + \frac{d^2}{dx^2} w_0(x) \right) - q(x) = 0$$

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \cdot \frac{d}{dx} w(x) + N(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = q(x) - \frac{d}{dx} N(x) \cdot \frac{d}{dx} w_0(x) - N(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w_0(x)$$

Spojité priečne zaťaženie prúta: $q_i := 10 \text{ [kN/m]}$

ORIGIN = 0

Prútu z prvej časti výpočtu je teraz zadefinovaná počiatočna imperfekcia v tvare kvadratickej paraboly s amplitúdou v strede prúta o hodnote 4,8cm a v smere pôsobiaceho zaťaženia:

Výpočet koeficientov funkcie paraboly pre počiatočnú imperfekciu:

$$K := \begin{pmatrix} 1 & 6 & 6^2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 12^2 \end{pmatrix} \quad v_k := \begin{pmatrix} 0.048 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

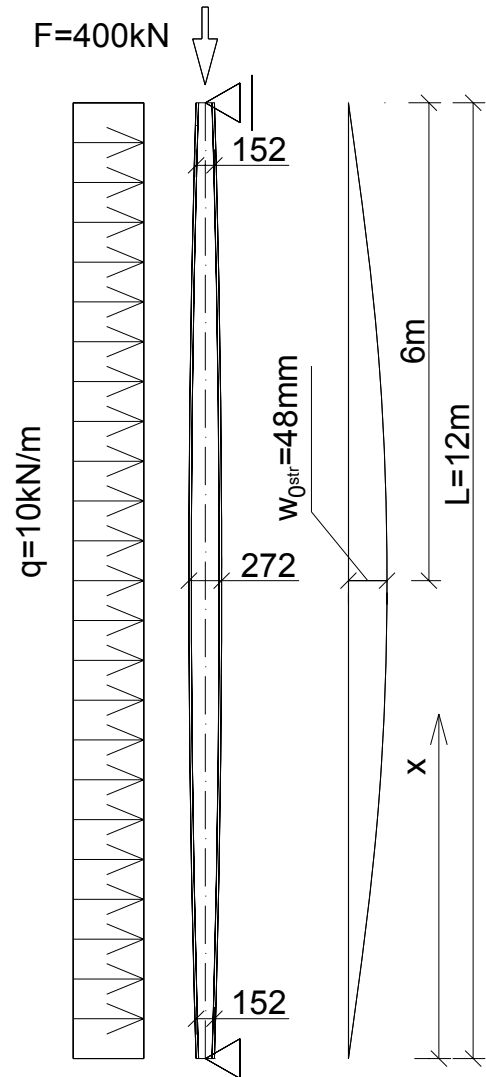
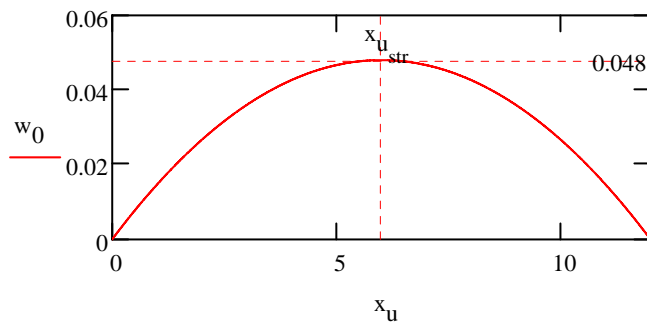
$$k := K^{-1} \cdot v_k \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.016 \\ -1.333 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Priebeh počiatočnej imperfekcie:

$$w_{0_i} := k_0 + k_1(i \cdot l_k) + k_2 \cdot (i \cdot l_k)^2$$

Poloha stredu prúta:

str := for i ∈ 1..n
i if $x_{u_i} = 0.5 \cdot L$ str = 300

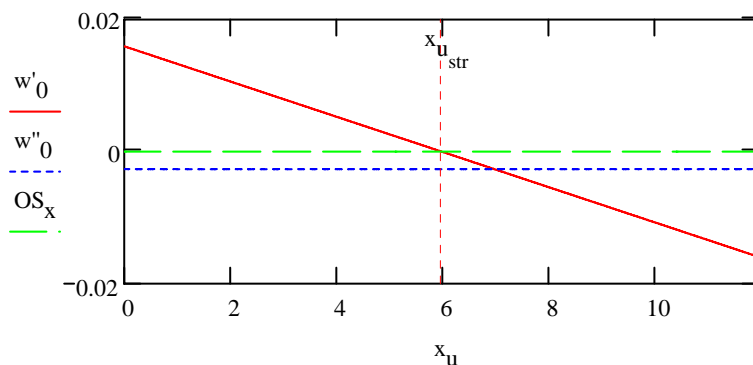


$$w_{0_{str}} = 0.048 \text{ [m]}$$

Prvá a druhá derivácia priebehu počiatočnej imperfekcie:

ORIGIN := 1

$$w'_0 := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ w'_0_i \leftarrow \frac{w_{0_{i+2}} - w_{0_i}}{2 \cdot l_k} \end{cases} \quad w''_0 := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ w''_0_i \leftarrow \frac{w_{0_i} - 2 \cdot w_{0_{i+1}} + w_{0_{i+2}}}{l_k^2} \end{cases} \quad OS_x := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n \\ OS_i \leftarrow 0 \\ OS \end{cases}$$



$$w'_{0_{str}} = 0$$

$$w''_{0_{str}} = -2.6667 \times 10^{-3}$$

Prispôsobenie veľkosti vektorov počtu rovníc:

$$q_p := \begin{cases} \text{for } j \in 1..n \\ q_{p_j} \leftarrow q_{j+1} \\ q_p \end{cases} \quad N_p := \begin{cases} \text{for } j \in 1..n \\ N_{p_j} \leftarrow N_{j+1} \\ N_p \end{cases} \quad dN_{dx,p} := \begin{cases} \text{for } j \in 1..n \\ dN_{dx,p_j} \leftarrow dN_{dx,j+1} \\ dN_{dx,p} \end{cases}$$

Zostavenie matice (je súčtom matíc M_{EI} a M_N z prvej časti výpočtu) pre sústavu rovníc a vektora pravých strán:

$$M := M_{EI} + M_N \quad VPS := \overrightarrow{(-dN_{dx,p} \cdot w'_0 - N_p \cdot w''_0 + q_p)}$$

	1	2	3	4	5
1	2.075·10 ¹¹	-1.666·10 ¹¹	4.19·10 ¹⁰	0	0
2	-1.666·10 ¹¹	2.514·10 ¹¹	-1.686·10 ¹¹	4.24·10 ¹⁰	0
3	4.19·10 ¹⁰	-1.686·10 ¹¹	2.544·10 ¹¹	-1.706·10 ¹¹	4.29·10 ¹⁰
4	0	4.24·10 ¹⁰	-1.706·10 ¹¹	2.574·10 ¹¹	-1.726·10 ¹¹
5	0	0	4.29·10 ¹⁰	-1.726·10 ¹¹	2.604·10 ¹¹

	1
1	11.067
2	11.067
3	11.067
4	11.067
5	11.067

Riešenie sústavy nehomogénnych rovníc:

$$M \cdot w = VPS \quad w := M^{-1} \cdot VPS$$

	1
1	1.169·10 ⁻³
2	2.339·10 ⁻³
3	3.508·10 ⁻³
4	4.676·10 ⁻³
5	5.845·10 ⁻³

Výsledný priebeh prídavného priehybu:

ORIGIN := 0

$$w_{prid} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ w_{prid_i} \leftarrow \begin{cases} 0 & \text{if } i = n+1 \vee i = 0 \\ w_{i-1} & \text{otherwise} \end{cases} \\ w_{prid} \end{cases}$$

	0
0	0
1	1.1693624·10 ⁻³
2	2.3386164·10 ⁻³
3	3.5076568·10 ⁻³
4	4.6763807·10 ⁻³
5	5.8446881·10 ⁻³

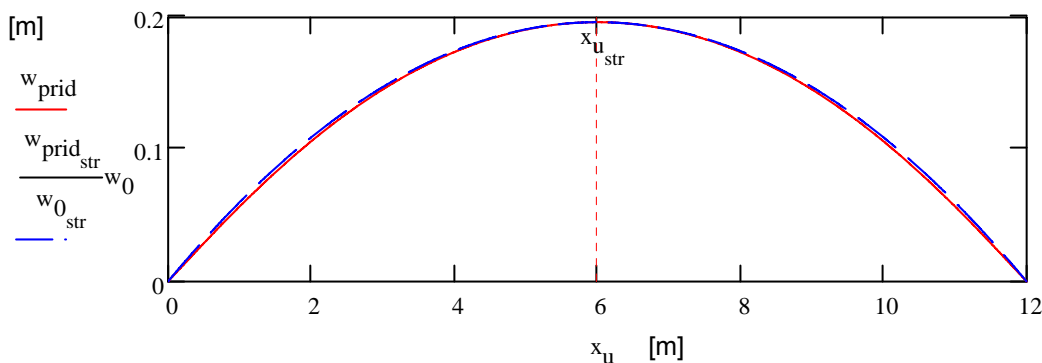
Vypočítaná hodnota prídavnej deformácie v strede prúta:

$$w_{prid_{str}} = 0.19638 \text{ [m]}$$

Hodnota prídavnej deformácie v strede prúta vypočítaná v prog. IQ100: $w_{prid.IQ100} := 0.19638 \text{ [m]}$

$$roz_w := \frac{w_{prid.IQ100} - w_{prid_{str}}}{\min(w_{prid.IQ100}, w_{prid_{str}})} \quad roz_w = -2.475 \times 10^{-4} \%$$

Priebeh prídavnej deformácie v porovnaní s priebehom počiatkovej imperfekcie:



Poznámka: vzhľadom na to, že začiatková imperfekcia nebola volená v tvare vlastného tvaru, nie je priebeh prídavného priehybu afinný priebehu počiatkovej imperfekcie.

Prispôsobenie veľkosti vektora prídavného priehybu podľa okrajových podmienok pre potreby výpočtu momentov:

$$w_{\text{prid.u}} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+3 \\ w_i \leftarrow \begin{cases} w_{\text{prid.i+1}} & \text{if } i = 0 \wedge OP_Z = 1 \\ -w_{\text{prid.i+1}} & \text{if } i = 0 \wedge OP_Z = -1 \\ w_{\text{prid.n}} & \text{if } i = n+3 \wedge OP_k = 1 \\ -w_{\text{prid.n}} & \text{if } i = n+3 \wedge OP_k = -1 \\ 0 & \text{if } i = n+2 \vee i = 1 \\ w_{\text{prid.i-1}} & \text{otherwise} \end{cases} \end{cases}$$

	0
0	-1.16936·10 ⁻³
1	0
2	1.16936·10 ⁻³
3	2.33862·10 ⁻³
4	3.50766·10 ⁻³
5	4.67638·10 ⁻³
6	5.84469·10 ⁻³
7	7.01248·10 ⁻³
8	8.17967·10 ⁻³

[m]

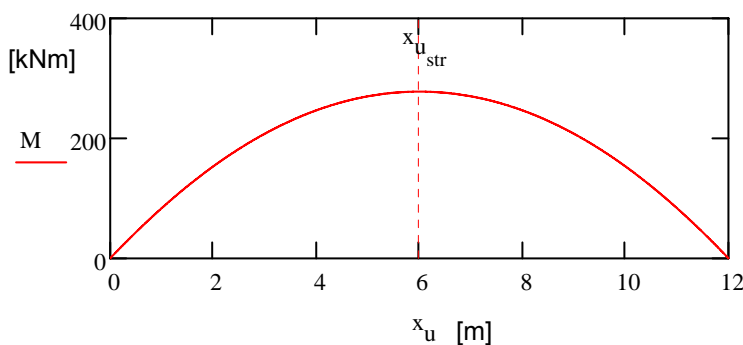
Ohybové momenty od prídavnej deformácie:

$$M_i := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_i \leftarrow -E \cdot I_{y_i} \left(\frac{w_{\text{prid.u}_i} - 2 \cdot w_{\text{prid.u}_{i+1}} + w_{\text{prid.u}_{i+2}}}{l_k^2} \right) \end{cases}$$

	0
0	0
1	1.7935
2	3.5826
3	5.3671
4	7.1471
5	8.9226
6	10.6933
7	12.4594
8	14.2208

[kNm]

Vypočítaný ohybový moment v strede prúta: $M_{\text{str}} = 277.7518$ [kNm]



Ohybový moment v strede prúta vypočítaný v IQ100:

$$M_{\text{IQ100}} := 277.752 \text{ [kNm]}$$

$$\text{roz}_M := \frac{M_{\text{IQ100}} - M_{\text{str}}}{\min(M_{\text{IQ100}}, M_{\text{str}})}$$

$$\text{roz}_M = 8.179 \times 10^{-5} \%$$

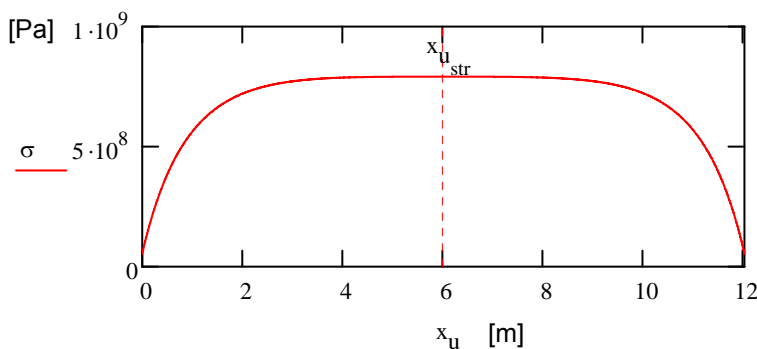
Napätie na prúte v krajnom vlákne:

$$\text{kPa} := 1000\text{Pa}$$

$$\sigma := \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{I_y} \cdot 0.5h \right) \cdot \text{kPa}$$

Napätie v strede prúta v krajnom vlákne:

$$\sigma_{\text{str}} = 790.406 \text{ MPa}$$



	0
0	52.631579
1	70.342524
2	87.588155
3	104.383498
4	120.740895
5	136.676103

MPa

PRÍLOHA 7

PRÍKLAD 1 Z 5.4 RIEŠENÝ DIFERENČNOU METÓDOU

**PRÍKLAD 2 Z 5.4 RIEŠENÝ NA ZÁKLADE POLYNOMICKEJ APROXIMÁCIE
VLASTNÉHO TVARU VYBOČENIA VYGENEROVANÉHO V IQ100**

PRÍKLAD 2 Z 5.4 RIEŠENÝ DIFERENČNOU METÓDOU

Posúdenie stability prúta s premenným prierezom a osovou silou na základe analýzy teóriou II. rádu s imperfekciou v tvare vlastného tvaru podľa NB 5.2 [13] a posúdenie v rozhodujúcom priereze

Výpočet priebehu vlastného tvaru vybočenia prúta riešením diferenciálnej rovnice diferenčnou metódou :

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \cdot \frac{d}{dx} w(x) + N(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0$$

Vzhľadom na problém vlastných čísel a vlastných tvarov matic, ktoré museli mať argumenty bezrozmerné, boli v prvej časti výpočtu veličiny bezrozmerné (jednotka je uvádzaná v hranatých zátvorkách) a v druhej časti boli jednotky zadefinované.

Dĺžka prúta: $L := 10$ [m]

Počet elementov: $p_e := 1000$

Počet rovníc: $n := p_e - 1$ $n = 999$

Dĺžka kroku: $l_k := \frac{L}{n+1}$ $l_k = 0.01$ [m]

Celkový $i := 0..n+1$

vektor uzlov: $x_i := i \cdot l_k$

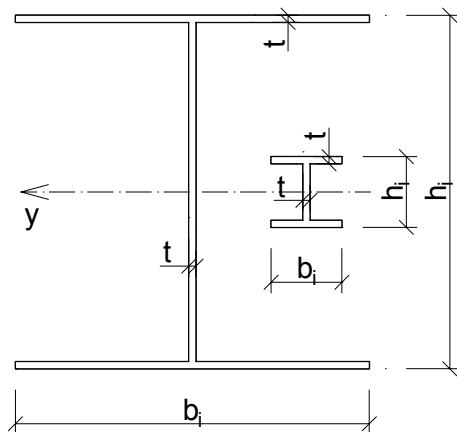
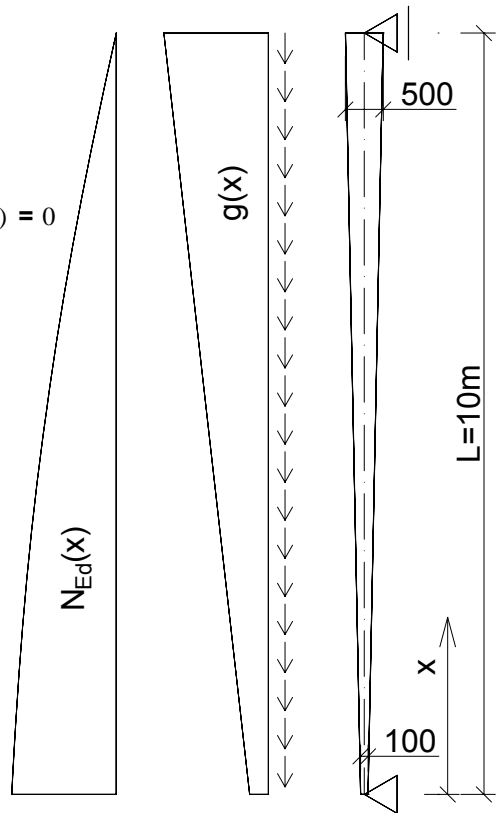
Celkový počet uzlov: $n+2 = 1001$

Prierezové charakteristiky: $h_i := 0.1 + 0.04 \cdot i \cdot l_k$ [m]

$b_i := 0.1 + 0.04 \cdot i \cdot l_k$ [m]

$A_i := [2 \cdot b_i \cdot t + (h_i - 2t)t]$ [m²] $t := 0.01$ [m]

$I_{y_i} := \left[\frac{1}{12} b_i \cdot h_i^3 - \frac{1}{12} (b_i - t) \cdot (h_i - 2t)^3 \right]$ [m⁴]



$x =$

	0
0	0
1	0.01
2	0.02
3	0.03
4	0.04
5	0.05
6	0.06
7	0.07
8	0.08

[m]

$h =$

	0
0	0.1
1	0.1
2	0.101
3	0.101
4	0.102
5	0.102
6	0.102
7	0.103
8	0.103

[m]

$b =$

	0
0	0.1
1	0.1
2	0.101
3	0.101
4	0.102
5	0.102
6	0.102
7	0.103
8	0.103

[m]

$A =$

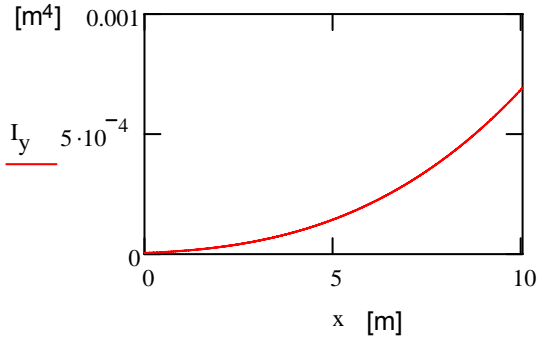
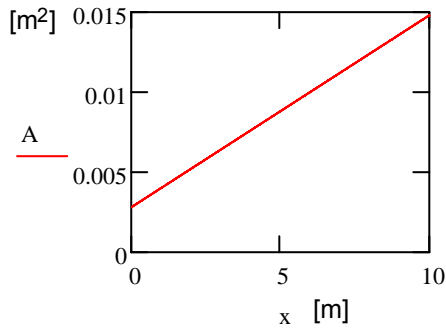
	0
0	2.8·10 ⁻³
1	2.812·10 ⁻³
2	2.824·10 ⁻³
3	2.836·10 ⁻³
4	2.848·10 ⁻³
5	2.86·10 ⁻³
6	2.872·10 ⁻³
7	2.884·10 ⁻³
8	2.896·10 ⁻³

[m²]

$I_y =$

	0
0	4.493·10 ⁻⁶
1	4.552·10 ⁻⁶
2	4.612·10 ⁻⁶
3	4.672·10 ⁻⁶
4	4.732·10 ⁻⁶
5	4.793·10 ⁻⁶
6	4.855·10 ⁻⁶
7	4.917·10 ⁻⁶
8	4.979·10 ⁻⁶

[m⁴]



$$I_{y_0} = 4.493 \times 10^{-6} \text{ [m}^4\text{]} \quad I_{y_{n+1}} = 6.925 \times 10^{-4} \text{ [m}^4\text{]}$$

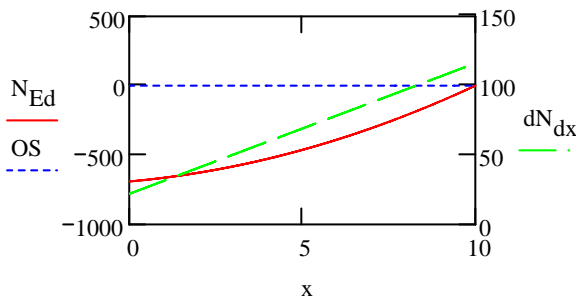
Zadanie priebehu osovej sily a jej derivácie :

$$\text{os } x: \quad \text{OS} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \text{OS}_i \leftarrow 0 \cdot i \\ \text{OS} \end{cases}$$

$$N_{Ed} := -690.800 + 21.980 \cdot x + 4.710 \cdot x^2 \text{ [kN]}$$

$$dN_{dx} := 21.980 + 2 \cdot 4.710 \cdot x \text{ [kN/m]}$$

$$E := 210000000 \text{ [kPa]}$$



$$N_{Ed} =$$

	0
0	-690.8
1	-690.58
2	-690.359
3	-690.136
4	-689.913
5	-689.689
6	-689.464
7	-689.238
8	-689.011
9	-688.784
10	-688.555

$$dN_{dx} =$$

	0
0	21.98
1	22.074
2	22.168
3	22.263
4	22.357
5	22.451
6	22.545
7	22.639
8	22.734
9	22.828
10	22.922

[kN]

$$N_{Ed_0} = -690.8 \text{ [kN]}$$

$$N_{Ed_{n+1}} = 5.684 \times 10^{-14}$$

Zadanie okrajových podmienok:

Ak je: na začiatku kĺb potom $OP_z = -1$ ak votknutie potom $OP_z = 1$
na konci kĺb potom $OP_k = -1$ ak votknutie potom $OP_k = 1$

$$OP_z := -1$$

$$OP_k := -1$$

$$\underline{\text{ORIGIN}} := 1$$

$$n = 999$$

Matica zohľadňujúca okrajové podmienky:

$$p := 1..n \quad r := 1..n$$

$$M_{EI.op_{p,r}} := 0$$

$$M_{EI.op_{1,1}} := \left(E \cdot I_{y_1} \cdot \frac{1}{l_k^4} \right) OP_z$$

$$M_{EI.op_{n,n}} := \left(E \cdot I_{y_{n+2}} \cdot \frac{1}{l_k^4} \right) OP_k$$

$$M_{EI.op} =$$

	1	2	3
1	-9.436·1010	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0

$$M_{EI.op} =$$

	1	2	3
1	-9.436·1010	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0

Zostavenie jednotlivých matíc:

$$M'_{EI} := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{array}{l} \frac{E \cdot I_{y_i} + 4 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}} + E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} \text{ if } i = j \\ \frac{-2 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}} - 2 \cdot E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} \text{ if } i = j - 1 \\ \frac{E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} \text{ if } i = j - 2 \\ \frac{-2 \cdot E \cdot I_{y_i} - 2 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}}}{l_k^4} \text{ if } i = j + 1 \\ \frac{E \cdot I_{y_i}}{l_k^4} \text{ if } i = j + 2 \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \end{array}$$

$$M_{dN} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1.104 \cdot 10^3 & 0 \\ \hline 2 & -1.108 \cdot 10^3 & 0 & 1.108 \cdot 10^3 \\ \hline 3 & 0 & -1.113 \cdot 10^3 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & -1.118 \cdot 10^3 \\ \hline \end{array}$$

$$M'_N := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{array}{l} N_{Ed_{i+1}} \cdot \frac{-2}{l_k^2} \text{ if } i = j \\ N_{Ed_{i+1}} \cdot \frac{1}{l_k^2} \text{ if } i = j - 1 \\ N_{Ed_{i+1}} \cdot \frac{1}{l_k^2} \text{ if } i = j + 1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \end{array}$$

$$M_{dN} := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{array}{l} dN_{dx_{i+1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot l_k} \text{ if } i = j - 1 \\ dN_{dx_{i+1}} \cdot \frac{-1}{2 \cdot l_k} \text{ if } i = j + 1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{array} \end{array}$$

$$M_N := M'_N + M_{dN}$$

Aplikovanie okrajových podmienok: $M_{EI} := M'_{EI} + M_{EI,op}$

$$M_{EI} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 4.792 \cdot 10^{11} & -3.849 \cdot 10^{11} & 9.685 \cdot 10^{10} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -3.849 \cdot 10^{11} & 5.811 \cdot 10^{11} & -3.899 \cdot 10^{11} & 9.81 \cdot 10^{10} & 0 & 0 \\ \hline 3 & 9.685 \cdot 10^{10} & -3.899 \cdot 10^{11} & 5.886 \cdot 10^{11} & -3.95 \cdot 10^{11} & 9.937 \cdot 10^{10} & 0 \\ \hline 4 & 0 & 9.81 \cdot 10^{10} & -3.95 \cdot 10^{11} & 5.963 \cdot 10^{11} & -4.001 \cdot 10^{11} & 1.007 \cdot 10^{11} \\ \hline 5 & 0 & 0 & 9.937 \cdot 10^{10} & -4.001 \cdot 10^{11} & 6.039 \cdot 10^{11} & -4.052 \cdot 10^{11} \\ \hline 6 & 0 & 0 & 0 & 1.007 \cdot 10^{11} & -4.052 \cdot 10^{11} & 6.117 \cdot 10^{11} \\ \hline \end{array}$$

$$M_N = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & 1.381 \cdot 10^7 & -6.905 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -6.905 \cdot 10^6 & 1.381 \cdot 10^7 & -6.902 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 0 & -6.902 \cdot 10^6 & 1.38 \cdot 10^7 & -6.9 \cdot 10^6 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 0 & -6.9 \cdot 10^6 & 1.38 \cdot 10^7 & -6.898 \cdot 10^6 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 0 & 0 & -6.898 \cdot 10^6 & 1.379 \cdot 10^7 & -6.896 \cdot 10^6 \\ \hline 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.896 \cdot 10^6 & 1.379 \cdot 10^7 \\ \hline \end{array}$$

Riešenie zovšeobecneného problému vlastných čísel a vlastných vektorov matíc M_{EI} a M_N z podmienky aby pre každý vlastný tvar η_{cr_i} a k nemu príslušné číslo α_{cr_i} platila rovnosť:

$$M_{EI} \eta_{cr_i} = \alpha_{cr_i} \cdot M_N \cdot \eta_{cr_i}$$

ORIGIN := 0

Vlastné vektory η_{cr_i} sú

Vlastné čísla α_{cr_i} sú jednotlivé

jednotlivé stĺpce matice M_η :

argumenty vektora α :

$$M_\eta := \text{genvecs}(M_{EI}, M_N)$$

$$\alpha := \text{genvals}(M_{EI}, M_N)$$

$$M_\eta =$$

	885	886	887	888	889	890
0	7.354·10 ⁻³	7.923·10 ⁻³	0.01	-0.01	-0.012	-0.012
1	0.015	0.016	0.021	-0.021	-0.024	-0.024
2	0.022	0.024	0.031	-0.031	-0.036	-0.036
3	0.029	0.032	0.041	-0.041	-0.048	-0.048
4	0.037	0.039	0.051	-0.051	-0.06	-0.059
5	0.044	0.047	0.061	-0.061	-0.071	-0.07
6	0.051	0.055	0.071	-0.071	-0.083	-0.081
7	0.059	0.063	0.081	-0.08	-0.093	-0.09
8	0.066	0.071	0.09	-0.089	-0.104	-0.1

$$\alpha^T =$$

	885	886	887	888	889	890	891
0	2.534	10.137	22.948	40.995	64.242	92.706	126.36

Koeficienty rozdzvojenia rovnováhy a ich polohy vo vektore vlastných čísel:

$$cr := \begin{cases} \alpha_{abs} \leftarrow \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \alpha'_i \leftarrow |\alpha_i| \\ \alpha' \end{cases} \\ \alpha_{min.abs} \leftarrow \min(\alpha_{abs}) \\ i \leftarrow \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad i \text{ if } |\alpha_i| = \alpha_{min.abs} \end{cases}$$

$$cr = 885$$

$$cr + 1 = 886$$

$$cr + 2 = 887$$

$$\alpha_{cr} = 2.53412$$

$$\alpha_{cr+1} = 10.137$$

$$\alpha_{cr+2} = 22.948$$

Koeficient rozdzvojenia rovnováhy vypočítaný v programe IQ100:

$$\alpha_{IQ100} := 2.5341$$

$$\text{roz}_\alpha := \frac{\alpha_{IQ100} - |\alpha_{cr}|}{|\alpha_{cr}|}$$

$$\text{roz}_\alpha = -7.336 \times 10^{-4} \%$$

Prvé 4 vlastné tvary:

$$\eta_{cr.1} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.2} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr+1} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.3} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr+2} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.4} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr+3} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

Polohy maximálních prvdnic vlastných tvarov:

$$\max_1 := \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } |\eta_{cr.1,i}| = 1$$

$$\max_1 = 301$$

$$x_{\max_1} = 3.01 \text{ [m]}$$

$$\max_2 := \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } |\eta_{cr.2,i}| = 1$$

$$\max_2 = 464$$

$$x_{\max_2} = 4.64 \text{ [m]}$$

$$\max_3 := \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } |\eta_{cr.3,i}| = 1$$

$$\max_3 = 552$$

$$x_{\max_3} = 5.52 \text{ [m]}$$

$$\eta_{cr.1} =$$

	0
0	0
1	7.354·10-3
2	0.015
3	0.022
4	0.029
5	0.037

$$\eta_{cr.2} =$$

	0
0	0
1	7.923·10-3
2	0.016
3	0.024
4	0.032
5	0.039

$$\eta_{cr.3} =$$

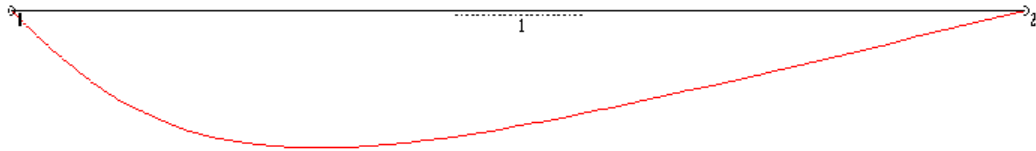
	0
0	0
1	0.01
2	0.021
3	0.031
4	0.041
5	0.051

$$\eta_{cr.4} =$$

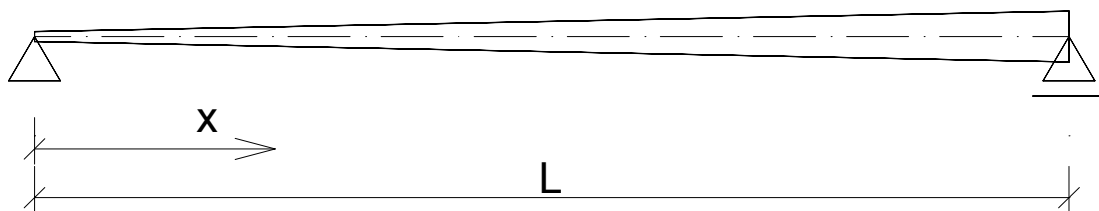
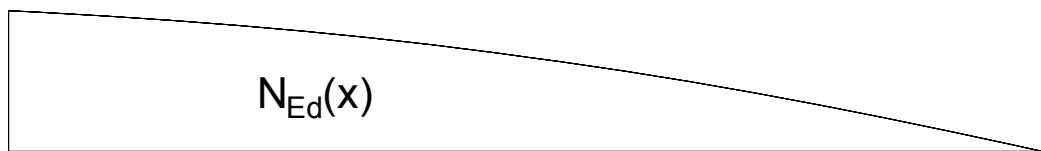
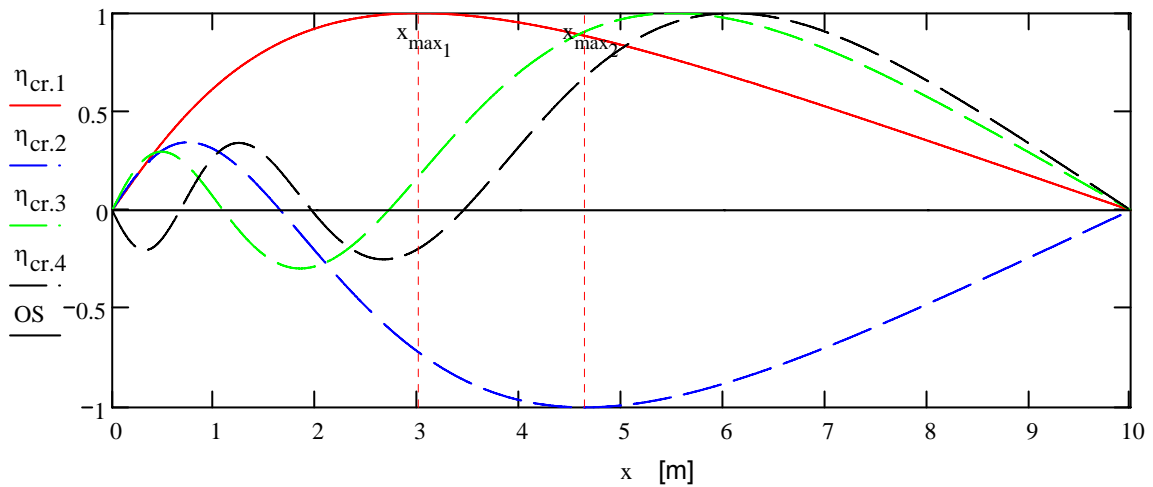
	0
0	0
1	-0.01
2	-0.021
3	-0.031
4	-0.041
5	-0.051

Prvý vlastný tvar vypočítaný v programe IQ100:

Knickfigur (Systemknicken):
Verzweigungslastfaktoren:
MII (Normalkräfte nach Theorie II. Ordnung): eingegebene MII
System : 2,5341



Prvé 4 vlastné tvary vypočítané diferenčnou metódou:



Upravené vlastné tvary s ohľadom na aplikované okrajové podmienky:

$$\eta_{cr.1.u} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+3 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} \eta_{cr.1.i+1} & \text{if } i = 0 \wedge OP_Z = 1 \\ -\eta_{cr.1.i+1} & \text{if } i = 0 \wedge OP_Z = -1 \\ \eta_{cr.1.n} & \text{if } i = n+3 \wedge OP_k = 1 \\ -\eta_{cr.1.n} & \text{if } i = n+3 \wedge OP_k = -1 \\ 0 & \text{if } i = n+2 \vee i = 1 \\ \eta_{cr.1.i-1} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{array} \right|$$

$$\eta_{cr.2.u} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+3 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} \eta_{cr.2.i+1} & \text{if } i = 0 \wedge OP_Z = 1 \\ -\eta_{cr.2.i+1} & \text{if } i = 0 \wedge OP_Z = -1 \\ \eta_{cr.2.n} & \text{if } i = n+3 \wedge OP_k = 1 \\ -\eta_{cr.2.n} & \text{if } i = n+3 \wedge OP_k = -1 \\ 0 & \text{if } i = n+2 \vee i = 1 \\ \eta_{cr.2.i-1} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{array} \right|$$

Aby bol 1. vlastný tvar vždy kladný :

$$\eta_{cr.1.u} := \left| \begin{array}{l} -\eta_{cr.1.u} \text{ if } \eta_{cr.1.max_1} = -1 \\ \eta_{cr.1.u} \text{ if } \eta_{cr.1.max_1} = 1 \end{array} \right|$$

$$\eta_{cr.1} := \left| \begin{array}{l} -\eta_{cr.1} \text{ if } \eta_{cr.1.max_1} = -1 \\ \eta_{cr.1} \text{ if } \eta_{cr.1.max_1} = 1 \end{array} \right|$$

Zadefinovanie jednotiek veličín:

$$kPa := kN \cdot m^{-2} \quad MN := 10^6 N \quad kNm := kN \cdot m$$

$$x := x \cdot m \quad l_k := l_k \cdot m \quad h := h \cdot m \quad E := E \cdot kPa \quad A := A \cdot m^2 \quad I_y := I_y \cdot m^4 \quad N_{Ed} := N_{Ed} \cdot kN$$

Priebehy momentov ktoré by vznikli pri zdeformovaní prúta do 1. a 2. vlastného tvaru:

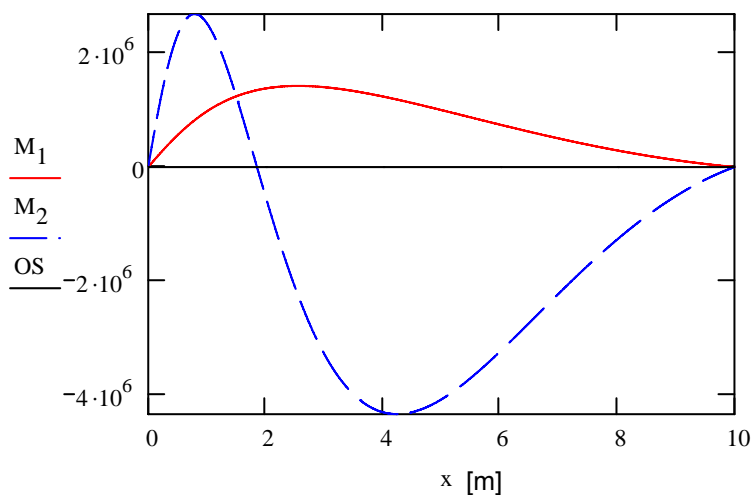
$$M(x) = E \cdot I_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \eta_{cr}(x) \quad \text{Vzhľadom na to, že vlastný tvar je bezrozmerný nesedí jednotka momentu.}$$

$$M_1 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_i \leftarrow -E \cdot I_y \cdot \left(\frac{\eta_{cr.1.u_i} - 2 \cdot \eta_{cr.1.u_{i+1}} + \eta_{cr.1.u_{i+2}}}{l_k^2} \right) \\ M \end{array} \right|$$

$$M_2 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_i \leftarrow -E \cdot I_y \cdot \left(\frac{\eta_{cr.2.u_i} - 2 \cdot \eta_{cr.2.u_{i+1}} + \eta_{cr.2.u_{i+2}}}{l_k^2} \right) \\ M \end{array} \right|$$

	0
0	0
1	11.9093
2	23.8123
3	35.7068
4	47.5908
5	59.4623
6	71.3193
7	83.1599
8	94.9823
9	106.7845
10	118.5649

$M_1 = \frac{1}{m} \text{ kNm}$



	0
0	0
1	59.1612
2	118.26136
3	177.25829
4	236.111
5	294.77971
6	353.2258
7	411.41188
8	469.30173
9	526.86029
10	584.05367

$\frac{1}{m}$ kNm

Posúdenie stability prúta na základe posúdenia rozhodujúceho prierezu pri analýze teóriou II. rádu s imperfekciou v tvare 1. vlastného tvaru vybočenia podľa NB.5.2 [13]

Aby sa predišlo možným problémom pri predefinovaní jednotky [m] sú indexy vo vzorcoch z časti 5.2 zmenené z "m" na "r":

Odhad polohy rozhodujúceho prierezu :

Predpokladaná poloha rozhodujúceho prierezu:

$$r := 48$$

$$x_r = 0.48 \text{ m}$$

Prierezové charakteristiky v rozhodujúcom priereze:

$$h_r = 0.1192 \text{ m} \quad A_r = 3.376 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad W_y := \frac{2 \cdot I_y}{h}$$

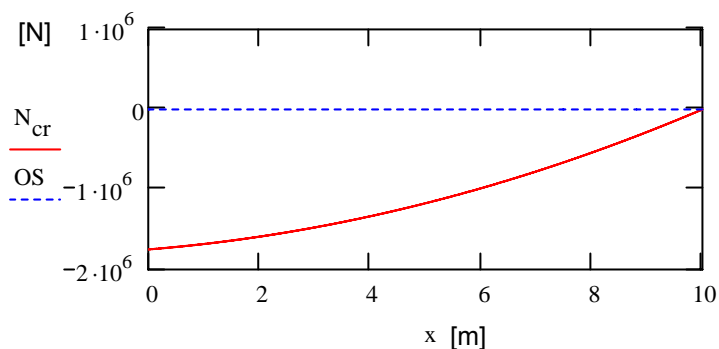
$$I_{y_r} = 7.94 \times 10^{-6} \text{ m}^4 \quad W_{y_r} = 1.332 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Priebeh kritickej sily pre prvý vlastný tvar:

$$N_{cr} := \alpha_{cr} N_{Ed}$$

kde:

$$\alpha_{cr} = 2.5341$$



	0
0	-1.751·106
1	-1.75·106
2	-1.749·106
3	-1.749·106
4	-1.748·106
5	-1.748·106
6	-1.747·106
7	-1.747·106
8	-1.746·106
9	-1.745·106
10	-1.745·106

N

Kritická sila v rozhodujúcom priereze:

$$N_{cr_r} = -1721.1 \text{ kN}$$

Podiel momentu teórie II. a momentu teórie I. rádu vyjadruje koeficient:

$$k := \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr}}}$$

$$k = 1.652$$

Dĺžka náhradného prúta:

$$L_N := \pi \sqrt{\frac{E \cdot I_{y_r}}{|N_{cr_r}|}}$$

$$L_N = 3.092 \text{ m}$$

Odolnosti prúta :

Materiál prúta: S355: $f_y := 355 \text{ MPa}$

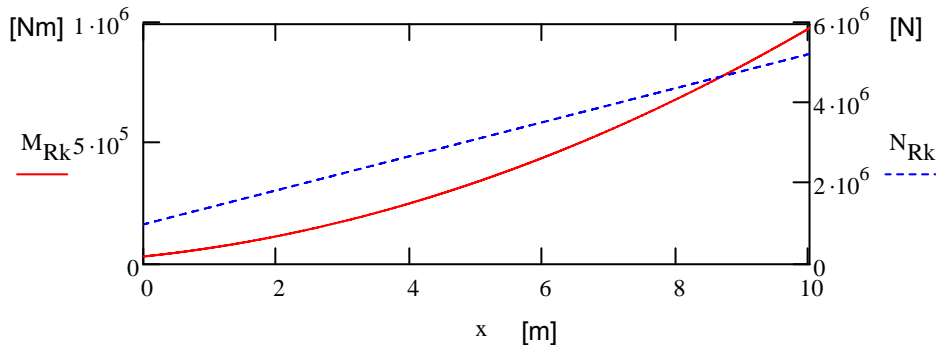
$\gamma_{M1} := 1.0$

Charakteristická a návrhová odolnosť v tlaku rozhodujúceho prierezu:

$$N_{Rk} := A \cdot f_y \quad N_{Rk_r} = 1.198 \times 10^3 \text{ kN} \quad N_{Rd} := \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}$$

Charakteristická a návrhová odolnosť v ohybe rozhodujúceho prierezu:

$$M_{Rk} := W_y \cdot f_y \quad M_{Rk_r} = 47.296 \text{ kNm} \quad M_{Rd} := \frac{M_{Rk}}{\gamma_{M1}}$$



Pomerná štíhlosť náhradného prúta s prierezovými charakteristikami skutočného prúta v mieste x_r a kritickou silou skutočného prúta v mieste x_r :

$$\lambda_p := \sqrt{\frac{N_{Rk}}{|N_{cr}|}} \quad \lambda_{p_r} = 0.834 \quad (5.19)$$

Súčiniteľ vzperu pre náhradný prút s prierezovými charakteristikami a kritickou silou skutočného prúta v mieste x_r :

vzperná krivka b $\alpha_m := 0.34$

$$\phi(\alpha) := \left[0.5 \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_p - 0.2) + \lambda_p^2 \right] \right] \quad \chi(\alpha) := \frac{1}{\phi(\alpha) + \sqrt{\phi(\alpha)^2 - \lambda_p^2}} \quad \chi(\alpha_m)_r = 0.703$$

Návrhová hodnota amplitúdy imperfekcie náhradného prúta v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_r skutočného prúta :

$$e_{o,d} := \left[\alpha_m \cdot (\lambda_p - 0.2) \cdot \frac{M_{Rk}}{N_{Rk}} \cdot \frac{1 - \frac{\chi(\alpha_m) \cdot \lambda_p^2}{\gamma_{M1}}}{1 - \chi(\alpha_m) \cdot \lambda_p^2} \right] \quad e_{o,d_r} = 8.513 \text{ mm} \quad (5.20c)$$

Moment, ktorý by vznikol, ak by sme prút zdeformovali do 1. vlastného tvaru : $M_{\eta,cr} := \overline{M_1}$

v priereze x_r skutočného prúta : $M_{\eta,cr} = 537.124 \frac{1}{m} \text{ kNm}$

Jednotka momentu nesedí pretože moment je vypočítaný pre bezrozmerný vlastný tvar.

Amplitúda priebehu jednotnej globálnej a lokálnej imperfekcie skutočného prúta v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_r :

$$\eta_{0,init} := \frac{|\alpha_{cr}| \cdot |N_{Ed_r}| \cdot e_{o,d_r}}{M_{\eta,cr_r}} \quad \eta_{0,init} = 0.0273 \text{ m} \quad (5.13)$$

Priebeh jednotnej globálnej a lokálnej imperfekcie η_{init} (v [14] $\eta_{ugli}(x)$) odvodený od 1. vlastného tvaru a jej veľkosť v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_1 :

$$\eta_{init} := \eta_{0,init} \cdot \eta_{cr,1} \quad (5.10)$$

amplitúda: $\eta_{init_{max_1}} = 0.0273 \text{ m}$ $x_{max_1} = 3.01 \text{ m}$ $\eta_{init} =$

	0
0	0
1	2.00593·10 ⁻⁴
2	4.01152·10 ⁻⁴
3	6.01644·10 ⁻⁴
4	8.02037·10 ⁻⁴

 m

kde max_1 je poloha max. poradnice vo vektore vl.tvaru vybočenia.

	0
0	0
1	2.00593·10 ⁻⁴
2	4.01152·10 ⁻⁴
3	6.01644·10 ⁻⁴
4	8.02037·10 ⁻⁴

Amplitúda (v mieste x_{max_1}) prídavnej deformácie v zmysle teórie II. rádu od osových síl pôsobiacych na prúte s η_{init} :

$$\eta_0 := \frac{\eta_{0,init}}{|\alpha_{cr}| - 1} \quad \eta_0 = 17.7811 \text{ mm}$$

Priebeh prídavnej deformácie v zmysle teórie II. rádu od osových síl pôsobiacych na prúte s η_{init} :

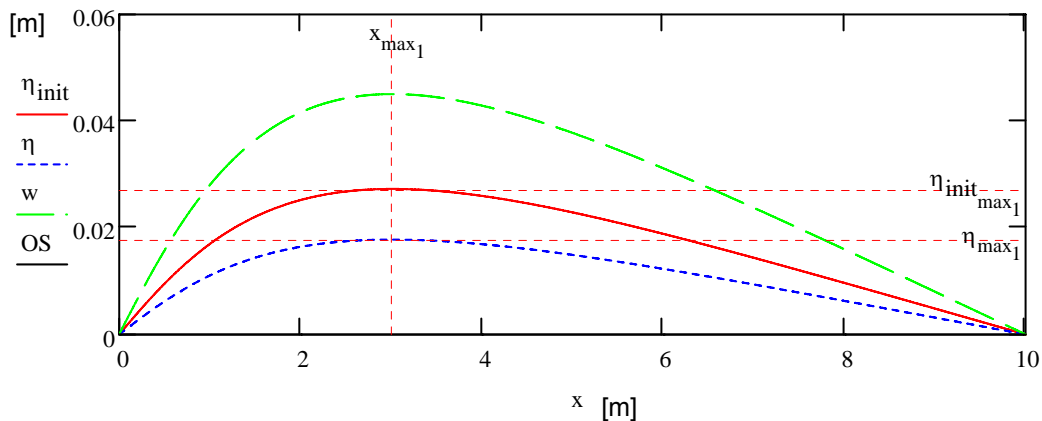
$$\eta := \eta_0 \cdot \eta_{cr,1}$$

Poloha vo vektore a hodnota amplitúdy prídavnej deformácie:

$$max_1 = 301 \quad \eta_{max_1} = 0.01778 \text{ m}$$

Výsledný tvar prúta: $w := \eta_{init} + \eta$

	0
0	0
1	1.30755·10 ⁻⁴
2	2.61487·10 ⁻⁴
3	3.92176·10 ⁻⁴
4	5.228·10 ⁻⁴
5	6.53339·10 ⁻⁴
6	7.83773·10 ⁻⁴
7	9.14082·10 ⁻⁴
8	1.04425·10 ⁻³
9	1.17425·10 ⁻³
10	1.30408·10 ⁻³



Priebeh momentov teórie II. rádu je rovný súčinu priebehu druhej derivácie prídavnej deformácie η (vznikajúcej od osových síl na prúte s imperfekciou η_{init}) a funkcie premennej ohybovej tuhosti EI_y .

Na výpočet momentov diferenciálnou metódou je nutné použiť upravený vektor 1. vlastného tvaru so zahrnutými okrajovými podmienkami $\eta_{cr,1,u}$, ktorý má z toho titulu o 2 riadky navyč.

Potom upravená prídavná deformácia je: $\eta' := \eta_0 \cdot \eta_{cr,1,u}$

s maximom v: $\eta'_{max_1+1} = 0.01778 \text{ m}$

Priebeh momentov teórie II. rádu:

$$M_{II} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_i \leftarrow -E \cdot I_{y_i} \cdot \left(\frac{\eta'_i - 2 \cdot \eta'_{i+1} + \eta'_{i+2}}{l_k^2} \right) \\ M \end{cases}$$

Priebeh druhej derivácie prídavnej deformácie:

$$\eta'' := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta''_i \leftarrow \frac{\eta'_i - 2 \cdot \eta'_{i+1} + \eta'_{i+2}}{l_k^2} \\ \eta'' \end{cases}$$

Poloha a hodnota maximálneho momentu:

$$\max M := \begin{cases} M_{abs} \leftarrow \overline{|M_{II}|} \\ M_{max} \leftarrow \max(M_{abs}) \\ \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } M_{abs_i} = M_{max} \end{cases}$$

Poloha maximálnej druhej derivácie prídavnej deformácie:

$$\max \eta'' := \begin{cases} \eta''_{abs} \leftarrow \overline{|\eta''|} \\ \eta''_{max} \leftarrow \max(\eta''_{abs}) \\ \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } \eta''_{abs_i} = \eta''_{max} \end{cases}$$

$$\max M = 256 \quad x_{\max M} = 2.56 \text{ m} \quad M_{II_{\max M}} = 25.242 \text{ kNm}$$

$$\max \eta'' = 80 \quad x_{\max \eta''} = 0.8 \text{ m}$$

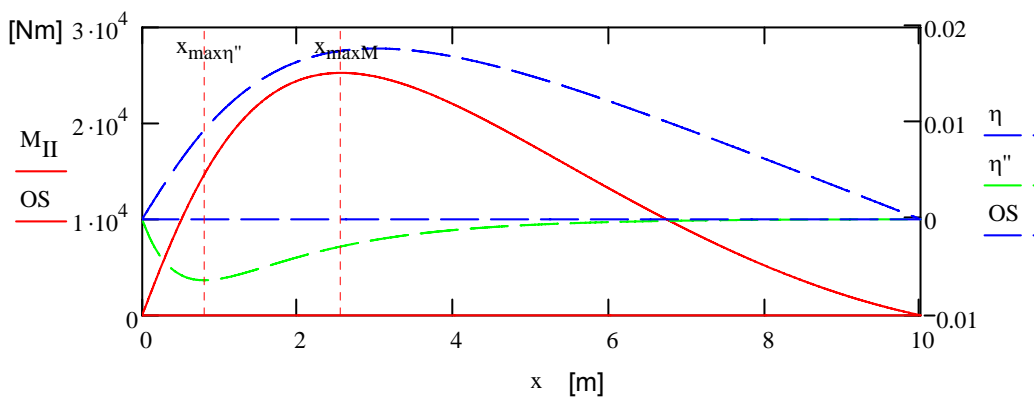
$$M_{II_{abs}} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_{abs_i} \leftarrow |M_{II_i}| \\ M_{abs} \end{cases}$$

	0	
0	0	
1	0.2118	kNm
2	0.4234	
3	0.6349	
4	0.8462	

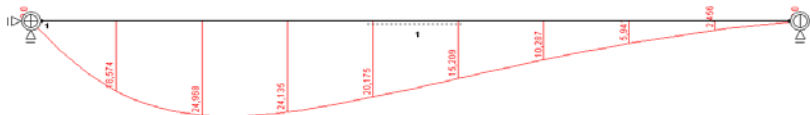
Hodnota momentu v rozhodujúcom priereze:

$$M_{II_r} = 9.551 \text{ kNm}$$

$$x_r = 0.48 \text{ m}$$



Priebeh momentov vypočítaný v programe IQ100:



Moment v mieste $x=3\text{m}$:

vypočítaný diferencnou metódou:

vypočítaný v programe IQ100:

$$p := (n+1) \cdot \frac{3}{10} \quad x_p = 3 \text{ m}$$

$$M_{II_p} = 24.8526 \text{ kNm}$$

$$M_{3\text{m.IQ100}} := 24.8528 \text{ kNm}$$

$$\text{Rozdiel: } \text{roz}_M := \frac{M_{3\text{m.IQ100}} - M_{II_p}}{M_{II_p}} \quad \text{roz}_M = 6.763 \times 10^{-4} \%$$

Jednotkové využitie v jednotlivých rezoch prúta pričom M_{IIabs} bol vypočítaný pre parametre z rezu r :

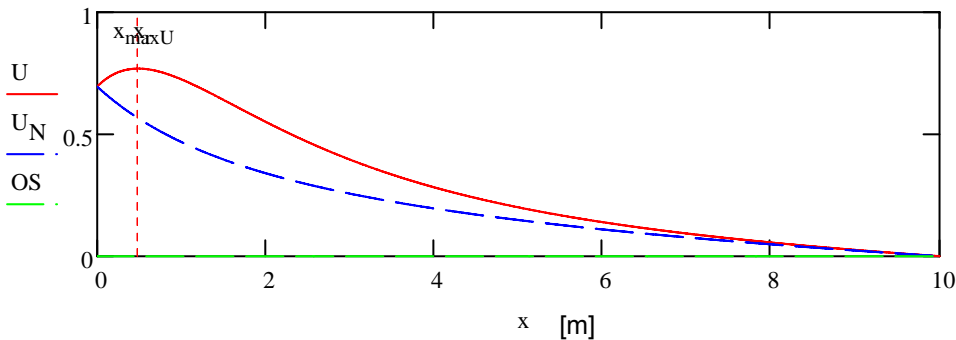
$$U_N := \frac{\overrightarrow{N_{Ed}}}{N_{Rd}} \quad U_M := \frac{M_{IIabs}}{M_{Rd}} \quad U := \left(\frac{\overrightarrow{N_{Ed}}}{N_{Rd}} + \frac{M_{IIabs}}{M_{Rd}} \right)$$

Poloha a hodnota maximálneho využitia

$$\max U := \begin{cases} U_{\max} \leftarrow \max(U) \\ \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } U_i = U_{\max} \end{cases}$$

Prierez, pre ktorý bol výpočet vykonaný je skoro totožný s prierezom s maximálnym využitím, preto je možné iterácie ukončiť.

polohy vo vektore x:	polohy na prúte:
maxU = 49	$x_{\max U} = 0.49 \text{ m}$
r = 48	$x_r = 0.48 \text{ m}$



Maximálne využitie: $U_{\max U} = 76.86\%$ v mieste: $x_{\max U} = 0.49 \text{ m}$ s presnosťou polohy: $l_k = 0.01 \text{ m}$

Prut := if($U_{\max U} \leq 1$, "vyhovuje", "nevyhovuje")

Prut = "vyhovuje"

Napätia:

Priebeh napätí od osových síl a hodnota napätia v rozhodujúcom priereze:

$$\sigma_{N_r} := \frac{\overrightarrow{N_{Ed}}}{A} \quad \sigma_{N_r} = 201.174 \text{ MPa}$$

Priebeh napätí od ohybových momentov teórie II. rádu a hodnota napätia v rozhodujúcom priereze:

$$\sigma_M := \frac{M_{II}}{W_y} \quad \sigma_{M_r} = 71.686 \text{ MPa}$$

Priebeh celkového napätia:

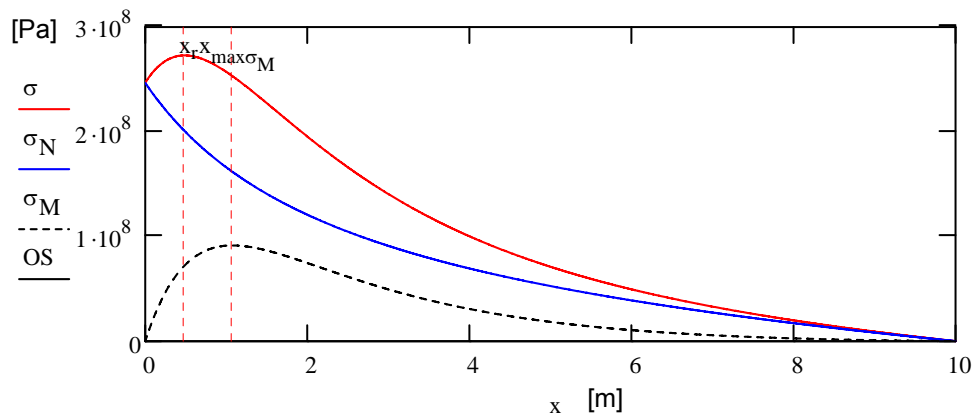
$$\sigma := \frac{\overrightarrow{N_{Ed}}}{A} + \frac{M_{IIabs}}{W_y}$$

Poloha maximálneho napätia od momentu teórie II. rádu:

$$\max \sigma_M := \begin{cases} \sigma_{M.abs} \leftarrow \overrightarrow{\sigma_M} \\ \max \sigma_M \leftarrow \max(\sigma_{M.abs}) \\ \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } \sigma_{M.abs_i} = \max \sigma_M \end{cases}$$

$$\max \sigma_M = 108$$

$$x_{\max \sigma_M} = 1.08 \text{ m}$$



Maximálne napätie na prúte:

$$\sigma_r = 272.86 \text{ MPa}$$

Poloha maximálnej poradnice vl. tvaru vybočenia:

$$x_{\max I} = 3.01 \text{ m}$$

Poloha maximálneho momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max M} = 2.56 \text{ m}$$

Poloha maximálneho napätia od momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max\sigma_M} = 1.08 \text{ m}$$

Poloha rozhodujúceho prierezu:

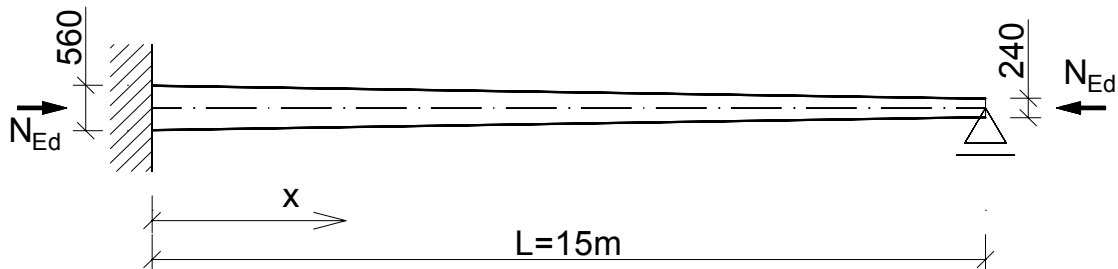
$$x_r = 0.48 \text{ m}$$

Poloha maximálneho napätia od osovej sily:

$$x_{\max.\sigma_N} := 0 \text{ m}$$

Poloha rozhodujúceho prierezu sa nachádza medzi polohou maximálneho napätia od momentu teórie II. rádu a polohou maximálneho napätia od osovej sily.

Posúdenie stability prúta (z príkladu 1 v 5.4 [15]) s premenným prierezom na základe analýzy teóriou II. rádu s imperfekciou v tvare 1. vlastného tvaru podľa NB.5.2 [13] a posúdenie v rozhodujúcom priereze



Výpočet funkčne zadaného priebehu vlastného tvaru vybočenia prúta na základe známych hodnôt v diskrétnych bodoch prúta vypočítaných prog. IQ100 :

Vlastný tvar vybočenia η pre dané okrajové podmienky (IQ100):

Dĺžka prúta:

$$L := 15\text{m}$$

$$\eta := \text{vlastny tvar vybočenia 13el.xls}$$

Kritická sila pre príslušný vlastný tvar (IQ100):

$$N_{cr} := 3606.48\text{kN}$$

Počet a poloha uzlov so známymi hodnotami tvaru vybočenia :

$$x_u := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ x_{u_i} \leftarrow i \cdot \frac{L}{n-1} \\ x_u \end{cases}$$

$$n := \text{rows}(\eta) \quad n = 14$$

Poloha uzlov a príslušná hodnota vybočenia vypočítaná v programe IQ100:

x_u	0	η
0	0	0
1	1.154	63.71
2	2.308	253.23
3	3.462	559.365
4	4.615	961.932
5	5.769	1427.447
6	6.923	1907.338
7	8.077	2337.489
8	9.231	2640.297
9	10.385	2730.979
10	11.538	2530.384
11	12.692	1986.729
12	13.846	1107.656
13	15	0

Polynomická aproximácia tvaru vybočenia :

$$\eta = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 \dots + C_i \cdot x^i \dots + C_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

Výpočet koeficientov polynomickej aproximácie z rovnice:

$$[M] \{C\} = \{\eta\}$$

kde:

$$M := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ M_{i,j} \leftarrow \left[i \cdot \frac{L}{(n-1) \cdot m} \right]^j \\ M \end{cases}$$

Koeficienty polynomickej aproximácie:

$$C := M^{-1} \cdot \eta$$

$$C =$$

	0
0	0
1	-4.838·10 ⁻³
2	47.691
3	0.319
4	-0.138
5	-0.013
6	1.039·10 ⁻³
7	-2.425·10 ⁻⁴
8	3.62·10 ⁻⁵
9	-3.63·10 ⁻⁶
10	2.651·10 ⁻⁷
11	-1.275·10 ⁻⁸
12	3.782·10 ⁻¹⁰
13	-5.328·10 ⁻¹²

Funkcia vlastného tvaru vybočenia:

$$\eta(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^i \right]$$

Pri zostavovaní matice M nebolo možné počítať s jednotkami, preto sú aj koeficienty C_i bezrozmerné, následne bolo nutné

namiesto argumentov x^i použiť argumenty $(x/m)^i$ aby pre $x[m]$ bola hodnota $\eta(x)[-]$ bezrozmerná.

Hľadanie polohy maximálnej poradnice vlastného tvaru vybočenia:

Prvá derivácia vlastného tvaru vybočenia:
$$\eta'(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot \frac{i}{m} \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^{i-1} \right]$$

$x_{\text{max.odhad}} := 10\text{m}$

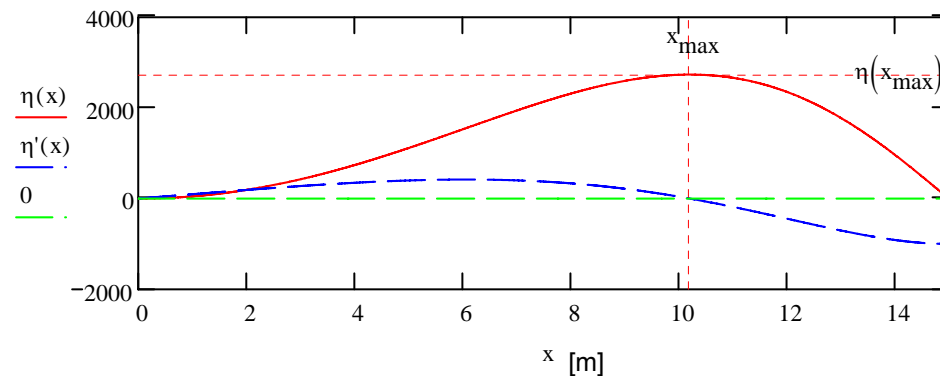
Given

$\eta'(x_{\text{max.odhad}}) = 0$

$x_{\text{max}} := \text{Find}(x_{\text{max.odhad}})$

Poloha maximálnej poradnice vlastného tvaru vybočenia: $x_{\text{max}} = 10.212\text{ m}$

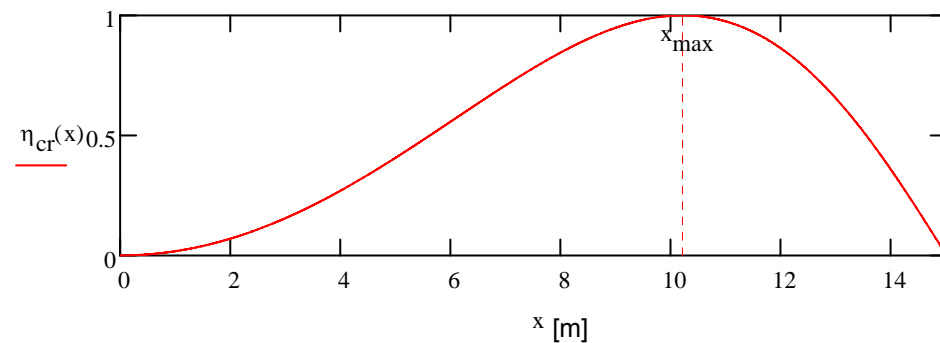
Priebeh aproximácie vlastného tvaru a jeho prvej derivácie:



$\eta(x_{\text{max}}) = 2734.191\dots$ pre premennú v jednotkách [m] je výsledkom bezrozmerná poradnica.

$$\eta_{\text{cr}}(x) := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^i \right]}{\eta(x_{\text{max}})}$$

Vlastný tvar vybočenia normovaný na maximum 1:



Maximálna poradnica:
 $\eta_{\text{cr}}(x_{\text{max}}) = 1$

Posúdenie stability prúta na základe posúdenia rozhodujúceho prierezu s vnútornými silami z analýzy teóriou II. rádu s imperfekciou podľa NB.5.2 [13]

Premenné prierezové charakteristiky:

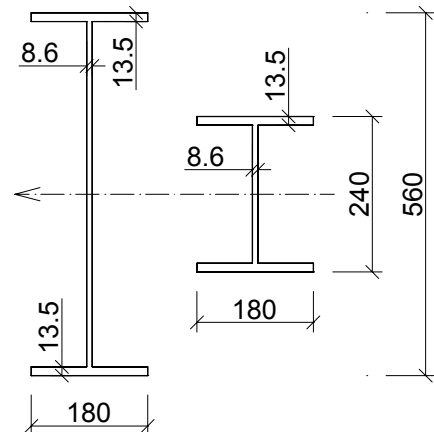
$h(x) := 0.56\text{m} - 0.021333333x$ $t_f := 13.5\text{mm}$

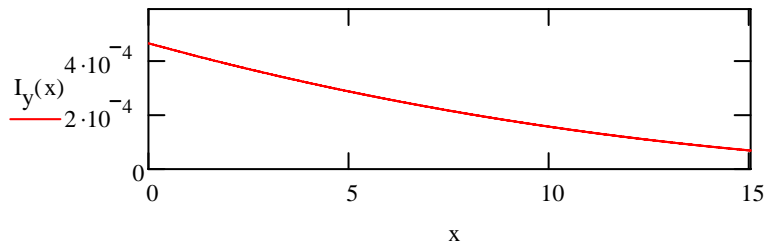
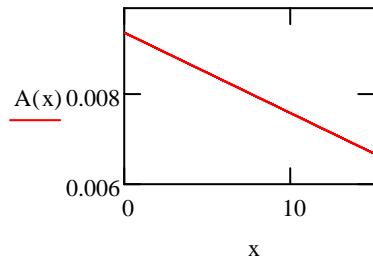
$b := 180\text{mm}$ $t_w := 8.6\text{mm}$

$A(x) := 2 \cdot b \cdot t_f + (h(x) - 2 \cdot t_f) t_w$

$I_y(x) := \frac{1}{12} b \cdot h(x)^3 - \frac{1}{12} (b - t_w) \cdot (h(x) - 2 \cdot t_f)^3$

$W_y(x) := \frac{I_y(x) \cdot 2}{h(x)}$





Materiál prúta: $E := 210\text{GPa}$ S355: $f_y := 355\text{MPa}$

Priebeh ohybových momentov teórie II. rádu :

Na odhadnutie polohy rozhodujúceho prierezu je potrebné poznať polohu maximálneho kladného a záporného momentu. Priebeh momentu teórie II. rádu je rovný priebehu funkcie súčinu druhej derivácie funkcie prídavnej deformácie (vyvolanej osovými silami pôsobiacimi na imperfektnom prúte) a funkcie premennej ohybovej tuhosti prúta.

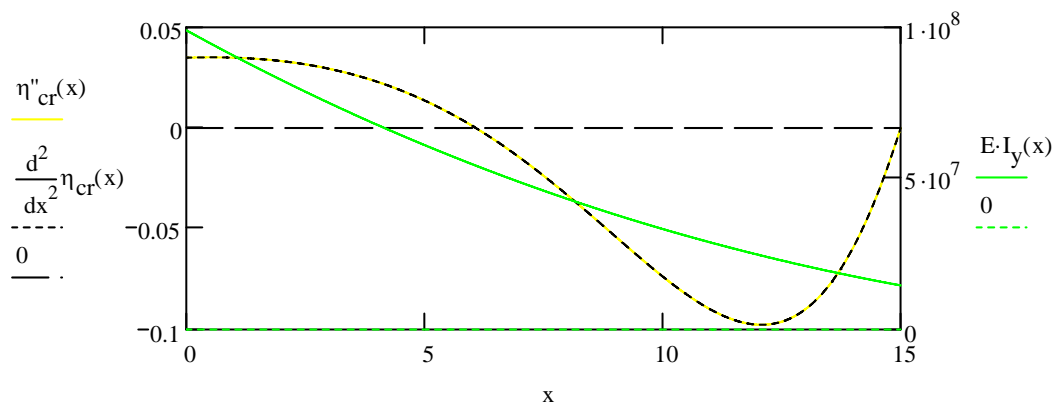
Vzhľadom na to, že imperfektný tvar prúta je podľa NB.5.2 [13] možné odvodiť od vlastného tvaru vybočenia prúta (ktorému je potom afinná prídavná deformácia vyvolávajúca M^{II}) je poloha maximálneho momentu teórie II. rádu totožná s polohou maxima funkcie súčinu druhej derivácie funkcie vlastného tvaru vybočenia prúta a funkcie premennej ohybovej tuhosti prúta.

Druhá derivácia vlastného tvaru vybočenia:

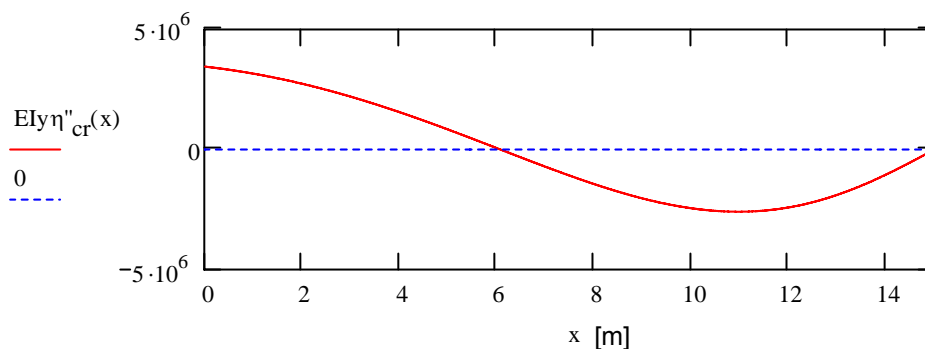
$$\eta''_{cr}(x) := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot i \cdot \frac{i-1}{m^2} \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^{i-2} \right]}{\eta(x_{max})}$$

Funkcia afinná (maximum je totožné) priebehu momentu teórie II. rádu:

$$EI_y \eta''_{cr}(x) := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot i \cdot \frac{i-1}{m^2} \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^{i-2} \right]}{\eta(x_{max})} E \cdot I_y(x)$$



Funkcia afinná priebehu momentov teórie II. rádu:



V mieste maximálnych kladných ohybových momentov je väčšie napätie od osových síl ako v mieste maximálnych záporných momentov, preto budeme predpokladať polohu rozhodujúceho prierezu v blízkosti maximálneho kladného momentu.

Nájdenie polohy maximálneho kladného momentu teórie II. rádu :

Určenie maxima súčiny druhej derivácie vlastného tvaru vybočenia a funkcie ohybovej tuhosti prúta:

Prvá derivácia funkcie afinity priebehu momentov II. rádu: $\frac{d}{dx}[\eta''_{cr}(x) \cdot (E \cdot I_y(x))]$

$$x_{\max M.o} := 10.5 \text{ m}$$

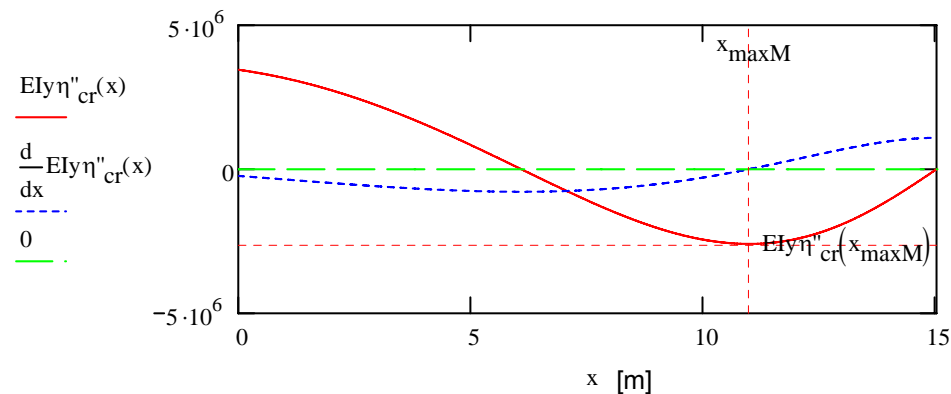
Given

$$\frac{d}{dx_{\max M.o}} \left[\frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot i \cdot \frac{i-1}{m^2} \cdot \left(\frac{x_{\max M.o}}{m} \right)^{i-2} \right]}{\eta(x_{\max})} \cdot E \cdot I_y(x_{\max M.o}) \right] = 0$$

$$x_{\max M} := \text{Find}(x_{\max M.o})$$

Poloha maximálneho kladného momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max M} = 10.97246 \text{ m}$$



Odhad polohy rozhodujúceho prierezu :

Predpokladaná poloha rozhodujúceho prierezu je v smere zväčšujúceho sa napätia od osových síl od miesta maximálneho napätia od momentu (v tomto prípade kladného momentu):

$$x_m := 12.218 \text{ m}$$

Prierezové charakteristiky v rozhodujúcom priereze:

$$h(x_m) = 0.2993 \text{ m}$$

$$A(x_m) = 7.202 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$I_y(x_m) = 1.138 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$W_y(x_m) = 7.605 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Zaťaženie prúta :

Návrhová hodnota pôsobiacej sily:

$$N_{Ed} := 1800 \text{ kN}$$

$$MN := 10^6 \text{ N}$$

Koeficient rozdvajenia rovnováhy pre prút:

$$\alpha_{cr} := \frac{N_{cr}}{N_{Ed}}$$

$$\alpha_{cr} = 2.0036$$

Podiel momentu teórie II. a momentu teórie I. rádu vyjadruje koeficient:

$$k := \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr}}}$$

$$k = 1.996$$

Odolnosti prúta :

Charakteristická a návrhová odolnosť v tlaku rozhodujúceho prierezu:

$$\gamma_{M1} := 1.0$$

$$N_{Rk}(x) := A(x) \cdot f_y$$

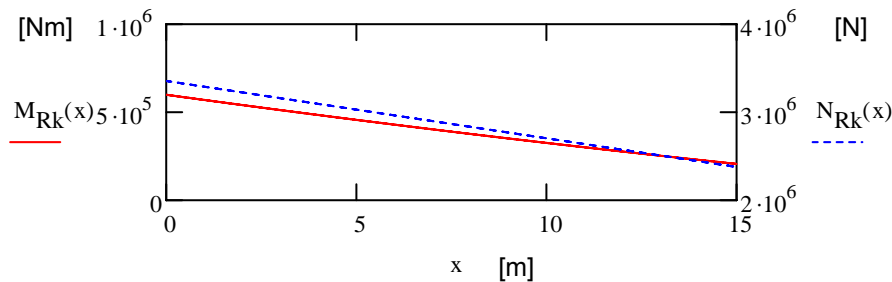
$$N_{Rk}(x_m) = 2.557 \times 10^3 \text{ kN}$$

$$N_{Rd}(x) := \frac{N_{Rk}(x)}{\gamma_{M1}}$$

Charakteristická a návrhová odolnosť v ohybe rozhodujúceho prierezu:

$$kNm := 1000 \cdot N \cdot m$$

$$M_{Rk}(x) := W_y(x) f_y \quad M_{Rk}(x_m) = 269.981 \text{ kNm} \quad M_{Rd}(x) := \frac{M_{Rk}(x)}{\gamma_{M1}}$$



Pomerná štíhlosť a súčiniteľ vzperu náhradného prúta s prierezovými charakteristikami skutočného prúta v mieste x_m a kritickou silou totožnou pre skutočný prút (v mieste x_m ak by bola premenná):

$$\lambda_p(x_m) := \sqrt{\frac{N_{Rk}(x_m)}{N_{cr}}} \quad \lambda_p(x_m) = 0.842 \quad (5.19) \quad \text{vzperná krivka "a": } \alpha_m := 0.21$$

$$\phi(x_m) := 0.5 \cdot \left[1 + \alpha_m \cdot (\lambda_p(x_m) - 0.2) + \lambda_p(x_m)^2 \right]$$

$$\chi(x_m) := \frac{1}{\phi(x_m) + \sqrt{\phi(x_m)^2 - \lambda_p(x_m)^2}} \quad \chi(x_m) = 0.771 \quad (5.20b)$$

Návrhová hodnota amplitúdy imperfekcie náhradného prúta:

$$e_{o.d}(x_m) := \alpha_m \cdot (\lambda_p(x_m) - 0.2) \cdot \frac{M_{Rk}(x_m)}{N_{Rk}(x_m)} \cdot \frac{1 - \frac{\chi(x_m) \cdot \lambda_p(x_m)^2}{\gamma_{M1}}}{1 - \chi(x_m) \cdot \lambda_p(x_m)^2} \quad (5.20c)$$

$$e_{o.d}(x_m) = 14.236 \text{ mm}$$

Amplitúda priebehu jednotnej globálnej a lokálnej imperfekcie skutočného prúta v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_m :

$$\eta_{0,init}(x_m) := \frac{\alpha_{cr} \cdot N_{Ed} \cdot e_{o.d}(x_m)}{E \cdot I_y(x_m) \cdot |\eta''_{cr}(x_m)|} \quad |\eta''_{cr}(x_m)| = 0.098 \frac{1}{m^2} \quad \eta_{0,init}(x_m) = 22.022 \text{ mm} \quad (5.13)$$

Moment ktorý by vznikol v reze x_m ak by sme prút

zdeformovali do 1. vlastného tvaru (jednotka momentu nesedí vzhľadom na to, že vlastný tvar je bezrozmerný): $E \cdot I_y(x_m) \cdot |\eta''_{cr}(x_m)| = 2331.37 \frac{1}{m} \text{ kNm}$

Priebeh jednotnej globálnej a lokálnej imperfekcie $\eta_{init}(x)$ (v [14] $\eta_{ugli}(x)$) v tvare afinnom 1. vl. tvaru a jej veľkosť v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_m :

$$\eta_{init}(x) := \eta_{0,init}(x_m) \cdot \eta_{cr}(x) \quad (5.10)$$

amplitúda $\eta_{init}(x_{max}) = 0.02202 \text{ m}$ kde x_{max} je poloha max. poradnice vl.tvaru vybočenia: $\eta_{cr}(x_{max}) = 1$

Amplitúda (v mieste x_{max}) prídavnej deformácie v zmysle teórie II. rádu od osovej sily pôsobiacej na prúte s imperfekciou $\eta_{init}(x)$:

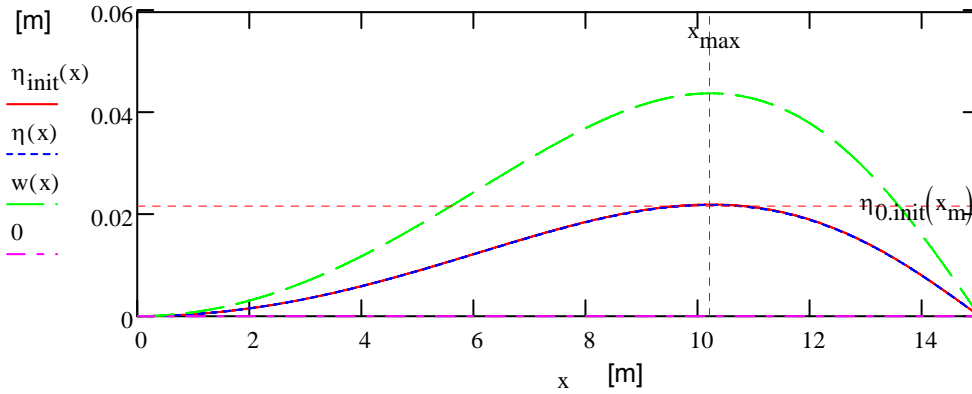
$$\eta_{0,m} := \frac{\eta_{init}(x_{max})}{\alpha_{cr} - 1} \quad \eta_{0,m} = 21.943 \text{ mm} \quad x_m = 12.218 \text{ m}$$

Priebeh prídavnej deformácie v zmysle teórie II. rádu od osovej sily pôsobiacej na prúte s imperfekciou $\eta_{init}(x)$:

$$\eta(x) := \eta_{0,m} \cdot \eta_{cr}(x) \quad \eta(x_{max}) = 21.943 \text{ mm}$$

Výsledný tvar prúta:

$$w(x) := \eta_{init}(x) + \eta(x)$$



Priebeh momentov teórie II. rádu je rovný súčinu priebehu druhej derivácie prídavnej deformácie $\eta(x)$ (vznikajúcej od osových síl na prúte s imperfekciou $\eta_{init}(x)$) a funkcie premennej ohybovej tuhosti:

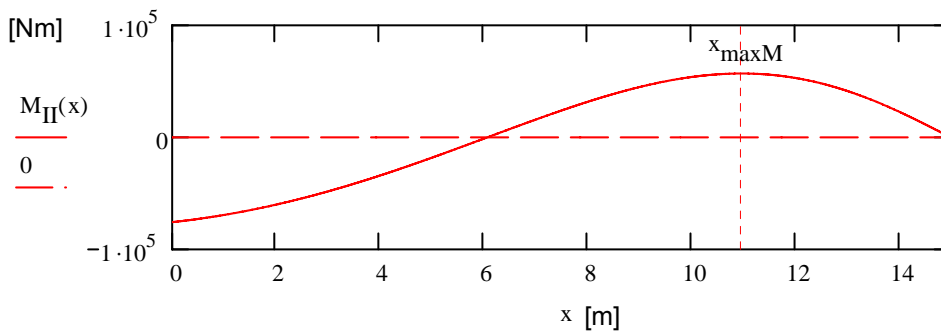
$$M_{II}(x) := -E \cdot I_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \eta(x) \quad \text{alebo:} \quad M_{II}(x) := -E \cdot I_y(x) \cdot \left[\eta_{0,m} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot i \cdot \frac{i-1}{m^2} \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^{i-2} \right]}{\eta(x_{max})} \right]$$

Poloha a hodnota max. kladného momentu:

Ohybový moment v rozhodujúcom priereze:

$$x_{maxM} = 10.972 \text{ m} \quad M_{II}(x_{maxM}) = 56.917 \text{ kNm}$$

$$M_{II}(x_m) = 51.157 \text{ kNm}$$



Jednotkové využitie v jednotlivých rezoch prúta:

$$U(x) := \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}(x)} + \frac{|M_{II}(x)|}{M_{Rd}(x)} \quad U_N(x) := \frac{N_{Ed}}{N_{Rd}(x)} \quad U_M(x) := \frac{M_{II}(x)}{M_{Rd}(x)}$$

Hľadanie miesta maximálneho využitia:

$$x_r := 0.9 \cdot x_m$$

Given

$$\frac{d}{dx_r} \left(\frac{N_{Ed}}{N_{Rd}(x_r)} + \frac{M_{II}(x_r)}{M_{Rd}(x_r)} \right) = 0$$

$$x_{max} := \text{Find}(x_r)$$

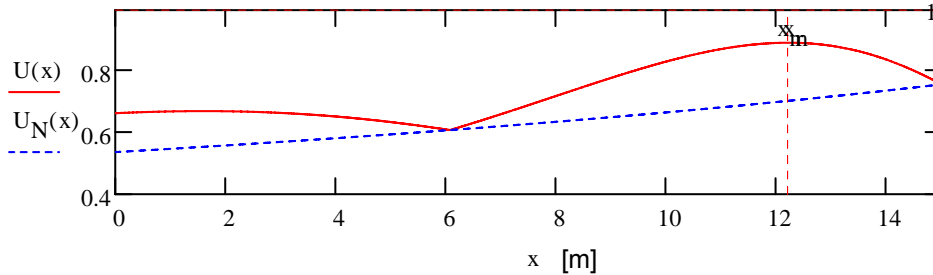
Iteratívne treba meniť x_m dovtedy, až kým $x_m = x_r$

Výpočet prebehov s charakteristikami pre rez:

$$x_m = 12.218 \text{ m}$$

Maximálne využitie v reze:

$$x_r = 12.218 \text{ m}$$



Maximálne využitie:

$$U(x_r) = 89.35\%$$

Prut := if($U(x_r) \leq 1$, "vyhovuje", "nevyhovuje")

Prut = "vyhovuje"

Napätia:

Priebeh napätia od osovej sily a hodnota napätia v rozhodujúcom priereze:

$$\sigma_{N(x)} := \frac{N_{Ed}}{A(x)} \quad \sigma_N(x_m) = 249.923 \text{ MPa}$$

Priebeh napätia od ohybového momentu teórie II. rádu a hodnota napätia v rozhodujúcom priereze:

$$\sigma_{M(x)} := \frac{M_{II}(x)}{W_y(x)} \quad \sigma_M(x_m) = 67.267 \text{ MPa}$$

Priebeh celkového napätia:

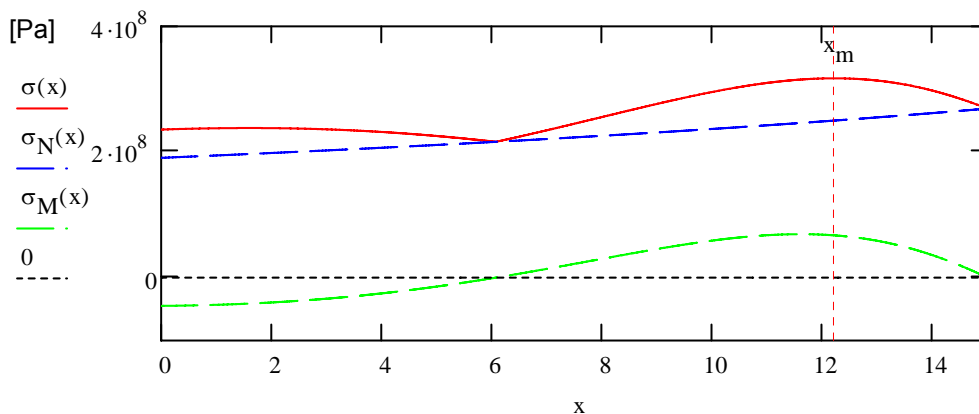
$$\sigma(x) := \frac{N_{Ed}}{A(x)} + \frac{|M_{II}(x)|}{W_y(x)}$$

$$x_{\sigma M} := 0.9 \cdot x_{\max M}$$

Given $\frac{d}{dx_{\sigma M}} \frac{M_{II}(x_{\sigma M})}{W_y(x_{\sigma M})} = 0$ $x_{\max, \sigma M} := \text{Find}(x_{\sigma M})$

Poloha maximálneho napätia od momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max, \sigma M} = 11.612 \text{ m}$$



Maximálne napätie na prúte:

$$\sigma(x_m) = 317.191 \text{ MPa}$$

Poloha maximálnej poradnice vl. tvaru vybočenia:

$$x_{\max} = 10.212 \text{ m}$$

Poloha maximálneho kladného momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max M} = 10.972 \text{ m}$$

Poloha maximálneho napätia od momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max, \sigma M} = 11.612 \text{ m}$$

Poloha rozhodujúceho prierezu:

$$x_m = 12.218 \text{ m}$$

Poloha maximálneho napätia od osovej sily: $x_{\max, \sigma N} := L$

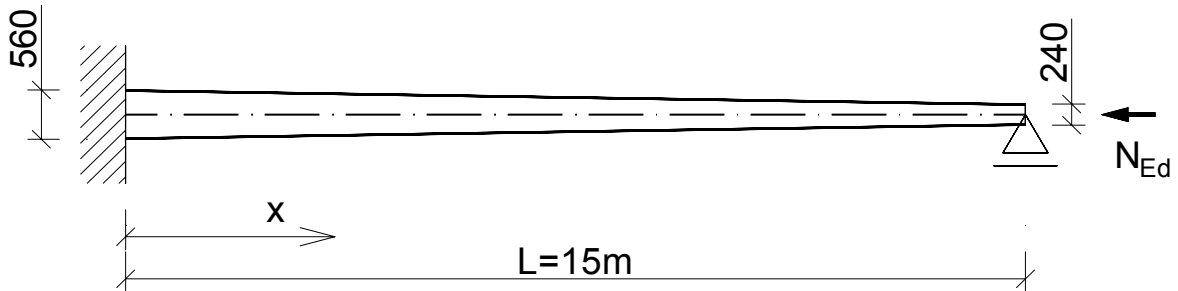
$$x_{\max, \sigma N} = 15 \text{ m}$$

Výsledné využitie:

$$U(x_r) = 89.35\%$$

Poloha rozhodujúceho prierezu v tomto príklade vyšla medzi polohou maximálneho napätia od kladného ohybového momentu teórie II. rádu a polohou maximálneho napätia od osovej sily.

Posúdenie stability prúta (z príkladu 1 v 5.4 [15]) s premenným prierezom na základe analýzy teóriou II. rádu s imperfekciou v tvare 1. vlastného tvaru podľa NB.5.2 [13] a posúdenie v rozhodujúcom priereze



Výpočet priebehu vlastného tvaru vybočenia prúta diferenčnou metódou z diferenciálnej rovnice:

$$-\frac{d^2}{dx^2} \left(-EI_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right) + \frac{d}{dx} N(x) \cdot \frac{d}{dx} w(x) + N(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0$$

Vzhľadom na problém vlastných čísel a vlastných tvarov matíc, ktoré museli mať argumenty bezrozmerné, boli v prvej časti výpočtu veličiny bezrozmerné (jednotka je uvádzaná v hranatých zátvorkách) a v druhej časti boli jednotky zadefinované.

Dĺžka prúta:	$\frac{L}{ww} := 15$ [m]	Počet elementov:	$p_e := 1500$
Počet rovníc:	$n := p_e - 1$ $n = 1499$	Dĺžka kroku:	$l_k := \frac{L}{n+1}$ $l_k = 0.01$ [m]
Celkový vektor uzlov:	$i := 0..n+1$ $x_i := i \cdot l_k$	Celkový počet uzlov:	$n+2 = 1501$

Prierezové charakteristiky:

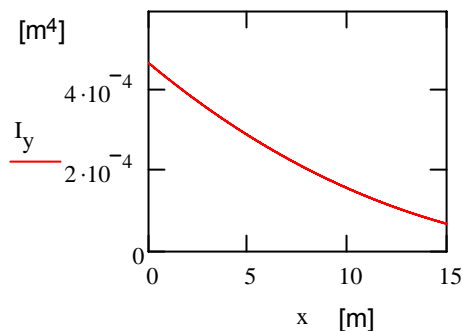
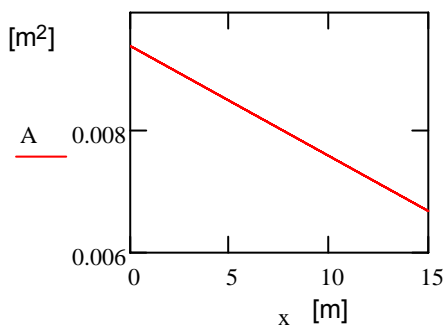
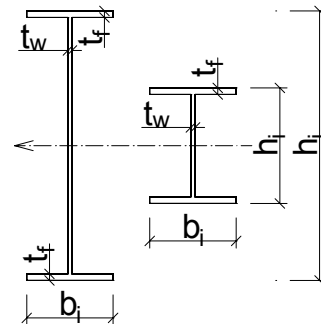
$$h_i := 0.56 - 0.021333333 \cdot i \cdot l_k \text{ [m]} \quad b_i := 0.18 \text{ [m]}$$

$$t_f := 0.0135 \text{ [m]} \quad t_w := 0.0086 \text{ [m]}$$

$$A_i := \left[2 \cdot b \cdot t_f + (h - 2 \cdot t_f) \cdot t_w \right] \text{ [m}^2\text{]}$$

$$I_y := \left[\frac{1}{12} b \cdot h^3 - \frac{1}{12} (b - t_w) \cdot (h - 2 \cdot t_f)^3 \right] \text{ [m}^4\text{]}$$

Pomer momentov zotrvačnosti na koncoch prúta: $\frac{I_{y_{n+1}}}{I_{y_0}} = 0.147$



	0		0		0		0
0	0	0	0.56	0	$9.444 \cdot 10^{-3}$	0	$4.715 \cdot 10^{-4}$
1	0.01	1	0.56	1	$9.442 \cdot 10^{-3}$	1	$4.711 \cdot 10^{-4}$
2	0.02	2	0.56	2	$9.44 \cdot 10^{-3}$	2	$4.706 \cdot 10^{-4}$
3	0.03	3	0.559	3	$9.438 \cdot 10^{-3}$	3	$4.702 \cdot 10^{-4}$
4	0.04	4	0.559	4	$9.436 \cdot 10^{-3}$	4	$4.698 \cdot 10^{-4}$
5	0.05	5	0.559	5	$9.435 \cdot 10^{-3}$	5	$4.694 \cdot 10^{-4}$
6	0.06	6	0.559	6	$9.433 \cdot 10^{-3}$	6	$4.69 \cdot 10^{-4}$
7	0.07	7	0.559	7	$9.431 \cdot 10^{-3}$	7	$4.686 \cdot 10^{-4}$
8	0.08	8	0.558	8	$9.429 \cdot 10^{-3}$	8	$4.682 \cdot 10^{-4}$
9	0.09	9	0.558	9	$9.427 \cdot 10^{-3}$	9	$4.678 \cdot 10^{-4}$
10	0.1	10	0.558	10	$9.425 \cdot 10^{-3}$	10	$4.673 \cdot 10^{-4}$

Zadanie priebehu osovej sily a jej derivácie :

$$N_{Ed} := 1800 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad [\text{kN}]$$

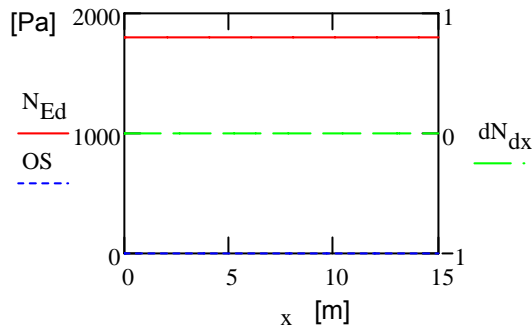
$$dN_{dx} := 0 \cdot x$$

$$E := 210000000 [\text{kPa}]$$

$$\text{os } x: \quad OS := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ OS_i \leftarrow 0 \cdot i \\ OS \end{cases}$$

	0
0	$1.8 \cdot 10^3$
1	$1.8 \cdot 10^3$
2	$1.8 \cdot 10^3$
3	$1.8 \cdot 10^3$
4	$1.8 \cdot 10^3$

	0
0	0
1	0
2	0



Zadanie okrajových podmienok:

ak je: na začiatku kĺb potom $OP_z = -1$ ak votknutie potom $OP_z = 1$
na konci kĺb potom $OP_k = -1$ ak votknutie potom $OP_k = 1$

$$OP_z := 1$$

$$OP_k := -1$$

$$ORIGIN := 1$$

$$n = 1499$$

Matica zohľadňujúca okrajové podmienky:

$$p := 1..n \quad r := 1..n$$

$$M_{EL.op_{p,r}} := 0$$

$$M_{EL.op_{1,1}} := \left(E \cdot I_{y_1} \cdot \frac{1}{4} \right) OP_z$$

	1	2
1	$9.901 \cdot 10^{12}$	0
2	0	0

$$M_{EL.op_{n,n}} := \left(E \cdot I_{y_{n+2}} \cdot \frac{1}{4} \right) OP_k$$

	1	2
1	$9.901 \cdot 10^{12}$	0
2	0	0

Zostavenie jednotlivých matíc:

$$M'_{EI} := \begin{matrix} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{cases} \frac{E \cdot I_{y_i} + 4 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}} + E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} & \text{if } i = j \\ \frac{-2 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}} - 2 \cdot E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} & \text{if } i = j - 1 \\ \frac{E \cdot I_{y_{i+2}}}{l_k^4} & \text{if } i = j - 2 \\ \frac{-2 \cdot E \cdot I_{y_i} - 2 \cdot E \cdot I_{y_{i+1}}}{l_k^4} & \text{if } i = j + 1 \\ \frac{E \cdot I_{y_i}}{l_k^4} & \text{if } i = j + 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{matrix} \quad M$$

$$M'_N := \begin{matrix} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{cases} N_{Ed_{i+1}} \cdot \frac{-2}{l_k^2} & \text{if } i = j \\ N_{Ed_{i+1}} \cdot \frac{1}{l_k^2} & \text{if } i = j - 1 \\ N_{Ed_{i+1}} \cdot \frac{1}{l_k^2} & \text{if } i = j + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{matrix} \quad M$$

$$M_{dN} := \begin{matrix} \text{for } i \in 1..n \\ \text{for } j \in 1..n \\ M_{i,j} \leftarrow \begin{cases} dN_{dx_{i+1}} \cdot \frac{1}{2 \cdot l_k} & \text{if } i = j - 1 \\ dN_{dx_{i+1}} \cdot \frac{-1}{2 \cdot l_k} & \text{if } i = j + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{matrix} \quad M$$

$$M_N := M'_N + M_{dN}$$

$$M_{dN} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Aplikovanie okrajových podmienok: $M_{EI} := M'_{EI} + M_{EI.op}$

$$M_{EI} = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6.925 \cdot 10^{13} & -3.955 \cdot 10^{13} & 9.883 \cdot 10^{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3.955 \cdot 10^{13} & 5.93 \cdot 10^{13} & -3.952 \cdot 10^{13} & 9.875 \cdot 10^{12} & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9.883 \cdot 10^{12} & -3.952 \cdot 10^{13} & 5.925 \cdot 10^{13} & -3.948 \cdot 10^{13} & 9.866 \cdot 10^{12} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 9.875 \cdot 10^{12} & -3.948 \cdot 10^{13} & 5.92 \cdot 10^{13} & -3.945 \cdot 10^{13} & 9.857 \cdot 10^{12} & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 9.866 \cdot 10^{12} & -3.945 \cdot 10^{13} & 5.914 \cdot 10^{13} & -3.941 \cdot 10^{13} & 9.849 \cdot 10^{12} \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 9.857 \cdot 10^{12} & -3.941 \cdot 10^{13} & 5.909 \cdot 10^{13} & -3.938 \cdot 10^{13} \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.849 \cdot 10^{12} & -3.938 \cdot 10^{13} & 5.904 \cdot 10^{13} \end{matrix}$$

$$M_N = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & -3.6 \cdot 10^7 & 1.8 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1.8 \cdot 10^7 & -3.6 \cdot 10^7 & 1.8 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1.8 \cdot 10^7 & -3.6 \cdot 10^7 & 1.8 \cdot 10^7 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^7 & -3.6 \cdot 10^7 & 1.8 \cdot 10^7 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^7 & -3.6 \cdot 10^7 & 1.8 \cdot 10^7 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^7 & -3.6 \cdot 10^7 & 1.8 \cdot 10^7 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.8 \cdot 10^7 & -3.6 \cdot 10^7 \end{matrix}$$

Riešenie zovšeobecneného problému vlastných čísel a vektorov matíc M_{EI} a M_N , ktoré musia vyhovovať rovnici:

$$M_{EI} \eta_{cr} = \alpha_{cr} \cdot M_N \eta_{cr}$$

ORIGIN := 0

Vlastné vektory η_{cr} sú
jednotlivé stĺpce matice M_η :

Vlastné čísla α_{cr} sú jednotlivé
argumenty vektora α :

$$M_\eta := \text{genvecs}(M_{EI}, M_N)$$

$$\alpha := \text{genvals}(M_{EI}, M_N)$$

$$M_\eta =$$

	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058
0	-1.744·10 ⁻⁶	-3.989·10 ⁻⁶	7.119·10 ⁻⁶	-1.114·10 ⁻⁵	1.604·10 ⁻⁵	2.183·10 ⁻⁵	-2.851·10 ⁻⁵
1	-6.975·10 ⁻⁶	-1.596·10 ⁻⁵	2.848·10 ⁻⁵	-4.455·10 ⁻⁵	6.417·10 ⁻⁵	8.733·10 ⁻⁵	-1.14·10 ⁻⁴
2	-1.57·10 ⁻⁵	-3.591·10 ⁻⁵	6.409·10 ⁻⁵	-1.002·10 ⁻⁴	1.444·10 ⁻⁴	1.965·10 ⁻⁴	-2.566·10 ⁻⁴
3	-2.791·10 ⁻⁵	-6.385·10 ⁻⁵	1.139·10 ⁻⁴	-1.782·10 ⁻⁴	2.567·10 ⁻⁴	3.494·10 ⁻⁴	-4.562·10 ⁻⁴
4	-4.361·10 ⁻⁵	-9.977·10 ⁻⁵	1.78·10 ⁻⁴	-2.785·10 ⁻⁴	4.011·10 ⁻⁴	5.459·10 ⁻⁴	-7.128·10 ⁻⁴
5	-6.28·10 ⁻⁵	-1.437·10 ⁻⁴	2.564·10 ⁻⁴	-4.01·10 ⁻⁴	5.776·10 ⁻⁴	7.861·10 ⁻⁴	-1.026·10 ⁻³

$$\alpha^T =$$

	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058
0	-2.0036	-5.9116	-11.7723	-19.5862	-29.3535	-41.0741	-54.748

Koeficienty rozvoja rovnováhy a ich polohy vo vektore vlastných čísel:

$$cr := \begin{cases} \alpha_{abs} \leftarrow \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \alpha'_i \leftarrow |\alpha_i| \\ \alpha' \end{cases} \\ \alpha_{min.abs} \leftarrow \min(\alpha_{abs}) \\ i \leftarrow \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ i \text{ if } |\alpha_i| = \alpha_{min.abs} \end{cases} \end{cases}$$

$$cr = 1052$$

$$cr + 1 = 1053$$

$$cr + 2 = 1054$$

$$\alpha_{cr} = -2.00361$$

$$\alpha_{cr+1} = -5.9116$$

$$\alpha_{cr+2} = -11.7723$$

Koeficient rozvoja rovnováhy vypočítaný v programe IQ100:

$$\alpha_{IQ100} := 2.0036$$

$$roz_\alpha := \frac{\alpha_{IQ100} - |\alpha_{cr}|}{|\alpha_{cr}|}$$

$$roz_\alpha = -7.333 \times 10^{-4} \%$$

Prvé 4 vlastné tvary:

$$\eta_{cr.1} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.2} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr+1} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.3} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr+2} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

$$\eta_{cr.4} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} 0 \text{ if } i = n+1 \vee i = 0 \\ M_{\eta_{i-1}, cr+3} \text{ otherwise} \end{cases} \\ \eta \end{cases}$$

Polohy maximálnych poradníc vlastných tvarov:

$$max_1 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } |\eta_{cr.1}_i| = 1 \end{cases}$$

$$max_2 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } |\eta_{cr.2}_i| = 1 \end{cases}$$

$$max_3 := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } |\eta_{cr.3}_i| = 1 \end{cases}$$

$$max_1 = 1021$$

$$max_2 = 710$$

$$max_3 = 545$$

$$x_{max_1} = 10.21[m]$$

$$x_{max_2} = 7.1 [m]$$

$$x_{max_3} = 5.45 [m]$$

Upravené vlastné tvary s ohľadom na aplikovanie okrajových podmienok:

$$\eta_{cr.1.u} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 0..n+3 \\ \eta_i \leftarrow \begin{cases} \eta_{cr.1.i+1} & \text{if } i = 0 \wedge OP_Z = 1 \\ -\eta_{cr.1.i+1} & \text{if } i = 0 \wedge OP_Z = -1 \\ \eta_{cr.1.n} & \text{if } i = n+3 \wedge OP_k = 1 \\ -\eta_{cr.1.n} & \text{if } i = n+3 \wedge OP_k = -1 \\ 0 & \text{if } i = n+2 \vee i = 1 \\ \eta_{cr.1.i-1} & \text{otherwise} \end{cases} \end{array} \right. \eta$$

Aby bol 1. vlastný tvar vždy kladný :

$$\eta_{cr.1.u} := \left| \begin{array}{l} -\eta_{cr.1.u} & \text{if } \eta_{cr.1.max_1} = -1 \\ \eta_{cr.1.u} & \text{if } \eta_{cr.1.max_1} = 1 \end{array} \right. \eta_{cr.1} := \left| \begin{array}{l} -\eta_{cr.1} & \text{if } \eta_{cr.1.max_1} = -1 \\ \eta_{cr.1} & \text{if } \eta_{cr.1.max_1} = 1 \end{array} \right.$$

 $\eta_{cr.1} =$

	0
0	0
1	1.744·10 ⁻⁶
2	6.975·10 ⁻⁶
3	1.57·10 ⁻⁵
4	2.791·10 ⁻⁵
5	4.361·10 ⁻⁵

 $\eta_{cr.2} =$

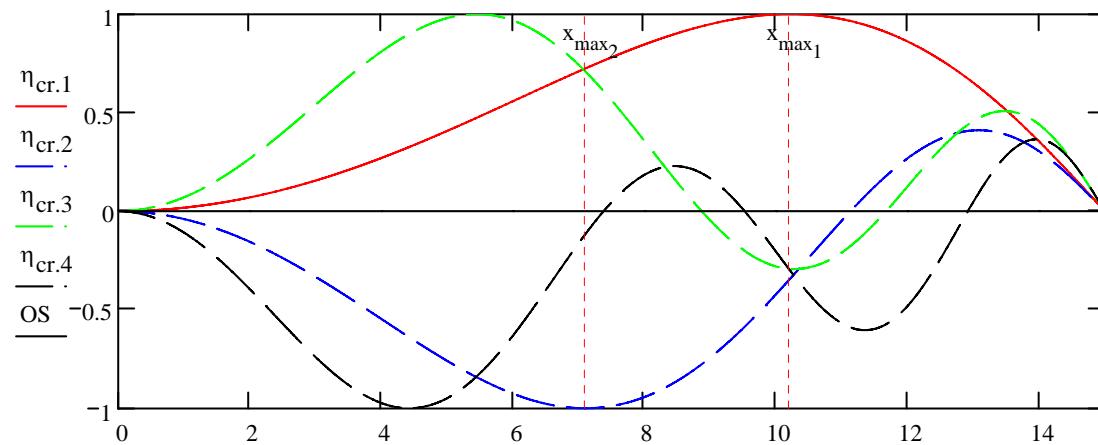
	0
0	0
1	-3.989·10 ⁻⁶
2	-1.596·10 ⁻⁵
3	-3.591·10 ⁻⁵
4	-6.385·10 ⁻⁵
5	-9.977·10 ⁻⁵

 $\eta_{cr.1.u} =$

	0
0	1.744·10 ⁻⁶
1	0
2	1.744·10 ⁻⁶
3	6.975·10 ⁻⁶
4	1.57·10 ⁻⁵
5	2.791·10 ⁻⁵

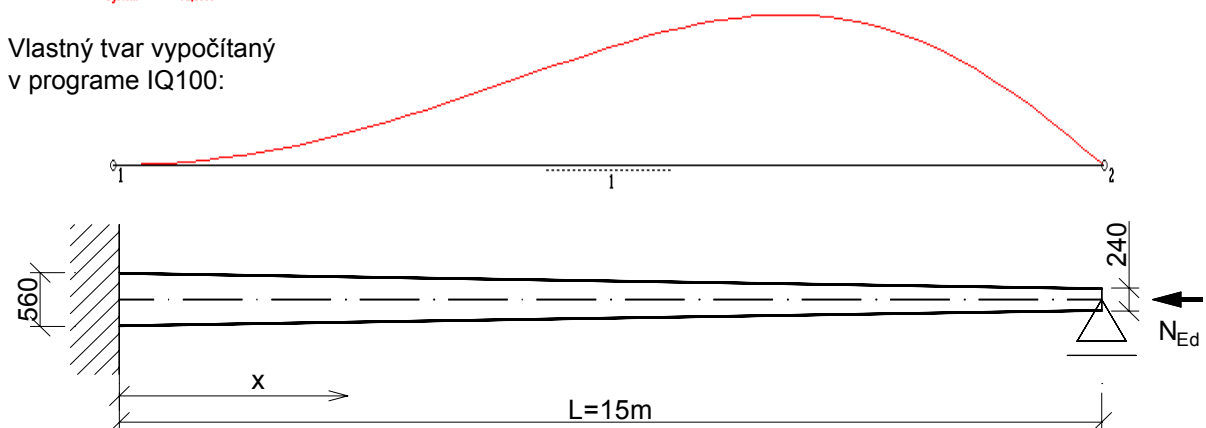
 $\eta_{cr.1.u} =$

	0
0	1.744·10 ⁻⁶
1	0
2	1.744·10 ⁻⁶
3	6.975·10 ⁻⁶
4	1.57·10 ⁻⁵
5	2.791·10 ⁻⁵



Knickfigur (Systemknicken):
 Verzweigungslastfaktoren:
 III (Normalkräfte nach Theorie II. Ordnung); eingegebene III
 System : 2,0036

Vlastný tvar vypočítaný
 v programe IQ100:



Zadefinovanie jednotiek veličín:

$$h := h \cdot m \quad kPa := kN \cdot m^{-2} \quad MN := 10^6 N \quad kNm := kN \cdot m$$

$$x := x \cdot m \quad I_k := I_k \cdot m \quad L := L \cdot m \quad E := E \cdot kPa \quad A := A \cdot m^2 \quad I_y := I_y \cdot m^4 \quad N_{Ed} := N_{Ed} \cdot kN$$

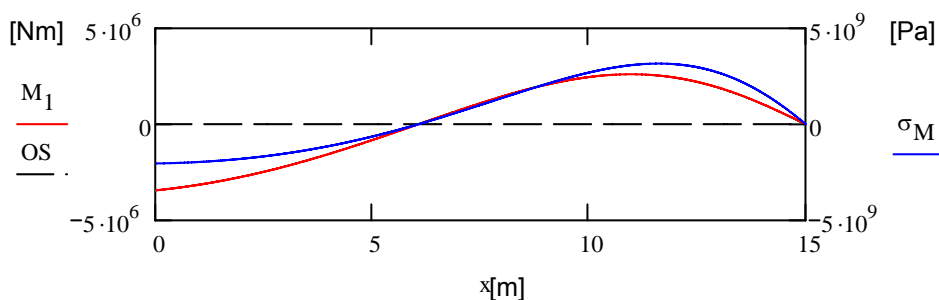
Priebeh momentov ktoré by vznikly pri zdeformovaní prúta do 1. vlastného tvaru:

$$M(x) = -E \cdot I_y(x) \cdot \frac{d^2}{dx^2} \eta_{cr}(x) \text{ Vzhľadom na to, že vlastný tvar je bezrozmerný, nesedí jednotka momentu.}$$

$$M_i := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_i \leftarrow -E \cdot I_{y_i} \cdot \left(\frac{\eta_{cr.1.u_i} - 2 \cdot \eta_{cr.1.u_{i+1}} + \eta_{cr.1.u_{i+2}}}{l_k^2} \right) \end{cases}$$

Priebeh napätí od momentov ak by sa prút zdeformoval do 1. vl. tvaru (pre odhad polohy rozhodujúceho prierezu):

$$\sigma_M := \left(\frac{M_1}{I_y} \cdot \frac{h}{2} \right)$$



Posúdenie stability prúta na základe posúdenia rozhodujúceho prierezu podľa NB.5.2 [13]

Aby sa predišlo možným problémom pri predefinovaní jednotky [m] sú indexy vo vzorcoch z časti 5.2 zmenené z "m" na "r":

Odhad polohy rozhodujúceho prierezu :

Predpokladaná poloha rozhodujúceho prierezu je v smere zväčšujúceho sa napätia od osových síl od miesta maximálneho napätia od momentu (v tomto prípade kladného momentu):

$$r := 1222$$

Prierezové charakteristiky v rozhodujúcom priereze:

$$x_r = 12.22 \text{ m}$$

$$h_r = 0.2993 \text{ m} \quad A_r = 7.202 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \quad W_y := \frac{2 \cdot I_y}{h}$$

$$I_{y_r} = 1.138 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \quad W_{y_r} = 7.604 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Zaťaženie prúta:

	0	
N_{Ed}	1800	kN
	1	
	1800	
	2	
	1800	

$$\alpha_{cr} = -2.0036$$

Kritická sila pre prvý vlastný tvar:

$$N_{cr} := \alpha_{cr} N_{Ed}$$

$$N_{cr_r} = -3606.51 \text{ kN}$$

Podiel momentu teórie II. a momentu teórie I. rádu vyjadruje koeficient:

$$k := \frac{1}{1 - \frac{1}{|\alpha_{cr}|}}$$

$$k = 1.996$$

Materiál prúta: S355: $f_y := 355 \text{ MPa}$

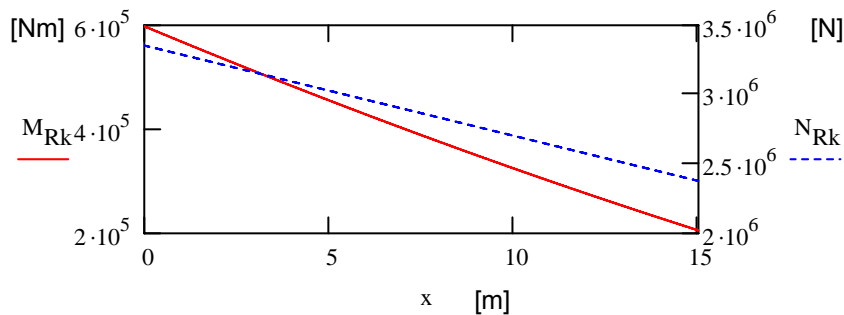
Odolnosti prúta : $\gamma_{M1} := 1.0$

Charakteristická a návrhová odolnosť v tlaku rozhodujúceho prierezu:

$$N_{Rk} := A \cdot f_y \qquad N_{Rd} := \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}} \qquad N_{Rd_r} = 2.557 \times 10^3 \text{ kN}$$

Charakteristická a návrhová odolnosť v ohybe rozhodujúceho prierezu:

$$M_{Rk} := W_y f_y \qquad M_{Rd} := \frac{M_{Rk}}{\gamma_{M1}} \qquad M_{Rd_r} = 269.933 \text{ kNm}$$



Pomerná štíhlosť a súčiniteľ vzperu pre náhradný prút s prierezovými charakteristikami skutočného prúta v mieste x_r a kritickou silou skutočného prúta (v mieste x_r ak by bola premenná):

$$\lambda_p := \sqrt{\frac{N_{Rk}}{N_{cr}}} \qquad \lambda_{p_r} = 0.842 \qquad \text{vzperná krivka "a" } \alpha_m := 0.21$$

$$\phi(\alpha) := \left[0.5 \cdot \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_p - 0.2) + \lambda_p^2 \right] \right]$$

$$\chi(\alpha) := \frac{1}{\phi(\alpha) + \sqrt{\phi(\alpha)^2 - \lambda_p^2}} \qquad \chi(\alpha_m)_r = 0.771 \qquad (5.20b)$$

Návrhová hodnota amplitúdy imperfekcie náhradného prúta v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_r skutočného prúta :

$$e_{o,d} := \left[\alpha_m \cdot (\lambda_p - 0.2) \cdot \frac{M_{Rk}}{N_{Rk}} \cdot \frac{1 - \frac{\chi(\alpha_m) \cdot \lambda_p^2}{\gamma_{M1}}}{1 - \chi(\alpha_m) \cdot \lambda_p^2} \right] \qquad e_{o,d_r} = 14.2 \text{ mm} \qquad (5.20c)$$

Moment, ktorý by vznikol, ak by sme prút zdeformovali do 1. vlastného tvaru: $M_{\eta,cr} := \overline{M_1}$

v priereze x_r vyšetřovaného prúta: $M_{\eta,cr_r} = 2.331 \times 10^3 \frac{1}{m} \text{ kNm}$

Jednotka momentu nesedí, pretože moment je vypočítaný pre bezrozmerný vlastný tvar.

Amplitúda priebehu jednotnej globálnej a lokálnej imperfekcie skutočného prúta v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_r :

$$\eta_{0,init,r} := \frac{|\alpha_{cr}| \cdot |N_{Ed_r}| \cdot e_{o,d_r}}{M_{\eta,cr_r}} \qquad \eta_{0,init,r} = 22 \text{ mm} \qquad (5.13)$$

Priebeh jednotnej globálnej a lokálnej imperfekcie η_{init} (v [14] $\eta_{ugli}(x)$) odvodený od 1. vlastného tvaru a jej veľkosť v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_r :

$$\eta_{init} := \eta_{0,init,r} \cdot \eta_{cr,1} \quad (5.10)$$

amplitúda: $\eta_{init_{max_1}} = 0.02203 \text{ m}$ $\eta_{init} =$

	0
0	0
1	$3.84 \cdot 10^{-8}$
2	$1.536 \cdot 10^{-7}$
3	$3.457 \cdot 10^{-7}$
4	$6.146 \cdot 10^{-7}$

kde max_1 je poloha max. poradnice vo vektore vl.tvaru vybočenia.

Amplitúda (v mieste max_1) prídavnej deformácie v zmysle teórie II. rádu od osovej sily pôsobiacej na prúte s imperfekciou η_{init} :

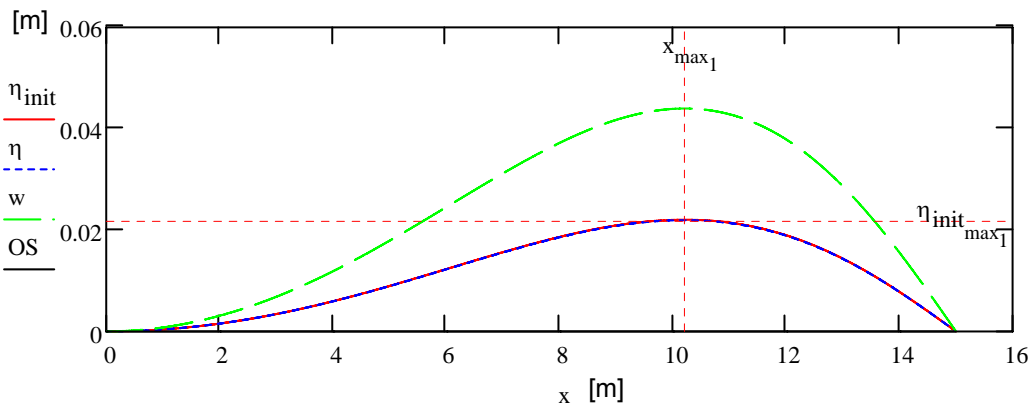
$$\eta_{0,r} := \frac{\eta_{0,init,r}}{|\alpha_{cr}| - 1} \quad \eta_{0,r} = 21.95 \text{ mm}$$

Priebeh prídavnej deformácie v zmysle teórie II. rádu od osovej sily pôsobiacej na prúte s imperfekciou η_{init} :

$$\eta := \eta_{0,r} \cdot \eta_{cr,1} \quad \eta_{max_1} = 0.02195 \text{ m} \quad max_1 = 1021 \quad \eta =$$

	0
0	0
1	$3.827 \cdot 10^{-8}$
2	$1.531 \cdot 10^{-7}$
3	$3.445 \cdot 10^{-7}$
4	$6.124 \cdot 10^{-7}$
5	$9.57 \cdot 10^{-7}$

Výsledný tvar prúta: $w := \eta_{init} + \eta$



Priebeh momentov teórie II. rádu je rovný súčinu priebehu druhej derivácie prídavnej deformácie (priehybu) η (vznikajúcej od osových síl na prúte s imperfekciou η_{init}) a funkcie premennej ohybovej tuhosti EI_y .

Na výpočet momentov diferenčnou metódou je nutné použiť upravený vektor 1. vlastného tvaru so zahrnutými okrajovými podmienkami $\eta_{cr,1,u}$, ktorý má z toho titulu o 2 riadky navyč.

Potom upravená prídavná deformácia (priehyb) je: $\eta_u := \eta_{0,r} \cdot \eta_{cr,1,u}$

s maximom v: $\eta_{u_{max_1+1}} = 21.95 \text{ mm}$

Priebeh momentov teórie II. rádu:

$$M_{II} := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ M_i \leftarrow -E \cdot I_{y_i} \cdot \left(\frac{\eta_{u_i} - 2 \cdot \eta_{u_{i+1}} + \eta_{u_{i+2}}}{l_k^2} \right) \\ M \end{cases}$$

Priebeh druhej derivácie prídavnej deformácie:

$$\eta'' := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n+1 \\ \eta''_i \leftarrow \frac{\eta_{u_i} - 2 \cdot \eta_{u_{i+1}} + \eta_{u_{i+2}}}{l_k^2} \\ \eta'' \end{cases}$$

Poloha a hodnota maximálneho záporného momentu a maximálneho kladného momentu:

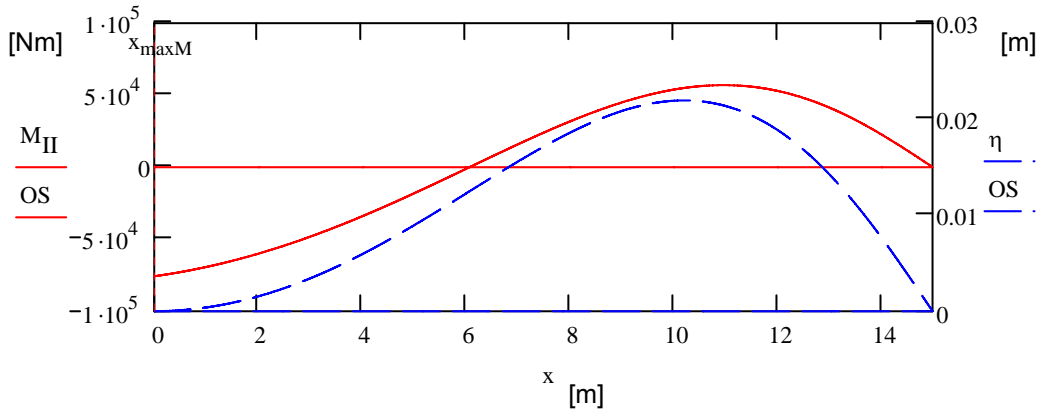
$$\max M := \begin{cases} M_{\text{abs}} \leftarrow \overline{|M_{\text{II}}|} \\ M_{\text{max}} \leftarrow \max(M_{\text{abs}}) \\ \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } M_{\text{abs}_i} = M_{\text{max}} \end{cases}$$

$$\max \text{klad} M := \begin{cases} M_{\text{max}} \leftarrow \max(M_{\text{II}}) \\ \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } M_{\text{II}_i} = M_{\text{max}} \end{cases}$$

$$\max \text{klad} M = 1097$$

$$x_{\max M} = 0 \text{ m} \quad M_{\text{II}_{\max M}} = -75.773 \text{ kNm}$$

$$x_{\max \text{klad} M} = 10.97 \text{ m} \quad M_{\text{II}_{\max \text{klad} M}} = 56.928 \text{ kNm}$$



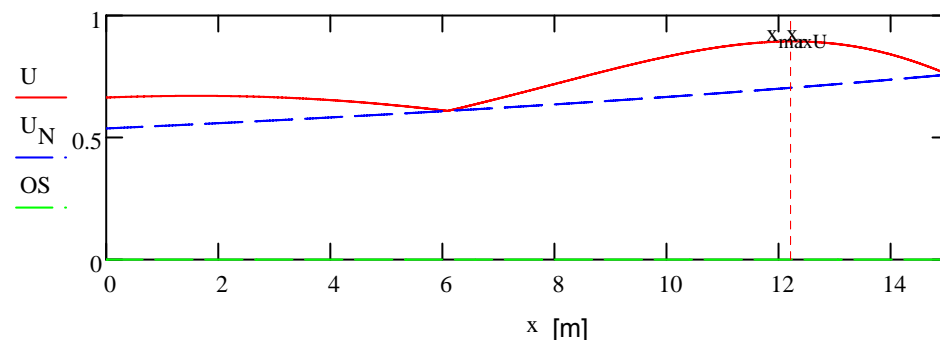
Jednotkové využitie v jednotlivých rezoch prúta, pričom M_{IIabs} bol vypočítaný pre parametre z rezu r :

$$U_N := \frac{\overline{|N_{\text{Ed}}|}}{N_{\text{Rd}}} \quad U_M := \frac{M_{\text{IIabs}}}{M_{\text{Rd}}} \quad U := \left(\frac{\overline{|N_{\text{Ed}}|}}{N_{\text{Rd}}} + \frac{M_{\text{IIabs}}}{M_{\text{Rd}}} \right)$$

$$x_r = 12.22 \text{ m}$$

Poloha a hodnota maximálneho využitia

$$\max U := \begin{cases} U_{\text{max}} \leftarrow \max(U) \\ \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } U_i = U_{\text{max}} \end{cases} \quad \begin{matrix} \max U = 1222 \\ r = 1222 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{pocet_iteracii} := \begin{cases} \text{"vyhovuje"} & \text{if } \max U = r \\ \text{"nevyhovuje"} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \boxed{\text{pocet_iteracii} = \text{"vyhovuje"}} \end{matrix}$$



Maximálne využitie: $\boxed{U_{\max U} = 0.894}$ v mieste: $x_{\max U} = 12.22 \text{ m}$ s presnosťou polohy: $l_k = 0.01 \text{ m}$

$$\text{Prut} := \text{if}(U_{\max U} \leq 1, \text{"vyhovuje"}, \text{"nevyhovuje"})$$

$$\boxed{\text{Prut} = \text{"vyhovuje"}}$$

Napätia:

Priebeh napätia od osovej sily a hodnota napätia v rozhodujúcom priereze:

$$\sigma_N := \frac{\overrightarrow{N_{Ed}}}{A} \quad \sigma_{N_r} = 249.936 \text{ MPa}$$

Priebeh napätia od ohybového momentu teórie II. rádu a hodnota napätia v rozhodujúcom priereze:

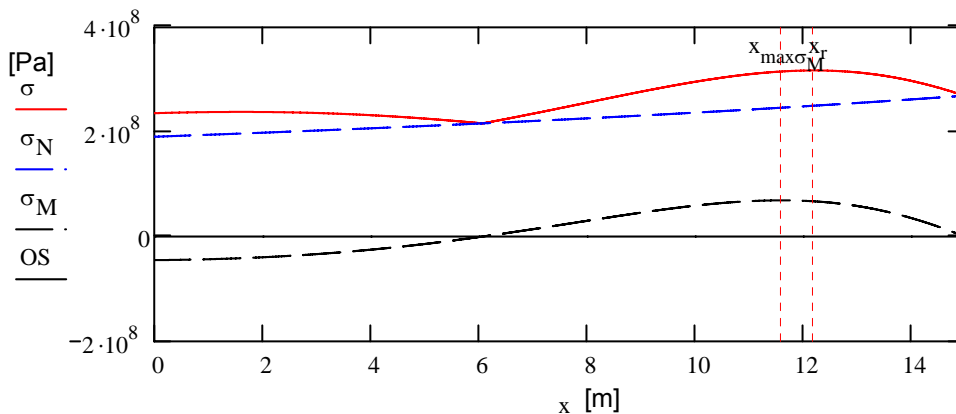
$$\sigma_M := \frac{M_{II}}{W_y} \quad \sigma_{M_r} = 67.267 \text{ MPa}$$

Priebeh celkového napätia:

$$\sigma := \frac{\overrightarrow{N_{Ed}}}{A} + \frac{M_{IIabs}}{W_y}$$

Poloha maximálneho napätia od momentu teórie II. rádu:

$$\begin{aligned} \max \sigma_M := & \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{M.abs} \leftarrow |\sigma_M| \\ \max \sigma_M \leftarrow \max(\sigma_{M.abs}) \\ \text{for } i \in 0..n+1 \\ i \text{ if } \sigma_{M.abs_i} = \max \sigma_M \end{array} \right. \\ & \max \sigma_M = 1161 \\ & x_{\max \sigma_M} = 11.61 \text{ m} \end{aligned}$$



Maximálne napätie na prúte:

$$\sigma_r = 317.204 \text{ MPa}$$

Poloha maximálnej poradnice vl. tvaru vybočenia:

$$x_{\max 1} = 10.21 \text{ m}$$

Poloha maximálneho momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max M} = 0 \text{ m}$$

Poloha maximálneho kladného momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max \text{klad} M} = 10.97 \text{ m}$$

Poloha maximálneho napätia od momentu teórie II. rádu:

$$x_{\max \sigma_M} = 11.61 \text{ m}$$

Poloha rozhodujúceho prierezu:

$$x_r = 12.22 \text{ m}$$

Poloha maximálneho napätia od osovej sily:

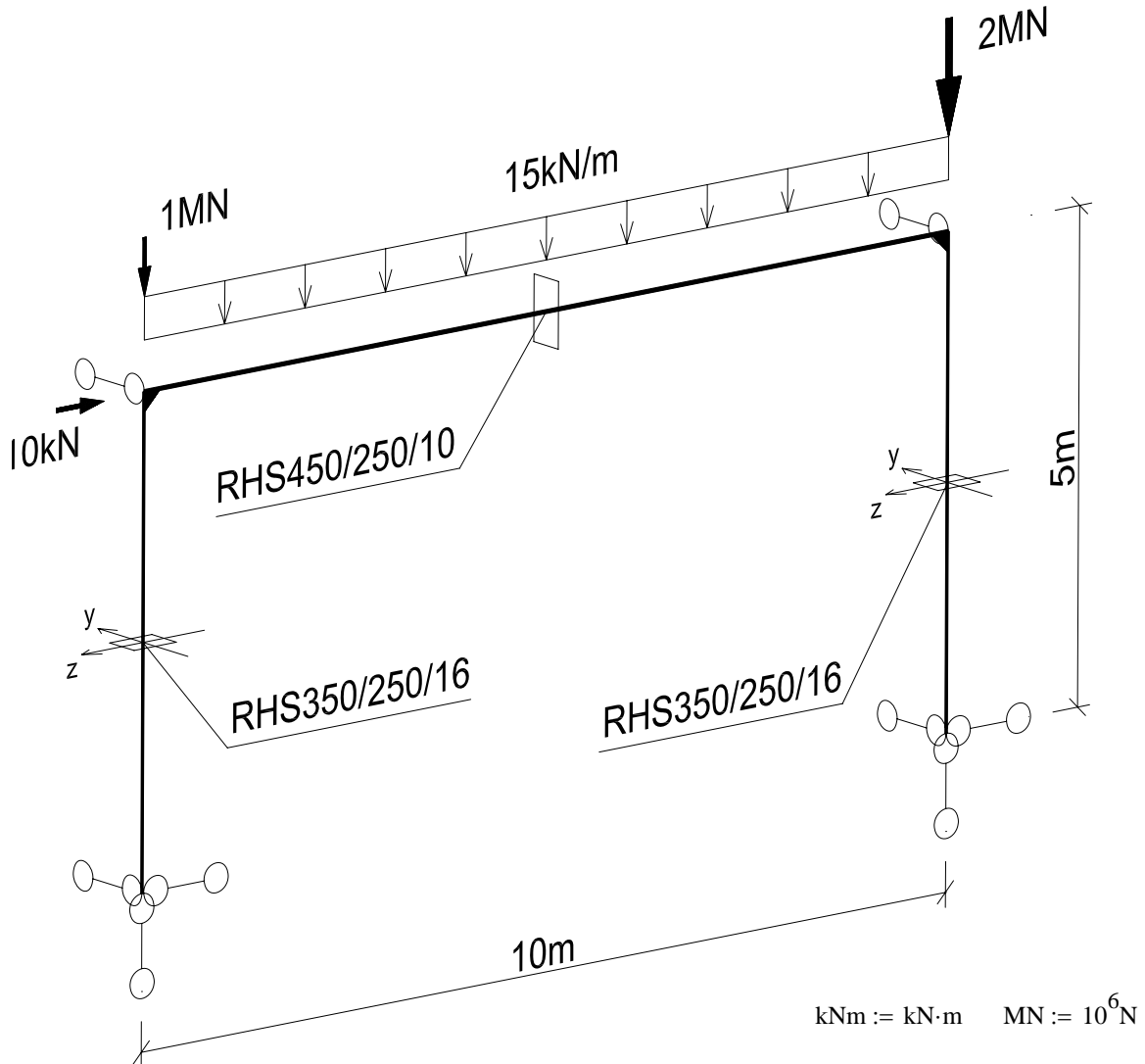
$$x_{\max \sigma_N} := 15 \text{ m}$$

Poloha rozhodujúceho prierezu je v tomto príklade medzi polohou maximálneho napätia od kladného ohybového momentu teórie II. rádu a polohou maximálneho napätia od osovej sily.

PRÍLOHA 8

PRÍKLAD ROVINNÉHO RÁMU POSÚDENÉHO VŠETKÝMI METÓDAMI V [10]

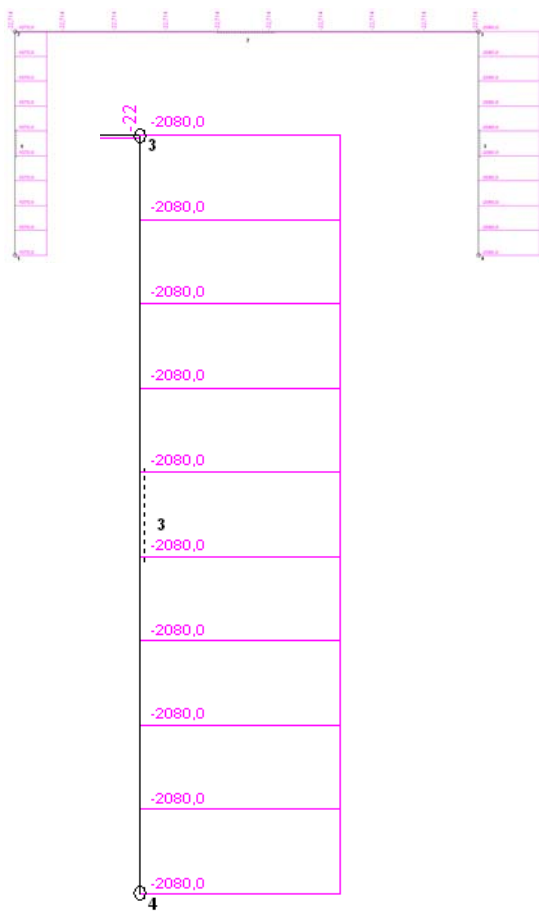
Posúdenie stability rámu v rovine a z roviny rámu pomocou metód z STN EN 1993-1-1 [10]



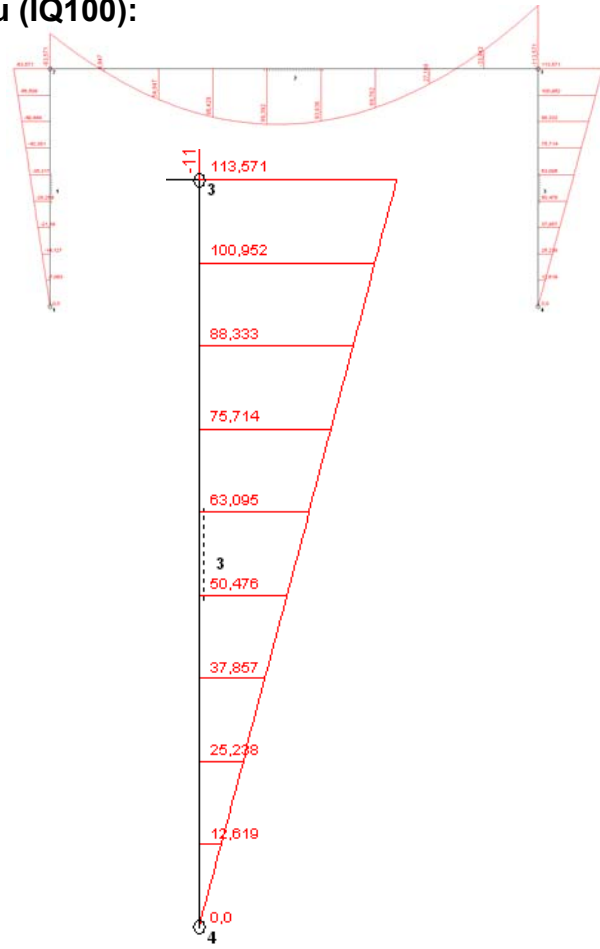
Rozmery rámu :	$L := 10\text{m}$	$H := 5\text{m}$		
Zaťaženie rámu :	$F_{Ed,l} := 1\text{MN}$	$F_{Ed,p} := 2\text{MN}$	$F_{Ed,w} := 10\text{kN}$	$q := 15 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$
Prierezové charakteristiky stĺpa:	RHS 350/250/16:	$W_{el,y} := 1.715 \cdot 10^6 \text{mm}^3$	$A := 17900 \text{mm}^2$	
		$I_y := 3.001 \cdot 10^8 \text{mm}^4$	$I_z := 1.765 \cdot 10^8 \text{mm}^4$	
Odolnosti prierezu stĺpa:	$\gamma_{M1} := 1$	$f_y := 355\text{MPa}$	$E := 210\text{GPa}$	
	$N_{Rk} := A \cdot f_y$	$N_{Rd} := \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}$	$N_{Rd} = 6354.5 \text{kN}$	
	$M_{y,Rk} := W_{el,y} \cdot f_y$	$M_{y,Rd} := \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}$	$M_{y,Rd} = 608.8 \text{kNm}$	

Koeficient rozdevenia rovnováhy pre daný rám (pri vybočení v rovine rámu) a zaťaženie vypočítané v programe IQ100: $\alpha_{cr,IQ100} := 2.4752$

Vnútorne sily rámu podľa teórie I.rádu (IQ100):



$$N_{Ed,I} := 2080 \text{ kN}$$



$$M_{Ed,I} := 113.571 \text{ kNm}$$

Výpočet funkčne zadaného priebehu ohybových momentov teórie I. rádu pravého (rozhodujúceho) stĺpa rámu na základe známych hodnôt v diskrétnych bodoch stĺpa vypočítaných prog. IQ100:

Výška stĺpa: $H = 5 \text{ m}$

Vektor s hodnotami ohybových momentov:

Počet a poloha uzlov so známymi hodnotami ohybových momentov : $n := \text{rows}(v_{M,I})$

$$x_u := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 & n = 14 \\ x_{u_i} \leftarrow i \cdot \frac{H}{n-1} \\ x_u \end{cases}$$

Polynomická aproximácia priebehu ohybových momentov :

$$\eta = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 \dots + C_i \cdot x^i \dots + C_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

$$v_{M,I} := \dots \backslash M \text{ I.xls}$$

Výpočet koeficientov polynomickej aproximácie z rovnice:

$$[M] \{C\} = \{v_{M,I}\}$$

kde:

$$M := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ M_{i,j} \leftarrow \left[i \cdot \frac{H}{(n-1) \cdot m} \right]^j \\ M \end{cases}$$

Koeficienty polynomickej aproximácie:

$$C_I := M^{-1} \cdot v_{M,I}$$

Vzhľadom na lineárny priebeh ohybových momentov je iba jeden člen vektora C_I

nenulový: $C_{I_1} = 22.714$

Funkcia priebehu ohybových momentov teórie I. rádu:

$$M_{Ed,I}(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_{I_i} \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^i \right] \cdot \text{kNm}$$

$$M_{Ed,I}(H) = 113.571 \text{ kNm}$$

Poloha uzlov a príslušná hodnota momentu:

	0		0
0	0	0	-3.354·10 ⁻¹²
1	0.385	1	8.736
2	0.769	2	17.473
3	1.154	3	26.209
4	1.538	4	34.945
5	1.923	5	43.681
6	2.308	6	52.418
7	2.692	7	61.154
8	3.077	8	69.89
9	3.462	9	78.626
10	3.846	10	87.363
11	4.231	11	96.099
12	4.615	12	104.835
13	5	13	113.571

$$x_u = \quad m \quad v_{M,I} = \quad \text{kNm}$$

$$x_{u_{13}} = 5 \text{ m}$$

$$M_{Ed,I}(x_{u_{13}}) = 113.571 \text{ kNm}$$

Analýza rámu na základe teórie II. rádu s imperfekciami -metóda podľa 5.2.2 (3) a) [10] ale iba v rovine rámu

Globálne a lokálne imperfekcie a nahradenie imperfekcií sústavou ekvivalentných vodorovných síl

Určenie imperfekcií podľa 5.3.2 (3) a):

$$m_s := 2$$

$$\alpha_m := \sqrt{0.5 \left(1 + \frac{1}{m_s} \right)}$$

$$\phi_0 := \frac{1}{200}$$

Naklonenie stĺpov:

$$\phi := \phi_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m \quad \phi = 3.873 \times 10^{-3}$$

$$\alpha_h := \begin{cases} \alpha_h \leftarrow \frac{2}{\sqrt{\frac{H}{m}}} & \text{5.3.2 (3) a) [10]} \\ \alpha_h & \text{if } \frac{2}{3} \leq \alpha_h \leq 1 \\ \frac{2}{3} & \text{if } \alpha_h < \frac{2}{3} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha_h = 0.894$$

$$\alpha_m = 0.866$$

Horizontálne sily ekvivalentné nakloneniam stĺpov podľa 5.3.2 (7) [10]:

Obr. 5.4 [10]

$$H_{\phi,I} := \phi \cdot F_{Ed,I} \quad H_{\phi,I} = 3.873 \text{ kN}$$

$$H_{\phi,p} := \phi \cdot F_{Ed,p}$$

$$H_{\phi,p} = 7.746 \text{ kN}$$

Určenie imperfekcií podľa 5.3.2 (3) b):

5.3.2 (3) b) [10]

Začiatkové zakrivenie stĺpov pre vzpernú krivku (a) a pružnostnú analýzu:

$$\frac{e_{0,d}}{L} = \frac{1}{300} \quad \text{Tab. 5.1 [10]}$$

$$e_{0,d} := \frac{H}{300} \quad e_{0,d} = 0.017 \text{ m}$$

Spojité zaťaženie ekvivalentné začiatkovým zakriveniam stĺpov podľa 5.3.2 (7) [10]:

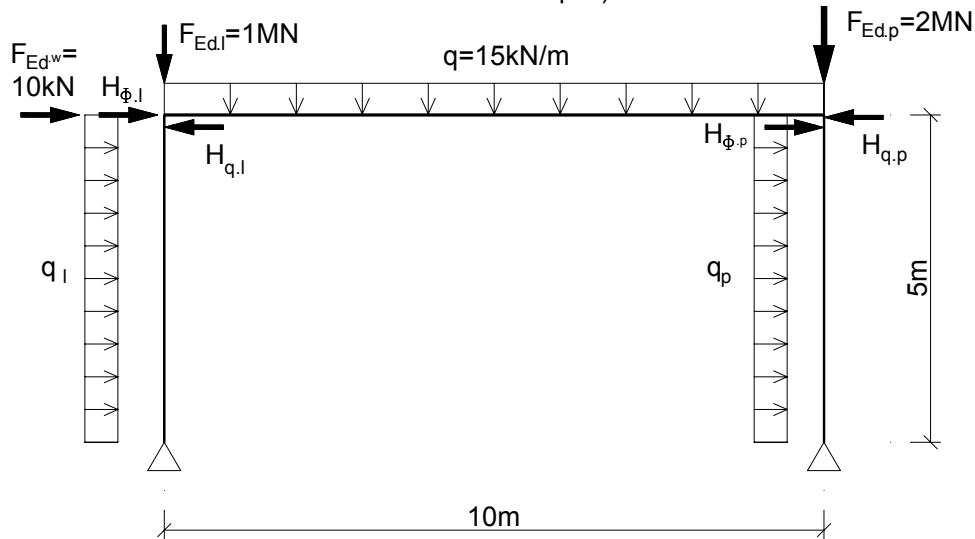
Obr. 5.4 [10]

$$q_l := \frac{8 \cdot F_{Ed,I} \cdot e_{0,d}}{H^2} \quad q_l = 5.333 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

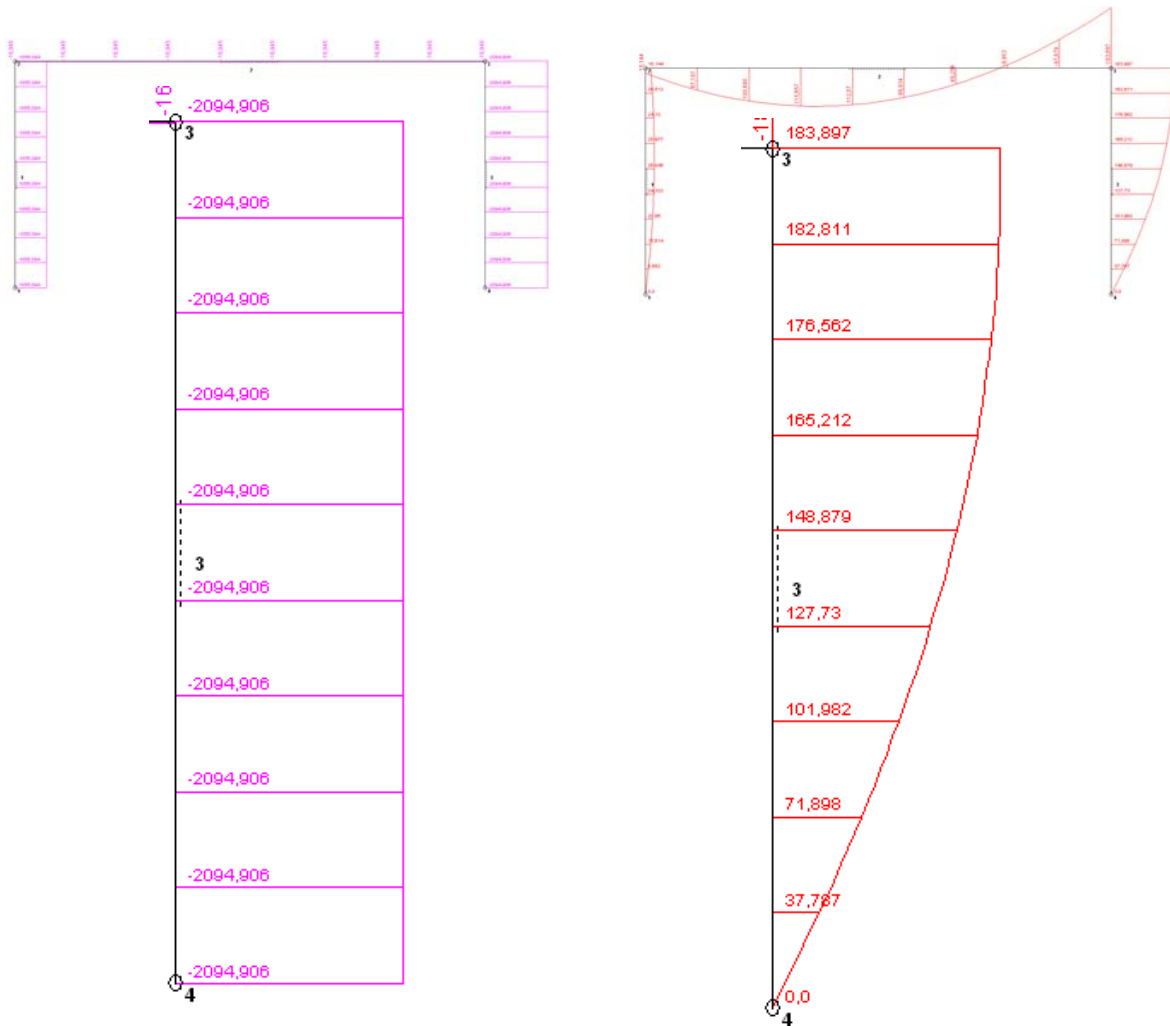
$$q_p := \frac{8 \cdot F_{Ed,p} \cdot e_{0,d}}{H^2} \quad q_p = 10.667 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$H_{q,1} := \frac{4 \cdot F_{Ed,1} \cdot e_{0,d}}{H} \quad H_{q,1} = 13.333 \text{ kN} \quad H_{q,p} := \frac{4 \cdot F_{Ed,p} \cdot e_{0,d}}{H} \quad H_{q,p} = 26.667 \text{ kN}$$

Zaťaženie rámu pre analýzu teóriou II. rádu spolu so zaťažením ekvivalentným imperfekciám (začiatocnému nakloneniu a začiatocnému zakriveniu stĺpov) :



Vnútorne sily vypočítané pomocou programu IQ100 teóriou II. rádu:



Výpočet funkčne zadaného priebehu ohybových momentov teórie II. rádu pravého (rozhodujúceho) stĺpa rámu na základe známych hodnôt v diskretných bodoch stĺpa vypočítaných prog. IQ100:

Priebeh momentov teórie II. rádu $v_{M.II}$ pre pravý stĺp daného rámu a pre dané zaťaženie (IQ100):

Výška stĺpa: $H = 5 \text{ m}$

Vektor s hodnotami ohybových momentov:

Počet a poloha uzlov so známymi hodnotami ohybových momentov :

$$x_u := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ x_{u_i} \leftarrow i \cdot \frac{H}{n-1} \\ x_u \end{cases}$$

$$n := \text{rows}(v_{M.II})$$

$$n = 14$$

$v_{M.II} :=$
... \M II.xls

Poloha uzlov a príslušná hodnota momentu:

x_u	0	$v_{M.II}$	0
0	0		2.582·10 ⁻¹¹
1	0.385		26.535
2	0.769		51.362
3	1.154		74.359
4	1.538		95.413
5	1.923		114.421
6	2.308	m	131.289
7	2.692		145.934
8	3.077		158.284
9	3.462		168.279
10	3.846		175.869
11	4.231		181.016
12	4.615		183.697
13	5		183.897

Polynomická aproximácia priebehu ohybových momentov :

$$\eta = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 \dots + C_i \cdot x^i \dots + C_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

Výpočet koeficientov polynomickej aproximácie z rovnice: $[M] \{C\} = \{v_{M.II}\}$

kde:

$$M := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ M_{i,j} \leftarrow \left[i \cdot \frac{H}{(n-1) \cdot m} \right]^j \\ M \end{cases}$$

Koeficienty polynomickej aproximácie:

$$C_{II} := M^{-1} \cdot v_{M.II}$$

Funkcia priebehu ohybových momentov teórie II.rádu:

$$M_{Ed.II}(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_{II_i} \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^i \right] \cdot \text{kNm}$$

$$x_{u_{13}} = 5 \text{ m} \quad M_{Ed.II}(x_{u_{13}}) = 183.897 \text{ kNm}$$

Hľadanie polohy maximálneho momentu pomocou podmienky nulovej prvej derivácie momentov:

Priebeh prvej derivácie ohybových momentov: $M'_{II}(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_{II_i} \cdot \frac{i}{m} \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^{i-1} \right]$

$$\beta_{odhad} := 0.6$$

$$x_{\text{max.odhad}} := \beta_{odhad} \cdot H$$

$$x_{\text{max.odhad}} = 3 \text{ m}$$

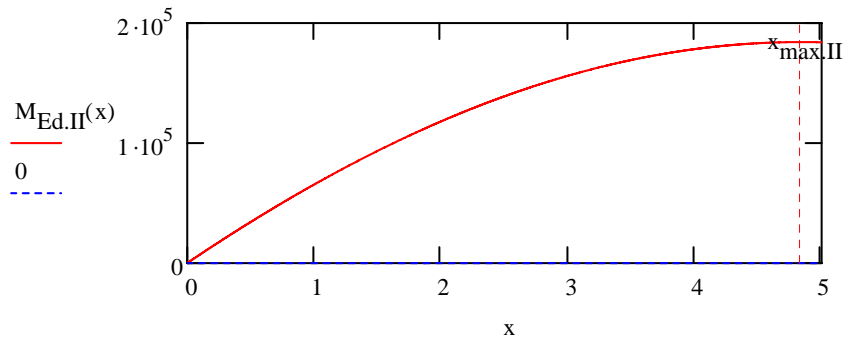
Given

$$M'_{II}(x_{\text{max.odhad}}) = 0$$

$$x'_{\text{max}} := \text{Find}(x_{\text{max.odhad}}) \quad x'_{\text{max}} = 4.839 \text{ m}$$

$$x_{\text{max.II}} := \begin{cases} 0 \text{ m} & \text{if } x'_{\text{max}} < 0 \\ H & \text{if } x'_{\text{max}} > H \\ x'_{\text{max}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad x_{\text{max.II}} = 4.839 \text{ m}$$

V prípade, že nájde polohu mimo prúta, položí polohu maximálneho momentu na ten koniec prúta, ktorý je bližšie nájdenej polohe:



Vnútorne sily v najviac namáhanom priereze :

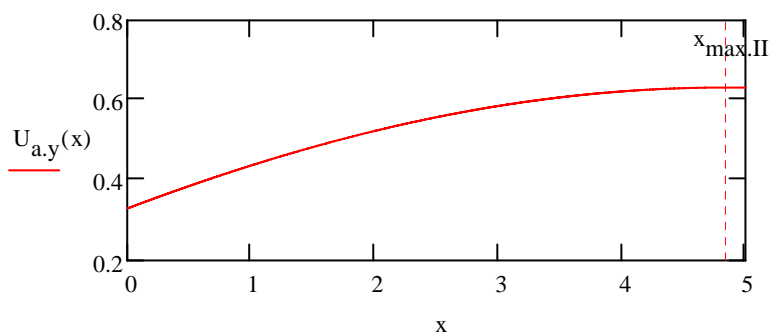
$$M_{Ed.II}(x_{max.II}) = 184.115 \text{ kNm} \quad N_{Ed.II} := 2094.2 \text{ kN}$$

**Overenie odolnosti v rovine rámu na základe overenia odolností prierezov rozhodujúceho stĺpu použitím vnútorných síl teórie II. rádu od imperfekcií v rovine rámu-
-postup podľa 5.2.2 (3) a) [10] (iba v rovine rámu):**

Určenie globálnych a lokálnych imperfekcií a ich nahradenie ekvivalentnými vodorovnými silami a určenie momentov teórie II. rádu (so zohľadnením ekvivalentných vodorovných síl) sú uvedené vyššie

Využitie v jednotlivých rezoch stĺpu :

$$U_{a,y}(x) := \frac{|N_{Ed.II}|}{N_{Rd}} + \frac{|M_{Ed.II}(x)|}{M_{y,Rd}}$$



Maximálne využitie:

$$U_{a,y}(x_{max.II}) = 63.197 \%$$

Všeobecná metóda pre stratu stability prvkov ohybom z roviny a stratu stability klopením (čl. 6.3.4 [10])

$\alpha_{ult.k}$ je najmenšia hodnota zväčšovacieho faktora, pre násobenie s ktorým návrhové zaťaženie dosiahne charakteristickú odolnosť rozhodujúceho prierezu konštrukčného prvku, pri zohľadnení pôsobenia prvku v rovine zaťaženia, bez zohľadnenia straty stability ohybom z roviny a straty stability klopením, avšak so zohľadnením všetkých účinkov spôsobených príslušnými globálnymi a lokálnymi pretvoreniami a imperfekciami v rovine zaťaženia,

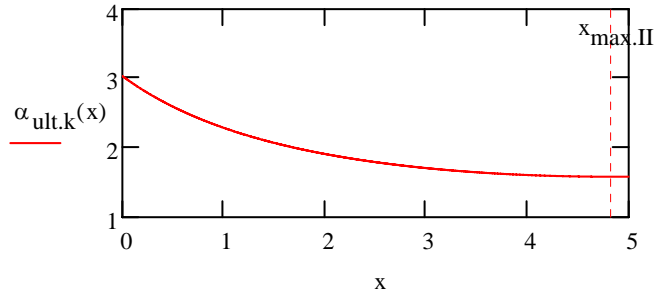
$\alpha_{ult.k}$ sa určí z:

$$\frac{1}{\alpha_{ult.k}} = \frac{|N_{Ed.II}|}{N_{Rd}} + \frac{|M_{Ed.II}(x)|}{M_{y,Rd}}$$

$$\alpha_{ult.k}(x) := \frac{1}{\frac{|N_{Ed.II}|}{N_{Rd}} + \frac{|M_{Ed.II}(x)|}{M_{y,Rd}}}$$

$$\alpha_{ult.k} := \frac{1}{\frac{|N_{Ed.II}|}{N_{Rd}} + \frac{|M_{Ed.II}(x_{max.II})|}{M_{y.Rd}}}$$

$$\alpha_{ult.k} = 1.582$$



$\alpha_{cr.op}$ je najmenšia hodnota zväčšovacieho faktora, prenasobením s ktorým návrhové zaťaženie dosiahne hodnotu kritického zaťaženia konštrukčného prvku v pružnom stave, ktoré zodpovedá strate stability ohybom z roviny alebo strate stability klopením.

$$\alpha_{cr.op} \text{ sa určí z: } \frac{1}{\alpha_{cr.op}} = \frac{|N_{Ed.I}|}{N_{cr.z}} + \frac{|M_{Ed.I}(x)|}{M_{y.cr}}$$

Strata stability ohybom z roviny zaťaženia: v tomto prípade rámu s torzne tuhými profilmi stĺpov môže nastať iba rovinná strata stability kolmo na hlavnú rovinu zaťaženia.

Stĺpy sú v rovine kolmej na hlavnú rovinu zaťaženia uložené obojstranne kĺbovo: $L_{cr.z} := H$

Výpočet kritickkej sily rovinatej straty stability stĺpa v rovine kolmej na hlavnú rovinu zaťaženia:

$$N_{cr.z} := \frac{\pi^2 E \cdot I_z}{L_{cr.z}^2} \quad N_{cr.z} = 1.463 \times 10^4 \text{ kN}$$

$$\alpha_{cr.op} := \frac{N_{cr.z}}{N_{Ed.I}} \quad \alpha_{cr.op} = 7.035$$

Globálna pomerná štíhlosť konštrukčného prvku:

$$\alpha := 0.21$$

$$\lambda_{p.op} := \sqrt{\frac{\alpha_{ult.k}}{\alpha_{cr.op}}}$$

$$\lambda_{p.op} = 0.474 \quad (6.64) [10]$$

$$\phi_{op} := 0.5 \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_{p.op} - 0.2) + \lambda_{p.op}^2 \right]$$

$$\phi_{op} = 0.641$$

Súčiniteľ vzperu z roviny:

$$\chi_{op} := \begin{cases} \chi'_{op} \leftarrow \frac{1}{\phi_{op} + \sqrt{\phi_{op}^2 - \lambda_{p.op}^2}} \\ \min(\chi'_{op}, 1) \end{cases}$$

$$\chi_{op} = 0.932$$

Podmienka odolnosti rámu voči strate stability ohybom z roviny:

$$\frac{\chi_{op} \cdot \alpha_{ult.k}}{\gamma_{M1}} \geq 1 \quad 6.3.4 (2) [10]$$

$$\frac{\chi_{op} \cdot \alpha_{ult.k}}{\gamma_{M1}} = 1.475 \quad (6.63) [10]$$

Využitie podľa všeobecnej metódy:

$$U_{vseo} := \frac{1}{\frac{\chi_{op} \cdot \alpha_{ult.k}}{\gamma_{M1}}}$$

$$U_{vseo} = 67.803 \%$$

Globálna analýza rámu s vplyvom teórie II.rádu a imperfekcií a posúdenie prútov vyrezaných z konštrukcie podľa 6.3 [10] - metóda podľa čl. 5.2.2 (3) b) [10]

Globálna analýza rámu v rovine (čl. 5.2.2 (3) b) [10]) s vplyvom teórie II.rádu a imperfekcií podľa 5.3.2 (3) [10] a posúdenie prútov vyrezaných z konštrukcie podľa 6.3

Na určenie koncových síl a koncových momentov z globálnej analýzy s vplyvom teórie II. rádu a vplyvom imperfekcií podľa čl. 5.2.2 (3) b) [10] sa majú použiť imperfekcie podľa 5.3.2 (3) [10] s ohľadom na 5.3.2 (6) [10]:

Ak prút má aspoň jeden krajný uzol odolný voči ohybovému momentu alebo má kritickú silu menšiu ako je 4-násobok návrhovej osovej sily, potom sa má uvažovať okrem začiatočného naklonenia prúta aj začiatočné zakrivenie.

V prípade daného rámu sa za imperfekcie berie začiatočné naklonenie aj začiatočné zakrivenie stípa.

Posúdenie vyrezaného stípa podľa čl. 6.3.3:

Pri výpočte súčiniteľov vzperu v metóde 5.2.2 (3) b) [10] sa za vzpernú dĺžku má brať systémová dĺžka prúta, vzhľadom na to že stabilné javy sú zohľadnené už v priebehu momentov teórie II. rádu.

$$L_{cr,y} := H$$

$$L_{cr,y} = 5 \text{ m}$$

$$N_{cr,y} := \frac{\pi^2 E \cdot I_y}{L_{cr,y}^2}$$

$$N_{cr,y} = 2.488 \times 10^4 \text{ kN}$$

Klopenie vzhľadom na torzne tuhý profil stípa nemôže nastať:

$$\lambda_{p,y} := \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,y}}}$$

$$\lambda_{p,y} = 0.505$$

$$\chi_{LT} := 1$$

$$\phi_y := 0.5 \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_{p,y} - 0.2) + \lambda_{p,y}^2 \right]$$

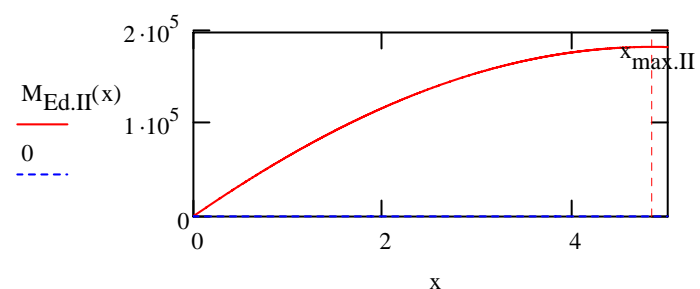
$$\phi_y = 0.66$$

$$\chi_y := \begin{cases} \chi'_y \leftarrow \frac{1}{\phi_y + \sqrt{\phi_y^2 - \lambda_{p,y}^2}} \\ \min(\chi'_y, 1) \end{cases}$$

$$\chi_y = 0.923$$

Priebeh momentov v rovine rámu na základe teórie II. rádu s imperfekciami podľa 5.3.2 (3) [10]:

$$M_{y,Ed,II} := M_{Ed,II}(x_{max,II})$$



Faktor ekvivalentného konštantného momentu pre stratu stability naklonením stípaov:

$$C_{my} := 0.9 \quad \text{Tab. B.3 [10]}$$

Interakčný faktor pre prúty necitlivé na skrútenie:

$$k_{yy} := \min \left[C_{my} \cdot \left(1 + 0.6 \cdot \lambda_{p,y} \cdot \frac{|N_{Ed,II}|}{\chi_y \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} \right), C_{my} \cdot \left(1 + 0.6 \cdot \frac{|N_{Ed,II}|}{\chi_y \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} \right) \right]$$

$$k_{yy} = 0.997 \quad \text{Tab. B.1 [10]}$$

$$\frac{N_{Ed,II}}{\chi_y \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad U_{b,y} := \frac{|N_{Ed,II}|}{\chi_y \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{|M_{y,Ed,II}|}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} \quad (6.61) [10]$$

Využitie: $\frac{|N_{Ed,II}|}{\chi_y \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} = 35.721\%$ $k_{yy} \cdot \frac{|M_{y,Ed,II}|}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 30.165\%$ Využitie: $U_{b,y} = 65.886\%$

Posúdenie rámu z roviny zaťaženia na základe koncových momentov z globalnej analýzy v rovine rámu (čl. 5.2.2 (3) b) [10]) s vplyvom teórie II.rádu a imperfekcií podľa 5.3.2 (3) [10] a posúdenie prútov vyrezaných z konštrukcie podľa 6.3 [10]

Stĺp je podopretý obojstranne kĺbovo v rovine kolmej na rovinu rámu: $L_{cr,z} = 5 \text{ m}$

Poznámka: keby bola kritická dĺžka prúta menšia ako systémová (závisí od bočného podopretia prúta) tak sa môže posudzovať len ten úsek s príslušným priebehom momentov.

Kritická sila rovinatej straty stability stĺpa v rovine kolmej na hlavnú rovinu zaťaženia (bola už vypočítaná vo všeobecnej metóde pre stratu stability prvkov ohybom z roviny):

$$N_{cr,z} = 1.463 \times 10^4 \text{ kN}$$

Pomerná štíhlosť pri vybočení stĺpa z roviny zaťaženia:

$$\lambda_{p,z} := \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,z}}} \quad \lambda_{p,z} = 0.659$$

$$\phi_z := 0.5 \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_{p,z} - 0.2) + \lambda_{p,z}^2 \right] \quad \phi_z = 0.765$$

$$\chi_z := \begin{cases} \chi'_z \leftarrow \frac{1}{\phi_z + \sqrt{\phi_z^2 - \lambda_{p,z}^2}} \\ \min(\chi'_z, 1) \end{cases} \quad \chi_z = 0.866$$

Interakčný faktor k_{zy} závisí od interakčného faktora k_{yy} , ktorý je už vypočítaný:

$$k_{zy} := 0.8 \cdot k_{yy} \quad k_{zy} = 0.798 \quad \text{Tab. B.1 [10]}$$

$$\frac{N_{Ed,II}}{\chi_z \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad U_{b,zy} := \frac{N_{Ed,II}}{\chi_z \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed,II}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} \quad (6.62) [10]$$

Využitie: $\frac{N_{Ed,II}}{\chi_z \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0.38$ $k_{zy} \cdot \frac{M_{y,Ed,II}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 0.241$ Využitie: $U_{b,zy} = 62.18\%$

Analyza rámu na základe teórie I. rádu s imperfekciami s odhadom vplyvu teórie II.rádu podľa čl. 5.2.1 (4)B a 5.2.2 (5)B [1]

Vzhľadom na čl. 5.2.1 (4)B je pri portálových rámoch s miernymi sklonmi striech a rovinných prútočných konštrukciách tvorených nosníkmi (ktorých tlakové osovú sily nie sú významné) a stĺpmi, a ktoré spĺňajú podmienku (5.1) [10] je možné použiť približný vzorec pre α_{cr} (5.2) [10].

Pre porovnanie s približným odhadom α_{cr} (5.2) [10] je súčiniteľ rozdvojenia rovnováhy rámu vypočítaný programom IQ100 pričom boli zahrnuté aj ekvivalentné zaťaženia z titulu imperfekcii (pretože ich vplyvom sa zmení pomer osových síl v stĺpoch a tým aj koeficient rozdvojenia rovnováhy aj keď v tomto príklade je iba minimálny rozdiel):

Kritická sila pravého stĺpa bez zohľadnenia ekvivalentných vodorovných síl $\alpha_{cr.IQ100} = 2.4752$	Kritická sila pravého stĺpa so zohľadnením ekvivalentných vodorovných síl od naklonenia stĺpov $\alpha_{cr.IQ100.e.n} := 2.4748$	Kritická sila pravého stĺpa so zohľadnením ekvivalentných vodorovných síl od naklonenia a zakrivenia stĺpov $\alpha_{cr.IQ100.e.n.z} := 2.4748$
$N_I := 2080 \text{ kN}$	$N_{I.e.n} := 2085.81 \text{ kN}$	$N_{I.e.n.z} := 2085.81 \text{ kN}$
$N_{cr.IQ100} := \alpha_{cr.IQ100} \cdot N_I$	$N_{cr.IQ100.e.n} := \alpha_{cr.IQ100.e.n} \cdot N_{I.e.n}$	$N_{cr.IQ100.e.n.z} := \alpha_{cr.IQ100.e.n.z} \cdot N_{I.e.n.z}$
$N_{cr.IQ100} = 5148.416 \text{ kN}$	$N_{cr.IQ100.e.n} = 5161.963 \text{ kN}$	$N_{cr.IQ100.e.n.z} = 5161.963 \text{ kN}$

Vzhľadom na to, že ekvivalentné vodorovné sily od zakrivenia stĺpa predstavujú vzhľadom na stĺp rovnovážnu sústavu síl nevznikajú od nich žiadne prídavné osovú sily v stĺpoch a tým aj osovú silu stĺpu teórie I rádu sa nezmení, teda koeficient rozdvojenia rovnováhy ostal nezmenený.

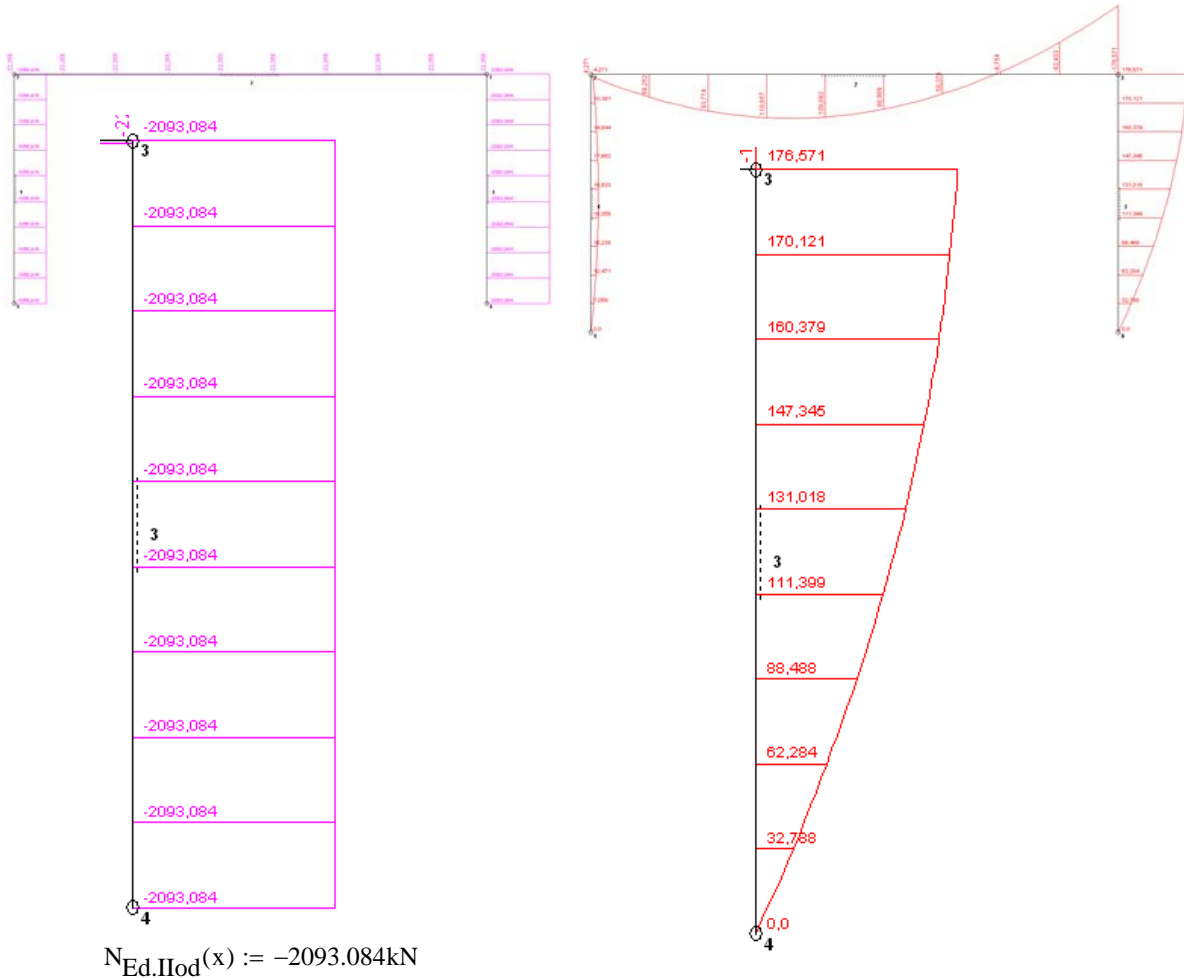
Horizontálna sila na rám:	$F_{Ed.w} = 10 \text{ kN}$	
Súčet horizontálnych síl na rám:	$H_{Ed} := F_{Ed.w} + H_{\phi.l} + H_{\phi.p}$	$H_{Ed} = 21.619 \text{ kN}$
Súčet vertikálnych síl na rám:	$V_{Ed} := F_{Ed.l} + F_{Ed.p} + q \cdot L$	$V_{Ed} = 3.15 \times 10^3 \text{ kN}$
Horizontálna deformácia rámu od H_{Ed} :		Horizontálna deformácia rámu od H_{Ed} a ekvivalentných síl od začiatočného zakrivenia stĺpov:
$\delta_{H.Ed} := 13.8 \text{ mm}$		$\delta_{H.Ed.alt} := 17.1 \text{ mm}$
Odhad súčiniteľa rozdvojenia rovnováhy rámu:		Odhad súčiniteľa rozdvojenia rovnováhy rámu:
$\alpha_{cr.o} := \frac{H_{Ed}}{V_{Ed}} \frac{H}{\delta_{H.Ed}}$		$\alpha_{cr.o.alt} := \frac{H_{Ed}}{V_{Ed}} \frac{H}{\delta_{H.Ed.alt}}$
$\alpha_{cr.o} = 2.487$		$\alpha_{cr.o.alt} = 2.007$
Percentuálny rozdiel odhadu a presnej hodnoty:		
$\frac{\alpha_{cr.o} - \alpha_{cr.IQ100.e.n}}{\alpha_{cr.IQ100}} = 0.479 \%$		$\frac{\alpha_{cr.IQ100.e.n.z} - \alpha_{cr.o.alt}}{\alpha_{cr.o.alt}} = 23.322 \%$

Na základe veľmi dobrej zhody odhadu a presnej hodnoty vtedy ak sa H_{Ed} vypočítalo od horizontálnych síl a od vodorovných síl ekvivalentných iba začiatočnému nakloneniu je možné usúdiť, že v čl.5.2.1 (4)B bolo pri definovaní H_{Ed} myslené pod pojmom fiktívnych vodorovných zaťažení iba sily ekvivalentné nakloneniam stĺpov.

Priebeh odhadu momentov teórie II. rádu sa vypočíta na základe teórie I.rádu, pričom všetky horizontálne nesymetrické zaťaženia (horizontálne sily od vetra a ekvivalentné sily od imperfekcii v tvare začiatočného naklonenia) sa prenášobia nasledovným súčiniteľom:

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr,0}}} = 1.673 \quad (5.4) [10]$$

Na základe 5.2.2 (5)B [10] je možné tento odhad uplatniť iba ak $\alpha_{cr} > 3$, napriek tomu že to v tomto prípade nie je splnené pre porovnanie výsledkov je tento odhad uvedený:



Výpočet funkčne zadaného priebehu ohybových momentov teórie I. rádu (s odhadom vplyvu teórie II rádu - so zväčšenými horizontálnymi nesymetrickými zaťažzeniami) pravého (rozhodujúceho) stĺpa rámu na základe známych hodnôt v diskretných bodoch stĺpa vypočítaných prog. IQ100 :

Priebeh momentov teórie II. rádu (odhad) $v_{M,IIod}$ pre pravý stĺp daného rámu a pre dané zaťaženie (IQ100):

Výška stĺpa: $H = 5 \text{ m}$

Vektor s hodnotami ohybových momentov:

Počet a poloha uzlov so známymi hodnotami ohybových momentov :

$$x_u := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ x_{u,i} \leftarrow i \cdot \frac{H}{n-1} \\ x_u \end{cases}$$

$$n := \text{rows}(v_{M,IIod})$$

$$n = 14$$

$v_{M,IIod} :=$... \M IIodhad.xls

Polynomická aproximácia priebehu ohybových momentov :

$$\eta = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 \dots + C_i \cdot x^i \dots + C_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

Výpočet koeficientov polynomickej aproximácie z rovnice:

$$[M] \{C_{IIod}\} = \{v_{M.IIod}\}$$

kde:

$$M := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ M_{i,j} \leftarrow \left[i \cdot \frac{H}{(n-1) \cdot m} \right]^j \\ M \end{cases}$$

Poloha uzlov a príslušná hodnota momentu:

	0		0
0	0		-6.708·10 ⁻¹²
1	0.385		23.05
2	0.769		44.522
3	1.154		64.417
4	1.538		82.733
5	1.923		99.471
6	2.308	m	114.631
7	2.692		128.214
8	3.077		140.218
9	3.462		150.645
10	3.846		159.493
11	4.231		166.764
12	4.615		172.456
13	5		176.571

Koeficienty polynomickej aproximácie:

$$C_{IIod} := M^{-1} \cdot v_{M.IIod}$$

Funkcia priebehu odhadu ohybových momentov teórie II.rádu:

$$M_{Ed.IIod}(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_{IIod_i} \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^i \right] \cdot \text{kNm} \quad x_{u_{13}} = 5 \text{ m} \quad M_{Ed.IIod}(x_{u_{13}}) = 176.571 \text{ kNm}$$

Hľadanie polohy maximálneho momentu:

$$\text{Prvá derivácia momentov: } M'_{IIod}(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_{IIod_i} \cdot \frac{i}{m} \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^{i-1} \right]$$

$$\beta_{odhad} := 0.6$$

$$x_{max.odhad} := \beta_{odhad} \cdot H$$

$$x_{max.odhad} = 3 \text{ m}$$

Given

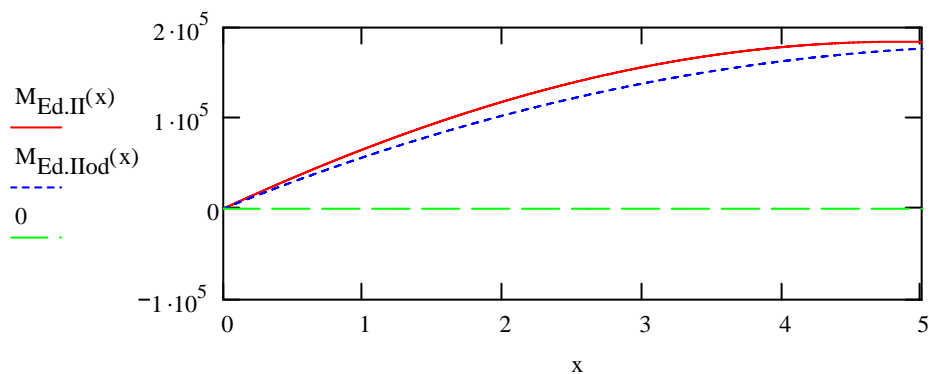
$$M'_{IIod}(x_{max.odhad}) = 0$$

$$x'_{max} := \text{Find}(x_{max.odhad}) \quad x'_{max} = 5.811 \text{ m}$$

$$x_{max.IIod} := \begin{cases} 0 \text{ m} & \text{if } x'_{max} < 0 \\ H & \text{if } x'_{max} > H \\ x'_{max} & \text{otherwise} \end{cases} \quad x_{max.IIod} = 5 \text{ m}$$

V prípade, že nájde polohu mimo prúta, položí polohu maximálneho momentu na ten koniec prúta, ktorý je bližšie nájdenej polohe:

Porovnanie priebehu momentov teórie II rádu a odhadu momentov teórie II rádu:



Percentuálny rozdiel momentov teórie II rádu s imperfekciami a odhadu momentov teórie II rádu s imperfekciami:

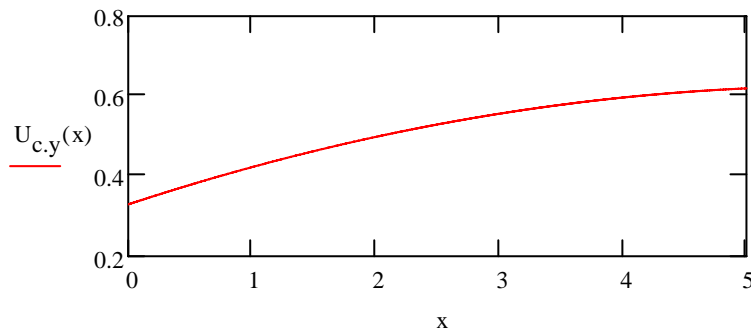
$$M_{Ed,IIod}(x_{max,IIod}) = 176.571 \text{ kNm}$$

$$M_{Ed,II}(x_{max,II}) = 184.115 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{Ed,II}(x_{max,II}) - M_{Ed,IIod}(x_{max,IIod})}{M_{Ed,IIod}(x_{max,IIod})} = 4.273 \%$$

Posúdenie rámu v jednotlivých prierezoch na základe vnútorných síl s odhadom teórie II.rádu:

$$U_{c,y}(x) := \frac{|N_{Ed,IIod}(x)|}{N_{Rd}} + \frac{|M_{Ed,IIod}(x)|}{M_{y,Rd}}$$

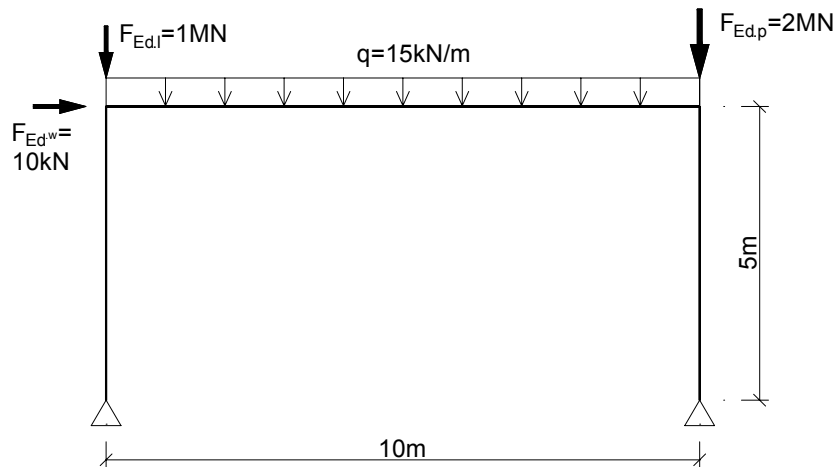


$x_{max,IIod} = 5 \text{ m}$

Maximálne využitie:

$$U_{c,y}(x_{max,IIod}) = 61.941 \%$$

Analýza v rovine rámu na základe teórie I. rádu podľa čl. 5.2.2 (3) c) [10] a posúdenie náhradného prúta podľa 6.3 [10]



Vnútorné sily teóriou I. rádu (IQ100) pre hore uvedené zaťaženie sú uvedené na začiatku.

Kritická sila pre pravý stĺp pre globálnu stratu stability v rovine rámu pre hore uvedené zaťaženie (IQ100):

$$N_{cr,p} := N_{cr,IQ100} \quad N_{cr,p} = 5148.42 \text{ kN}$$

Pomerná štíhlosť a vzperná dĺžka zodpovedajúca kritickej sile pravého stĺpa pre glob. stratu stability:

$$\lambda_p := \sqrt{\frac{A \cdot f_y}{N_{cr,p}}} \quad \lambda_p = 1.111 \quad N_{cr,p} = \frac{\pi^2 E \cdot I_y}{L_{cr}^2} \quad \rightarrow \quad L_{cr} := \pi \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I_y}{N_{cr,p}}}$$

$$\phi := 0.5 \left[1 + \alpha \cdot (\lambda_p - 0.2) + \lambda_p^2 \right] \quad \phi = 1.213 \quad L_{cr} = 10.991 \text{ m}$$

$$\chi := \begin{cases} \chi' \leftarrow \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda_p^2}} \\ \min(\chi', 1) \end{cases} \quad \begin{aligned} \alpha &= 0.21 \\ \chi &= 0.589 \end{aligned}$$

Faktor ekvivalentného konštantného momentu pre stratu stability naklonením stĺpov:

$C_{my} := 0.9$ Tab. B.3 [10]

Interakčný faktor pre prúty necitlivé na skrútenie:

$$k_{yy} := \min \left[C_{my} \cdot \left(1 + 0.6 \cdot \lambda_p \cdot \frac{|N_{Ed,I}|}{\chi \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} \right), C_{my} \cdot \left(1 + 0.6 \cdot \frac{|N_{Ed,I}|}{\chi \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} \right) \right]$$

Tab. B.1 [10]

$$\chi_{LT} = 1 \quad k_{yy} = 1.2$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1 \quad U_{d,y} := \frac{N_{Ed,I}}{\chi \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yy} \cdot \frac{M_{Ed,I(H)}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} \quad (6.61) [10]$$

Využitie: $\frac{N_{Ed,I}}{\chi \cdot \frac{N_{Rk}}{\gamma_{M1}}} = 55.619\%$ $k_{yy} \cdot \frac{M_{Ed,I(H)}}{\chi_{LT} \cdot \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} = 22.391\%$ Využitie: $U_{d,y} = 78.01\%$

Analýza teóriou II. rádu v rovine rámu podľa čl.5.2.2 (3) a) [10] s imperfekciou v tvare vlastného tvaru podľa čl. 5.3.2 (11) [10] a posúdenie najviac namáhaného prierezu

Výpočet funkčne zadaného priebehu vlastného tvaru vybočenia pravého (rozhodujúceho) stĺpa rámu na základe známych hodnôt v diskrétnych bodoch stĺpa vypočítaných prog. IQ100:

Vlastný tvar vybočenia η pre daný rám a zaťaženie (IQ100):

Výška stĺpa:

$$H = 5 \text{ m}$$

Kritická sila pre pravý stĺp:

$$N_{cr,p} = 5148.42 \text{ kN}$$

Počet a poloha uzlov so známymi hodnotami tvaru vybočenia :

$$x_u := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ x_{u,i} \leftarrow i \cdot \frac{H}{n-1} \\ x_u \end{cases}$$

$$n := \text{rows}(\eta) \\ n = 14$$

$$\eta := \dots \backslash \text{vl tvar.xls}$$

$$\alpha_{cr} := 2.4752$$

Polynomická aproximácia tvaru vybočenia :

$$\eta = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + C_3 \cdot x^3 \dots \\ + C_i \cdot x^i \dots \\ + C_{n-1} \cdot x^{n-1}$$

Výpočet koeficientov polynomickej

aproximácie z rovnice:

$$[M] \{C\} = \{\eta\}$$

kde:

$$M := \begin{cases} \text{for } i \in 0..n-1 \\ \text{for } j \in 0..n-1 \\ M_{i,j} \leftarrow \left[i \cdot \frac{H}{(n-1) \cdot m} \right]^j \\ M \end{cases}$$

Koeficienty polynomickej aproximácie: $C := M^{-1} \cdot \eta$

Funkcia vlastného tvaru vybočenia: $\eta(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^i \right]$

$x_{u_{13}} = 5 \text{ m}$

$\eta(x_{u_{13}}) = 3.859 \times 10^3$

Hľadanie polohy maximálnej poradnice vlastného tvaru vybočenia:

Prvá derivácia vlastného tvaru: $\eta'(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot \frac{i}{m} \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^{i-1} \right]$

$\beta_{\text{odhad}} := 0.9$

$x_{\text{max.odhad}} := \beta_{\text{odhad}} \cdot H$

$x_{\text{max.odhad}} = 4.5 \text{ m}$

Given

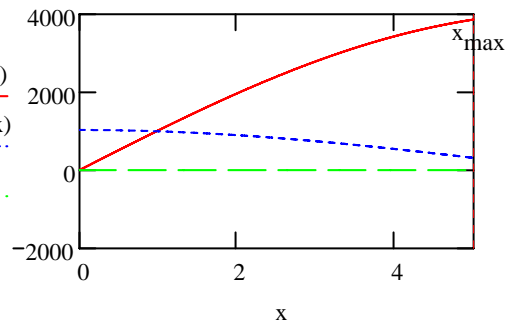
$\eta'(x_{\text{max.odhad}}) = 0$

$x_{\text{max}} := \text{Find}(x_{\text{max.odhad}})$

$x_{\text{max}} = 6.322 \text{ m}$

$x_{\text{max}} := \begin{cases} x_{\text{max}} & \text{if } 0 \leq x_{\text{max}} < H \\ 0 & \text{if } x_{\text{max}} < 0 \\ H & \text{otherwise} \end{cases}$

Priebeh vlastného tvaru a jeho prvej derivácie na pravom stĺpe:



Poloha maximálnej poradnice vlastného tvaru vybočenia v rámci prúta: $x_{\text{max}} = 5 \text{ m}$

Pre premennú v jednotkách [m] má vlastný tvar bezrozmerné poradnice:

$\eta(x_{\text{max}}) = 3.85855 \times 10^3$

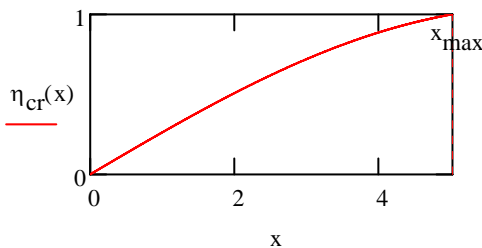
Vlastný tvar vybočenia normovaný na maximum 1:

Priebeh normovaného vlastného tvaru vybočenia rozhodujúceho stĺpa pri globálnej strate stability v rovine rámu:

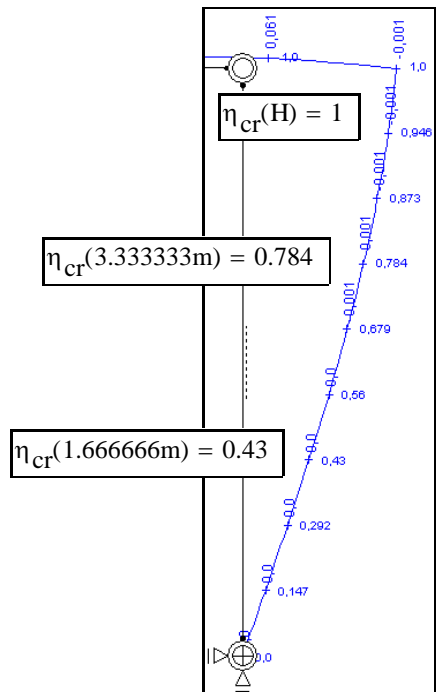
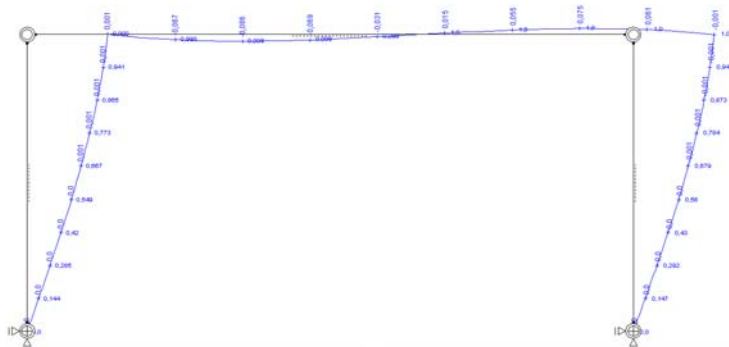
$\eta_{\text{cr}}(x) := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^i \right]}{\eta(x_{\text{max}})}$

Maximálna poradnica:

$\eta_{\text{cr}}(x_{\text{max}}) = 1$



Vlastný tvar vybočenia rámu vypočítaný v programe IQ100:



Posúdenie stability rámu s imperfekciou podľa 5.3.2 (11) [10] na základe posúdenia rozhodujúceho prierezu na pravom stípe rámu s momentami teórie II. rádu:

Poloha rozhodujúceho prierezu:

Rozhodujúci prierez je vzhľadom na konštantný priebeh N a EI v mieste, kde je maximálny ohybový moment teórie II. rádu (vznikajúci od osových síl pôsobiach na prúte s imperfekciou afinnou prvému vlastnému tvaru).

Priebeh ohybových momentov je rovný súčinu druhej derivácie prídavného priehybu (ktorý je afinný vlastnému tvaru vzhľadom na voľbu imperfekcie vo vlastnom tvare) a ohybovej tuhosti.

Funkcia, ktorá je afinná (maximum je totožné) priebehu momentu teórie II. rádu:

$$EIy\eta''_{cr}(x) := -\eta''_{cr}(x) E \cdot I_y$$

kde druhá derivácia vlastného tvaru vybočenia je:

$$\eta''_{cr}(x) := \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot i \cdot \frac{i-1}{m^2} \cdot \left(\frac{x}{m}\right)^{i-2} \right]}{\eta(x_{max})}$$

Vzhľadom na to, že moment zotrvačnosti je konštantný, je poloha maximálneho momentu totožná s polohou maxima druhej derivácie vlastného tvaru :

$$\beta_{M.odhad} := 0.9$$

$$x_{maxM.o} := \beta_{M.odhad} \cdot H$$

$$x_{maxM.o} = 4.5 \text{ m}$$

Given

$$\frac{d}{dx_{maxM.o}} \eta''_{cr}(x_{maxM.o}) = 0$$

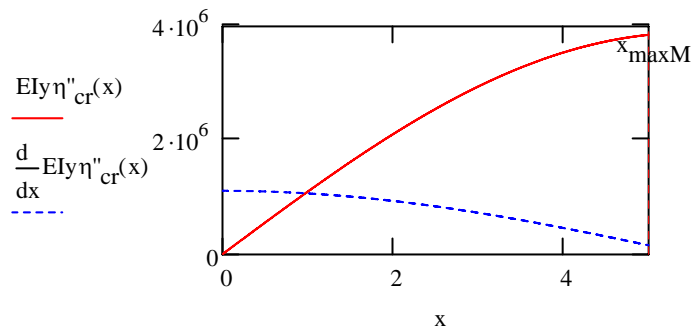
$$x_{maxM} := \text{Find}(x_{maxM.o})$$

$$x_{maxM} = 5.4923 \text{ m}$$

$$x_{maxM} := \begin{cases} x_{maxM} & \text{if } 0 < x_{maxM} \leq H \\ H & \text{if } x_{maxM} > H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Poloha maximálneho momentu teórie II. rádu v rámci prúta:

$$x_{maxM} = 5 \text{ m}$$



Poloha rozhodujúceho prierezu :

$$x_m := x_{maxM}$$

$$x_m = 5 \text{ m}$$

Zaťaženie prúta :

$$N_{Ed.I} = 2080 \text{ kN}$$

$$N_{cr,p} = 5148.42 \text{ kN}$$

Koeficient rozdvojenia rovnováhy pre prút:

$$\alpha_{cr} := \frac{N_{cr,p}}{N_{Ed.I}}$$

$$\alpha_{cr} = 2.4752$$

Podiel momentu teórie II. a momentu teórie I. rádu vyjadruje koeficient:

$$k := \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha_{cr}}}$$

$$k = 1.678$$

Pomerná štíhlosť a vzperný súčiniteľ náhradného prúta s kritickou silou totožnou pre skutočný prút (vzhľadom na konštantnú N aj prierez je konštantná aj pom. štíhlosť vzhľadom na polohu prierezu x_m)

$$\lambda_{mp} := \sqrt{\frac{N_{Rk}}{N_{cr,p}}} \quad \lambda_p = 1.111 \quad \text{modifikovaný (5.11) [10]}$$

vzperná krivka: a $\alpha = \blacksquare$ Tab. 6.2 [10]

Amplitúda imperfekcie náhradného prúta:

$$e_o := \alpha \cdot (\lambda_p - 0.2) \cdot \frac{M_{y,Rk}}{N_{Rk}} \quad e_o = 18.33 \text{ mm} \quad (5.15)$$

Amplitúda priebehu jednotnej globálnej a lokálnej imperfekcie:

$$\eta_{0,init}(x_m) := \frac{\alpha_{cr} \cdot N_{Ed} \cdot \Gamma \cdot e_o}{E \cdot I_y \cdot |\eta''_{cr}(x_m)|} \quad \eta_{0,init}(x_m) = 24.52 \text{ mm} \quad (5.13)$$

Priebeh jednotnej globálnej a lokálnej imperfekcie $\eta_{init}(x)$ ($\eta_{ugli}(x)$ v [14]) a jej veľkosť v závislosti od polohy rozhodujúceho prierezu x_m :

$$\eta_{init}(x) := \eta_{0,init}(x_m) \cdot \eta_{cr}(x) \quad (5.10)$$

amplitúda: $\eta_{init}(x_{max}) = 24.52 \text{ mm}$ kde x_{max} je poloha max. poradnice vl.tvaru vybočenia: $\eta_{cr}(x_{max}) = 1$

Amplitúda (v mieste x_{max}) prídavnej deformácie (v zmysle vlastnosti (5.8)) podľa teórie II. rádu od osovej sily pôsobiacej na prúte s imperfekciou $\eta_{init}(x)$:

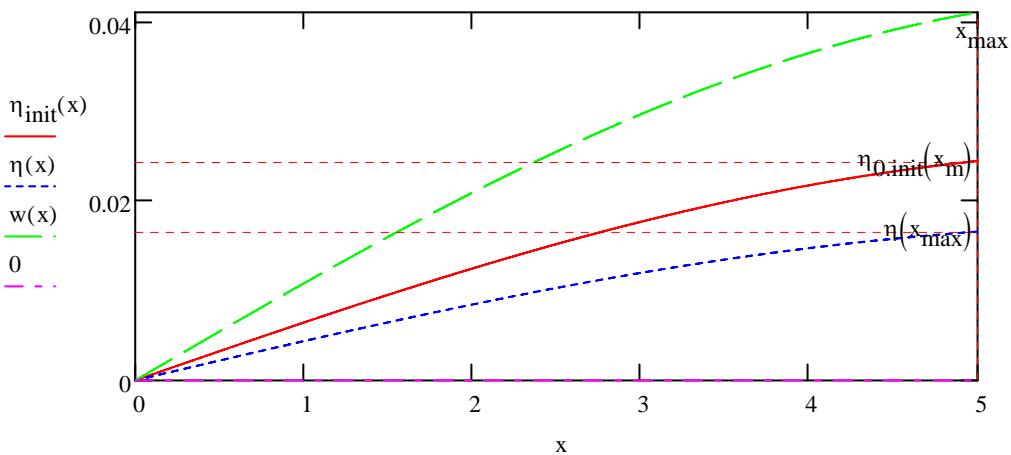
$$x_{max} = 5 \text{ m} \quad \eta_{0,m} := \frac{\eta_{init}(x_{max})}{\alpha_{cr} - 1} \quad \eta_{0,m} = 16.623 \text{ mm}$$

Priebeh prídavnej deformácie v zmysle teórie II. rádu od osovej sily pôsobiacej na prúte s imperfekciou $\eta_{init}(x)$:

$$\eta(x) := \eta_{0,m} \cdot \eta_{cr}(x) \quad \eta(x_{max}) = 16.623 \text{ mm}$$

Výsledný tvar prúta:

$$w(x) := \eta_{init}(x) + \eta(x)$$



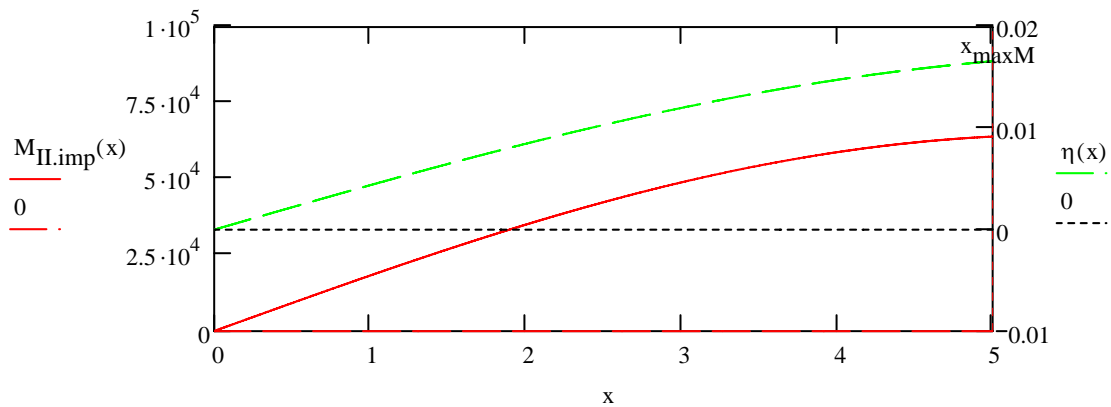
Priebeh momentov teórie II. rádu je rovný súčinu priebehu druhej derivácie prídavnej deformácie $\eta(x)$ (vznikajúcej d osových síl na prúte s imperfekciou $\eta_{init}(x)$) a funkcie premennej ohybovej tuhosti

(v tomto prípade konštantnej ohybovej tuhosti):

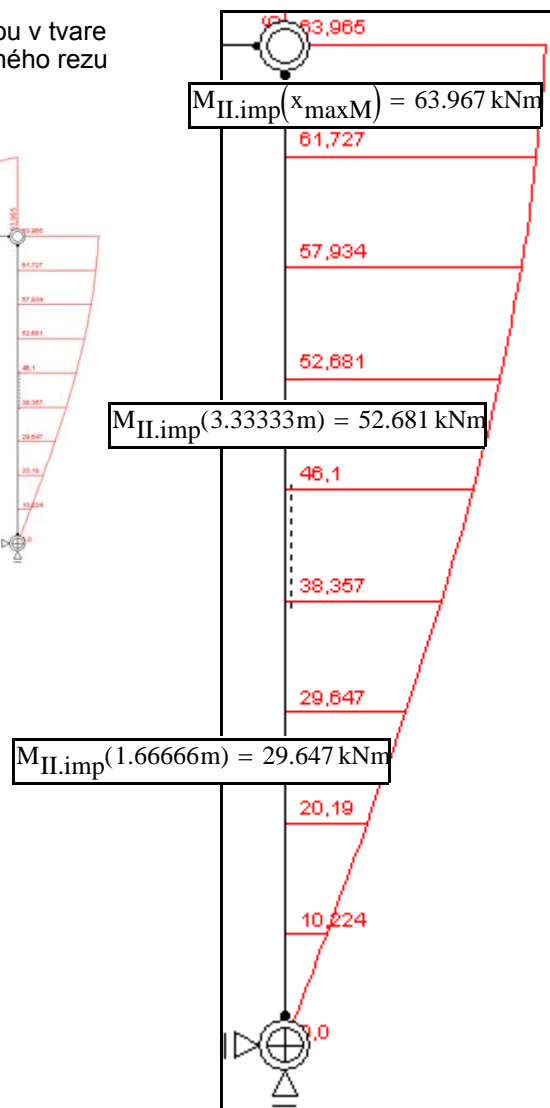
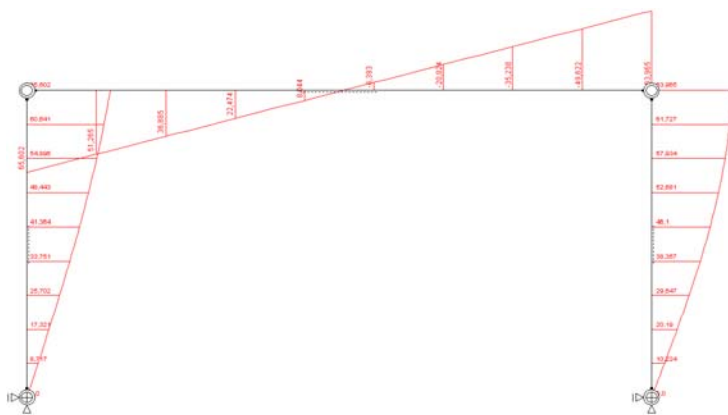
$$M_{II,imp}(x) := -E \cdot I_y \cdot \frac{d^2}{dx^2} \eta(x) \quad \text{alebo:} \quad M_{II}(x) = -E \cdot I_y(x) \cdot \left[\eta_{0,m} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \left[C_i \cdot i \cdot \frac{i-1}{m^2} \cdot \left(\frac{x}{m} \right)^{i-2} \right]}{\eta(x_{max})} \right]$$

Miesto max. momentu: $M_{II,imp}(x_{maxM}) = 63.967 \text{ kNm}$

Miesto rozhodujúceho prierezu: $M_{II,imp}(x_m) = 63.967 \text{ kNm}$



Momenty teórie II.rádu na ráme (IQ100) s imperfekciou v tvare vlastného tvaru vybočenia s amplitúdou v mieste horného rezu pravého stĺpa o hodnote $\eta_{0,init}(x_m) = 0.02452 \text{ m}$:



Jednotkové využitie v jednotlivých rezoch prúta:

$$U(x) := \left| \frac{N_{Ed,I}}{N_{Rd}} \right| + \left| \frac{M_{II,imp}(x)}{M_{y,Rd}} \right|$$

$$U_N(x) := \frac{N_{Ed,I}}{N_{Rd}}$$

$$U_M(x) := \frac{M_{II,imp}(x)}{M_{y,Rd}}$$

Vzhľadom na to, že v tomto príklade je konštantný priebeh $EI(x)$ aj $N(x)$ na stĺpe je poloha rozhodujúceho prierezu daná polohou maxima $M''(x)$ a tým aj polohou maxima druhej derivácie vlastného tvaru vybočenia.

Hľadanie miesta maximálneho využitia:

$$x_T := 0.9 \cdot x_m$$

Poloha maximálneho momentu: $x_{maxM} = 5 \text{ m}$

Given

$$\frac{d}{dx_r} \left(\frac{N_{Ed.I}}{N_{Rd}} + \frac{M_{II.imp}(x_r)}{M_{y.Rd}} \right) = 0$$

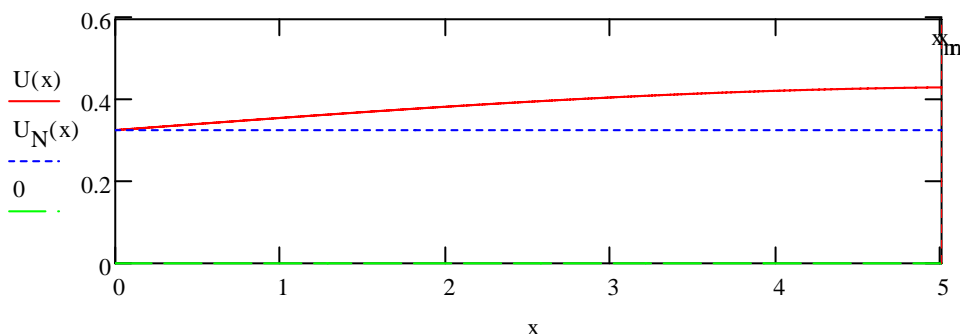
$$N_{Ed.I} = 2080 \text{ kN} \quad M_{II.imp}(x_m) = 63.967 \text{ kNm}$$

Predpokladana poloha rozhodujúceho prierezu x_m sa musí zhodovať s výslednou polohou maximálneho využitia x_r :

Výpočet prebehol pre polohu rozhodujúceho prierezu: $x_m = 5 \text{ m}$

Maximálne využitie v reze: $x_r = 5 \text{ m}$

$$\begin{aligned} x_{mx} &:= \text{Find}(x_r) & x_r &= 5.493 \text{ m} \\ x_{mx} &:= \begin{cases} x_r & \text{if } 0 < x_r \leq H \\ H & \text{if } x_r > H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$



Vzhľadom na to, že vypočítané momenty teórie II rádu sú len od účinkov osových síl pôsobiacich na imperfektnom prúte s imperfekciou afinnou vlastnému tvaru, treba pripočítať momenty teórie I rádu od vonkajšieho zaťaženia.

$$M_{celk}(x) := M_{Ed.I}(x) + M_{II.imp}(x)$$

Využitie v jednotlivých rezoch stĺpu :
$$U_{e,y}(x) := \frac{|N_{Ed.I}|}{N_{Rd}} + \frac{|M_{celk}(x)|}{M_{y.Rd}} \quad U_{e,y}(H) = 61.894 \%$$

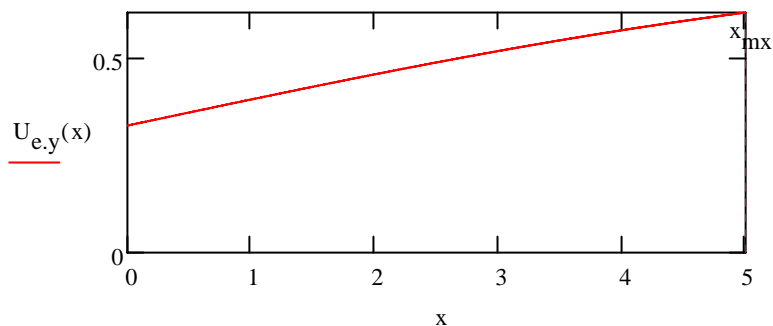
$$x_{mx} := 0.9 \cdot x_r$$

Given
$$\frac{d}{dx_{mx}} \left(\frac{N_{Ed.I}}{N_{Rd}} + \frac{M_{celk}(x_{mx})}{M_{y.Rd}} \right) = 0$$

$$x_{mx} := \text{Find}(x_{mx}) \quad x_{mx} = 9.467 \text{ m}$$

$$x_{mx} := \begin{cases} x_{mx} & \text{if } 0 < x_{mx} \leq H \\ H & \text{if } x_{mx} > H \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_{mx} = 5 \text{ m}$$



$$\text{Prut} := \text{if}(U_{e,y}(x_{mx}) \leq 1, \text{"vyhovuje"}, \text{"nevyhovuje"})$$

Prut = "vyhovuje"

Maximálne využitie:

$$U_{e,y}(x_{mx}) = 61.894 \%$$

Porovnanie metód posúdenia stability v rovine rámu :

- na základe globálnej analýzy s vplyvom účinkov teórie II. rádu a imperfekcií podľa 5.2.2 (3) a) [10]

$$U_{a,y}(x_{\max.II}) = 63.197 \%$$

- čiastočne podľa globálnej analýzy s vplyvom teórie II.rádu a imperfekcií a čiastočne prostredníctvom individuálneho posúdenia prúta podľa 6.3 [10] : metóda podľa 5.2.2.(3) b) [10]

$$U_{b,y} = 65.886 \%$$

- na základe posúdenia odolnosti prierezov pričom vnútorné sily boli vypočítané teóriou I. rádu a vplyv teórie II. rádu bol odhadnutý na základe (5.2) a (5.4) [10]. (treba poznamenať, že vzhľadom na $\alpha_{cr} < 3$, už podľa [10] nie je možné tento odhad použiť)

$$U_{c,y}(x_{\max.IIod}) = 61.941 \%$$

- na základe analýzy teóriou I rádu a posúdenia náhradného prúta pre pravý stĺp podľa 6.3 [10]

$$U_{d,y} = 78.01 \%$$

- na základe analýzy v rovine rámu s imperfekciou v tvare vlastného tvaru vybočenia podľa 5.3.2 (11) [10]

$$U_{e,y}(x_{mx}) = 61.894 \%$$

Porovnanie dvoch metód posúdenia stability z roviny rámu s ohľadom na zaťaženie v rovine rámu :

- všeobecná metóda podľa 6.3.4 [10]

$$U_{vseo} = 67.803 \%$$

- čiastočne podľa globálnej analýzy s vplyvom teórie II.rádu a imperfekcií a čiastočne prostredníctvom individuálneho posúdenia prúta podľa 6.3 [10] : metóda podľa 5.2.2.(3) b) [10]

$$U_{b,zy} = 62.18 \%$$